2000. Т. 36, № 7. С. 963 — 970

УДК 519.63

РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА. II

А. А. Самарский, П. Н. Вабищевич

Введение. В работе [1] рассмотрены стандартные схемы второго порядка аппроксимации по пространственным переменным для приближенного решения краевой задачи для уравнения переноса в прямоугольнике. Отдельно выделены уравнения переноса, записанные в трех основных формах: дивергентной, недивергентной и симметричной. На основе общей теории устойчивости операторно-разностных схем [2, 3] проведено исследование устойчивости двух- и трехслойных разностных схем со стандартными аппроксимациями по пространству центральными разностями второго порядка в соответствующих сеточных пространствах.

В прикладном математическом моделировании проблем механики сплошной среды большое внимание уделяется свойству монотонности разностных схем [2], которое мы связываем с выполнением принципа максимума для разностного решения. При получении монотонных разностных схем традиционно ориентируются на использование аппроксимаций конвективных слагаемых направленными разностями. Во второй части работы проведено исследование устойчивости схем с направленными разностями для нестационарных задач переноса при использовании операторов конвективного переноса в дивергентной и недивергентной формах. Получены априорные оценки в банаховых пространствах сеточных функций.

Принцип максимума и априорные оценки для дифференциальной задачи. Ограничимся модельной задачей для двухмерного уравнения переноса в прямоугольнике. Запишем ее в виде задачи Коши для эволюционного уравнения

$$du/dt + Cu = 0, \quad C = C(t), \quad t > 0, \tag{1}$$

$$u(0) = u_0. \tag{2}$$

На поле скоростей $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ накладываются ограничения

$$(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega, \quad t > 0, \tag{3}$$

где $\mathbf{n}$ — нормаль к границе расчетной области. При ограничениях (3) на поле скоростей нет необходимости формулировать какие-либо граничные условия для однозначного определения решения задачи (1), (2). Рассматриваются два класса задач, когда конвективный перенос записывается в недивергентной и дивергентной формах. В первом случае оператор конвективного переноса задается в виде $C = C_1$, где

$$C_1 u = \sum_{\alpha=1}^{2} v_\alpha(\mathbf{x}, t) \partial u / \partial x_\alpha. \tag{4}$$

Для дивергентного уравнения переноса в (1) имеем $C = C_2$, где

$$C_2 u = \sum_{\alpha=1}^{2} \partial (v_\alpha(\mathbf{x}, t) u) / \partial x_\alpha. \tag{5}$$

Для уравнений переноса в дивергентной и недивергентной формах (4), (5) имеет место [1] принцип максимума: при неотрицательных начальных условиях неотрицательным будет решение в любой другой момент времени $t > 0$. Приведем также соответствующие априорные оценки для решения задач (1), (2), (4) и (1), (2), (5).

Для уравнения переноса в дивергентной форме (1), (5) справедлива оценка устойчивости по начальным данным в $L_1(\Omega)$

$$\|u(\mathbf{x},t)\|_1 \le \|u_0(\mathbf{x})\|_1, \tag{6}$$

где $\|g\|_1 = \int\limits_{\Omega} |g(\mathbf{x})|\,d\mathbf{x}$ — норма в пространстве $L_1(\Omega)$.

Соответствующая оценка в $L_\infty(\Omega)$ для недивергентного уравнения (1), (4) имеет вид

$$\|u(\mathbf{x},t)\|_\infty \le \|u_0(\mathbf{x})\|_\infty, \tag{7}$$

где $\|g\|_\infty = \max\limits_{\mathbf{x}\in\Omega} |g(\mathbf{x})|$.

При построении дискретных аналогов задач (1), (2), (4) и (1), (2), (5) будем отслеживать выполнение принципа максимума на разностном уровне и справедливость оценок устойчивости типа (6), (7).

Задача Коши для системы ОДУ. Рассмотрим вначале однородную систему линейных обыкновенных уравнений первого порядка

$$\frac{dw_i}{dt} + \sum_{j=1}^{N} a_{ij}(t) w_j = 0, \quad i = \overline{1,N}. \tag{8}$$

Полагая $w = w(t) = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$, $A = [a_{ij}]$, запишем эту систему в матричном (операторном) виде

$$dw/dt + A(t)w = 0. \tag{9}$$

Будем строить разностные схемы для приближенного решения задачи Коши, когда (9) рассматривается при $t > 0$ и начальных условиях

$$w(0) = u_0. \tag{10}$$

Нас будет интересовать устойчивость разностного решения задачи (9), (10) в L_∞ и L_1. Для нормы вектора и согласованной с ней нормы матрицы в L_∞ имеем [4]

$$\|w\|_\infty = \max_{1\le i\le N} |w_i|, \quad \|A\|_\infty = \max_{1\le i\le N} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|. \tag{11}$$

Аналогично в L_1

$$\|w\|_1 = \sum_{i=1}^{N} |w_i|, \quad \|A\|_1 = \max_{1\le j\le N} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|. \tag{12}$$

Задачу (9), (10) будем рассматривать при следующих ограничениях. Диагональные элементы матрицы A предполагаются неотрицательными и имеется нестрогое диагональное преобладание по строкам, т. е. справедливо

$$a_{ii} \ge \sum_{i\ne j=1}^{N} |a_{ij}|, \quad i = \overline{1,N}, \tag{13}$$

либо имеет место

$$a_{jj} \ge \sum_{j\ne i=1}^{N} |a_{ij}|, \quad j = \overline{1,N} \tag{14}$$

(нестрогое диагональное преобладание по столбцам).

Оценки устойчивости в L_∞ в теории разностных схем [2, 3] чаще всего получают на основе принципа максимума, соответствующих теорем сравнения. Здесь достаточные условия устойчивости получены с привлечением понятия логарифмической нормы [5, 6] оператора. С единых позиций удается рассмотреть как устойчивость в L_∞, так и в L_1 (см. также [7, 8]).

Логарифмическая норма матрицы A есть число

$$\mu[A] = \lim_{\delta \to 0+} \frac{\|E + \delta A\| - 1}{\delta}.$$

Для логарифмической нормы матрицы в L_∞ (согласованной с (11)) и в L_1 (согласованной с (12)) имеют место выражения

$$\mu_\infty[A] = \max_{1 \le i \le N} \left(a_{ii} + \sum_{i \ne j = 1}^{N} |a_{ij}| \right), \quad \mu_1[A] = \max_{1 \le j \le N} \left(a_{jj} + \sum_{j \ne i = 1}^{N} |a_{ij}| \right).$$

В силу ограничений (13), (14) в задаче Коши (9), (10) для логарифмической нормы матрицы $-A$ имеем

$$\mu[-A] \le 0 \tag{15}$$

в соответствующем пространстве (в L_∞ при выполнении (13) и в L_1 при выполнении (14)).

Из свойств логарифмической нормы (см. [5, 9]) отметим следующие: 1) $\mu[cA] = c\mu[A]$, $c = \mathrm{const} \ge 0$; 2) $\mu[cE + A] = c + \mu[A]$, $c = \mathrm{const}$; 3) $\|Aw\| \ge \max\{-\mu[-A], -\mu[A]\}\|w\|$.

Наибольшего внимания заслуживает именно свойство 3), которое позволяет получить легко вычисляемую по элементам матрицы оценку нормы Aw снизу. Такая оценка комбинируется с обычной оценкой нормы Aw сверху: $\|Aw\| \le \|A\|\,\|w\|$.

С привлечением логарифмической нормы для (9) имеем [5, 6] $d\|w\|/dt \le \mu[-A]\,\|w\|$ и с учетом свойства (15) получим оценку устойчивости

$$\|w(t)\| \le \|u_0\| \tag{16}$$

для решения задачи Коши (9), (10) в L_∞ или L_1.

Схема с весами. Построим и исследуем на устойчивость разностные схемы для приближенного решения задачи (9), (10). Рассмотрим простейшую двухслойную разностную схему с весами:

$$(y_{n+1} - y_n)/\tau + A(\sigma y_{n+1} + (1 - \sigma) y_n) = 0, \tag{17}$$

где, например, $A = A(\sigma t_{n+1} + (1 - \sigma) t_n)$, при начальном условии

$$y_0 = u_0. \tag{18}$$

Сформулируем достаточные условия устойчивости разностной схемы (17), (18). Покажем, что для задачи Коши (9), (10) с матрицей A, удовлетворяющей условиям (13) (или (14)), разностная схема с весами (17), (18) безусловно устойчива при $\sigma = 1$ и условно устойчива при $0 \le \sigma < 1$ в L_∞ (в L_1), если

$$\tau \le (1 - \sigma)^{-1} (\max_{1 \le i \le N} a_{ii})^{-1}. \tag{19}$$

При этом для разностного решения верна априорная оценка

$$\|y_{n+1}\| \le \|u_0\|. \tag{20}$$

Из (17) следует $(E + \sigma\tau A) y_{n+1} = (E - (1 - \sigma)\tau A) y_n$ и тем самым

$$\|(E + \sigma\tau A) y_{n+1}\| \le \|(E - (1 - \sigma)\tau A) y_n\|. \tag{21}$$

Для левой части неравенства (21) в силу отмеченных выше свойств логарифмической нормы и с учетом (15) имеем $\|(E + \sigma\tau A) y_{n+1}\| \ge -\mu[-E - \sigma\tau A]\,\|y_{n+1}\| = (1 + \sigma\tau\mu[-A])\|y_{n+1}\| \ge \|y_{n+1}\|$. Для правой части (21) получим $\|(E - (1 - \sigma)\tau A) y_n\| \le \|E - (1 - \sigma)\tau A\|\,\|y_n\|$.

Рассмотрим подробнее эту оценку при исследовании устойчивости в L_∞. Случай L_1 изучается аналогично. Принимая во внимание (11) и условие диагонального преобладания (13), имеем

$$\|E - (1-\sigma)\tau A\| = \max_{1 \le i \le N} \left| 1 - (1-\sigma)\tau \left(a_{ii} + \sum_{i \ne j = 1}^{N} a_{ij} \right) \right| \le \max_{1 \le i \le N} \left(|1 - (1-\sigma)\tau a_{ii}| + (1-\sigma)\tau \sum_{i \ne j = 1}^{N} |a_{ij}| \right) \le$$

$$\le \max_{1 \le i \le N} (|1 - (1 - \sigma)\tau a_{ii}| + (1 - \sigma)\tau a_{ii}) \le 1$$

при $0 \leq \sigma \leq 1$ и ограничениях на шаг по времени (19). Подстановка в (21) дает неравенство $\|y_{n+1}\| \leq \|y_n\|$, из которого непосредственно вытекает искомая оценка устойчивости по начальным данным (20).

Применим установленный результат для исследования устойчивости разностных схем для нестационарных задач переноса в недивергентной и дивергентной формах.

Схемы с направленными разностями для уравнений переноса. Безусловно устойчивые в L_∞ и L_1 разностные схемы для уравнений переноса в недивергентной и дивергентной формах можно построить на основе использования простейших аппроксимаций операторов переноса направленными разностями первого порядка.

Будем использовать обозначения: $g(x) = g_+(x) + g_-(x)$, $g_+(x) = 0{,}5(g(x) + |g(x)|) \geq 0$, $g_-(x) = 0{,}5(g(x) - |g(x)|) \leq 0$. Начнем с аппроксимаций на основе задания поля скоростей в узлах сетки $\bar{\omega}$. В рассматриваемых задачах с условием непротекания (3) аппроксимации на границе строятся с учетом знака нормальной компоненты скорости в приграничных узлах. Для разностного оператора переноса в недивергентной форме положим

$$C_1 = \sum_{\alpha=1}^{2} C_1^{(\alpha)}, \quad C_1^{(\alpha)} y = \begin{cases} b_+^{(\alpha)} y_{\bar{x}_\alpha} + b_-^{(\alpha)} y_{x_\alpha}, & h_\alpha \leq x_\alpha \leq l_\alpha - h_\alpha, \\ 0, & x_\alpha = 0,\ x_\alpha = l_\alpha, \end{cases} \quad \alpha = 1,2. \tag{22}$$

Аналогично (см. [1]) при аппроксимации оператора переноса в дивергентной форме можем положить

$$C_2 = \sum_{\alpha=1}^{2} C_2^{(\alpha)}, \quad C_2^{(\alpha)} y = \begin{cases} (b_-^{(\alpha)} y)_{x_\alpha}, & x_\alpha = 0, \\ (b_+^{(\alpha)} y)_{x_\alpha} + (b_-^{(\alpha)} y)_{x_\alpha}, & h_\alpha \leq x_\alpha \leq l_\alpha - h_\alpha, \\ (b_+^{(\alpha)} y)_{\bar{x}_\alpha}, & x_\alpha = l_\alpha, \end{cases} \quad \alpha = 1,2. \tag{23}$$

В граничных узлах разностный оператор C_2 не аппроксимирует, вообще говоря, дифференциальный оператор переноса в дивергентной форме, но на классе задач с условиями (3) погрешность аппроксимации на границе есть $O(|h|)$.

Рассматриваемые разностные операторы конвективного переноса аппроксимируются на стандартном пятиточечном шаблоне "крест". Сформулируем условия диагонального преобладания в этом случае, положив

$$\begin{aligned} Dy = \gamma(\mathbf{x},t)y(\mathbf{x},t) - \alpha_1(\mathbf{x},t)y(x_1 - h_1, x_2) - \beta_1(\mathbf{x},t)y(x_1 + h_1, x_2) - \\ - \alpha_2(\mathbf{x},t)y(x_1, x_2 - h_2) - \beta_2(\mathbf{x},t)y(x_1, x_2 + h_2), \quad \mathbf{x} \in \bar{\omega}. \end{aligned} \tag{24}$$

Будем считать, что в (24) соответствующие коэффициенты (α_1, α_2, β_1 и β_2) при $y(\mathbf{x})$ равны нулю для $\mathbf{x} \notin \bar{\omega}$.

При естественной нумерации узлов сетки $(((i_1, i_2),\ i_1 = \overline{0, N_1}),\ i_2 = \overline{0, N_2})$ условие диагонального преобладания по строкам (13) для двумерного пятиточечного оператора D, определяемого согласно (24), имеет вид

$$\gamma(\mathbf{x},t) \geq |\alpha_1(\mathbf{x},t)| + |\alpha_2(\mathbf{x},t)| + |\beta_1(\mathbf{x},t)| + |\beta_2(\mathbf{x},t)|, \quad \mathbf{x} \in \bar{\omega}. \tag{25}$$

Аналогичное условие диагонального преобладания по столбцам (14) принимает вид

$$\gamma(\mathbf{x},t) \geq |\alpha_1(x_1+h_1, x_2, t)| + |\beta_1(x_1-h_1, x_2, t)| + |\alpha_2(x_1, x_2+h_2, t)| + |\beta_2(x_1, x_2-h_2, t)|, \quad \mathbf{x} \in \bar{\omega}. \tag{26}$$

Сеточный оператор конвективного переноса в недивергентном виде (22) записывается в виде (24) с $\alpha_k(\mathbf{x},t) = b_+^{(k)}(\mathbf{x},t)/h_k$, $\beta_1(\mathbf{x},t) = -b_-^{(k)}(\mathbf{x},t)/h_k$, $k = 1,2$, $\gamma(\mathbf{x},t) = \alpha_1(\mathbf{x},t) + \alpha_2(\mathbf{x},t) + \beta_1(\mathbf{x},t) + \beta_2(\mathbf{x},t)$, $\mathbf{x} \in \omega$. Для разностного оператора (23) имеем $\alpha_1(\mathbf{x},t) = b_+^{(1)}(x_1 - h_1, x_2, t)/h_1$, $\alpha_2(\mathbf{x},t) = b_+^{(2)}(x_1, x_2 - h_2, t)/h_2$, $\beta_1(\mathbf{x},t) = -b_-^{(1)}(x_1 + h_1, x_2, t)/h_1$, $\beta_2(\mathbf{x},t) = -b_-^{(2)}(x_1, x_2 + h_2, t)/h_2$, $\gamma(\mathbf{x},t) = \alpha_1(\mathbf{x},t) + \alpha_2(\mathbf{x},t) + \beta_1(\mathbf{x},t) + \beta_2(\mathbf{x},t)$, $\mathbf{x} \in \bar{\omega}$. Тем самым для сеточного оператора C_1, определяемого согласно (22), безусловно выполнены условия диагонального преобладания по строкам (25), а для сеточного оператора C_2 (23) — условия диагонального преобладания по столбцам (26).

Теперь можем сформулировать условия устойчивости двухслойной разностной схемы

$$(y_{n+1}-y_n)/\tau+C_\alpha(t_{n+1}^{(\sigma)})(\sigma y_{n+1}+(1-\sigma)y_n)=0,\quad n=0,1,\ldots,\quad \alpha=1,2,\quad y_0=u_0 \tag{27}$$

при использовании разностных операторов переноса с направленными разностями (22), (23). Ограничения на шаг по времени (19) принимают вид $\tau\leq(1-\sigma)^{-1}(\max\limits_{\mathbf{x}\in\bar\omega}\gamma(\mathbf{x},t))^{-1}$. Отсюда следует, что при

$$\tau\leq\frac{1}{1-\sigma}\left(\sum_{\alpha=1}^{2}\max_{\mathbf{x}\in\bar\omega}\frac{|v_\alpha(\mathbf{x},t)|}{h_\alpha}\right)^{-1} \tag{28}$$

разностная схема (27), (22) устойчива в $L_\infty(\bar\omega)$ и для решения справедлива априорная оценка

$$\|y_{n+1}\|_\infty\leq\|u_0\|_\infty,\quad n=0,1,\ldots \tag{29}$$

При тех же ограничениях (28) устойчива и разностная схема (27), (23), причем имеет место оценка устойчивости в $L_1(\bar\omega)$

$$\|y_{n+1}\|_1\leq\|u_0\|_1,\quad n=0,1,\ldots \tag{30}$$

Оценки (29), (30) согласуются с соответствующими оценками (с (7) и (6) соответственно). Для полностью неявных схем ($\sigma=1$) имеет место (см. (28)) безусловная устойчивость.

Специально подчеркнем, что при использовании центрально-разностных аппроксимаций для конвективных слагаемых (см. [1]) мы не можем рассчитывать на устойчивость двухслойных разностных схем (27) в $L_\infty(\bar\omega)$ или в $L_1(\bar\omega)$. В этом случае нельзя рассчитывать на диагональное преобладание ни при каких параметрах сетки по времени и пространству.

Для разностной схемы (27), (23) естественной является оценка (30) в $L_1(\bar\omega)$. При этом никаких ограничений на поле скоростей не накладывается. Во многих случаях представляется важным получить оценку в более сильной норме (в $L_\infty(\bar\omega)$), наложив те или иные ограничения на свойства среды. При этом приходится ограничиваться ϱ-устойчивостью.

Для дифференциальной задачи (1), (2) с оператором переноса в дивергентной форме (5) вместо (6) можно использовать оценку ϱ-устойчивости

$$\|u(t)\|_\infty\leq\exp(\mathcal{K}t)\|u_0\|_\infty,\quad \mathcal{K}=\max_{\mathbf{x}\in\Omega}|\operatorname{div}\mathbf{v}|. \tag{31}$$

Это доказывается подобно оценке (7) с использованием представления

$$\mathcal{C}_2u=\mathcal{C}_1u+\operatorname{div}\mathbf{v}\,u. \tag{32}$$

Подобные оценки для задачи (1), (2), (5) получены в работе [10]. Ориентируясь на (31), получим соответствующие оценки ϱ-устойчивости для разностных схем (27), (23).

Нетрудно убедиться, что для разностных операторов конвективного переноса (22), (23) аналог (32) не имеет места. Аналогичное исследование проведено нами для аппроксимаций конвективного переноса центральными разностями [1]. Например, для внутренних узлов получим

$$C_2y=C_1y+\sum_{\alpha=1}^{2}((b_+^{(\alpha)})_{\bar x_\alpha}+(b_-^{(\alpha)})_{x_\alpha})y+\sum_{\alpha=1}^{2}h_\alpha(y_{x_\alpha}(b_-^{(\alpha)})_{x_\alpha}-y_{\bar x_\alpha}(b_+^{(\alpha)})_{\bar x_\alpha}).$$

В силу этого для разностного оператора переноса в дивергентной форме аппроксимации (23) неудобны при ориентации на оценки в равномерной норме.

Как и при использовании аппроксимаций второго порядка, для операторов переноса можно рассчитывать на более благоприятную ситуацию при задании коэффициентов переноса на смещенной сетке. Для недивергентного оператора переноса будем использовать аппроксимацию

$$C_1=\sum_{\alpha=1}^{2}C_1^{(\alpha)}, \tag{33}$$

$$
C_1^{(1)}y = \begin{cases} 2b_-^{(1)}(x_1+0{,}5h_1,x_2)y_{x_1}, & x_1 = 0,\\ b_+^{(1)}(x_1-0{,}5h_1,x_2)y_{\bar{x}_1} + b_-^{(1)}(x_1+0{,}5h_1,x_2)y_{x_1}, & h_1 \le x_1 \le l_1 - h_1,\\ 2b_+^{(1)}(x_1-0{,}5h_1,x_2)y_{\bar{x}_1}, & x_1 = l_1, \end{cases}
$$

$$
C_1^{(2)}y = \begin{cases} 2b_-^{(2)}(x_1,x_2+0{,}5h_2)y_{x_2}, & x_2 = 0,\\ b_+^{(2)}(x_1,x_2-0{,}5h_2)y_{\bar{x}_2} + b_-^{(2)}(x_1,x_2+0{,}5h_2)y_{x_2}, & h_2 \le x_2 \le l_2 - h_2,\\ 2b_+^{(2)}(x_1,x_2-0{,}5h_2)y_{\bar{x}_2}, & x_2 = l_2. \end{cases}
$$

Вблизи границы снова берется только определенная часть нормальной компоненты скорости, причем удобно взять удвоенную величину. При этом погрешность аппроксимации с учетом (3) остается первого порядка.

Для дивергентного оператора конвективного переноса воспользуемся представлением

$$
C_2 = \sum_{\alpha=1}^{2} C_2^{(\alpha)}, \tag{34}
$$

$$
C_2^{(1)}y = \begin{cases} 2h_1^{-1}(b_-^{(1)}(x_1+0{,}5h_1,x_2)y(x_1+h_1,x_2) + b_+^{(1)}(x_1+0{,}5h_1,x_2)y(x_1,x_2)), & x_1 = 0,\\ h_1^{-1}(b_-^{(1)}(x_1+0{,}5h_1,x_2)y(x_1+h_1,x_2) - b_-^{(1)}(x_1-0{,}5h_1,x_2)y(x_1,x_2)) + & \\ +h_1^{-1}(b_+^{(1)}(x_1+0{,}5h_1,x_2)y(x_1,x_2) - b_+^{(1)}(x_1-0{,}5h_1,x_2)y(x_1-h_1,x_2)), & h_1 \le x_1 \le l_1 - h_1,\\ -2h_1^{-1}(b_+^{(1)}(x_1-0{,}5h_1,x_2)y(x_1-h_1,x_2) + b_-^{(1)}(x_1-0{,}5h_1,x_2)y(x_1,x_2)), & x_1 = l_1, \end{cases}
$$

$$
C_2^{(2)}y = \begin{cases} 2h_1^{-1}(b_-^{(2)}(x_1,x_2+0{,}5h_2)y(x_1,x_2+h_2) + b_+^{(2)}(x_1,x_2+0{,}5h_2)y(x_1,x_2)), & x_2 = 0,\\ h_2^{-1}(b_-^{(1)}(x_1,x_2+0{,}5h_2)y(x_1,x_2+h_2) - b_-^{(2)}(x_1,x_2-0{,}5h_2)y(x_1,x_2)) + & \\ +h_2^{-1}(b_+^{(2)}(x_1,x_2+0{,}5h_2)y(x_1,x_2) - b_+^{(1)}(x_1,x_2-0{,}5h_2)y(x_1,x_2-h_2)), & h_2 \le x_2 \le l_2 - h_2,\\ -2h_2^{-1}(b_+^{(2)}(x_1,x_2-0{,}5h_2)y(x_1,x_2-h_2) + b_-^{(2)}(x_1,x_2-0{,}5h_2)y(x_1,x_2)), & x_2 = l_2. \end{cases}
$$

В этом случае имеет место разностный аналог (32):

$$
C_2 y = C_1 y + \mathrm{div}_h \mathbf{b}\, y. \tag{35}
$$

При (33), (34) для разностного оператора дивергенции используется представление

$$
\mathrm{div}_h \mathbf{b} = \sum_{\alpha=1}^{2} \mathrm{div}_h \mathbf{b}_\alpha, \tag{36}
$$

$$
\mathrm{div}_h \mathbf{b}_1 = \begin{cases} 2h_1^{-1}(b^{(1)}(x_1+0{,}5h_1,x_2) - b^{(1)}(x_1,x_2)), & x_1 = 0,\\ h_1^{-1}(b^{(1)}(x_1+0{,}5h_1,x_2) - b^{(1)}(x_1-0{,}5h_1,x_2)), & h_1 \le x_1 \le l_1 - h_1,\\ -2h_1^{-1}(b^{(1)}(x_1,x_2) - b^{(1)}(x_1-0{,}5h_1,x_2)), & x_1 = l_1, \end{cases}
$$

$$
\mathrm{div}_h \mathbf{b}_2 = \begin{cases} 2h_2^{-1}(b^{(2)}(x_1,x_2+0{,}5h_2) - b^{(2)}(x_1,x_2)), & x_2 = 0,\\ h_2^{-1}(b^{(2)}(x_1,x_2+0{,}5h_2) - b^{(2)}(x_1,x_2-0{,}5h_2)), & h_2 \le x_2 \le l_2 - h_2,\\ -2h_2^{-1}(b^{(2)}(x_1,x_2) - b^{(2)}(x_1,x_2-0{,}5h_2)), & x_2 = l_2. \end{cases}
$$

С учетом (35) запишем двухслойную схему для уравнения (1) в виде

$$
(y_{n+1} - y_n)/\tau + (C_1 + \mathrm{div}_h \mathbf{b})(\sigma y_{n+1} + (1-\sigma)y_n) = 0. \tag{37}
$$

Как и при исследовании схемы (17), (18), получим (см. (21))

$$
\|(E + \sigma\tau(C_1 + \mathrm{div}_h \mathbf{b}))y_{n+1}\|_\infty \le \|(E - (1-\sigma)\tau(C_1 + \mathrm{div}_h \mathbf{b}))y_n\|_\infty. \tag{38}
$$

При рассмотрении левой части неравенства (38) используем неравенство $\mu_\infty[-C_1] \le 0$ и свойство логарифмической нормы $\mu[A+B] \ge \mu[A] - \mu[-B]$. В силу этого $\|(E + \sigma\tau(C_1 + {}$ ${}+\mathrm{div}_h \mathbf{b}))y_{n+1}\| \ge -\mu_\infty[-E - \sigma\tau(C_1 + \mathrm{div}_h \mathbf{b})]\, \|y_{n+1}\| \ge (1 + \sigma\tau(\mu_\infty[-C_1] - \mu_\infty[-\mathrm{div}_h \mathbf{b}]))\|y_{n+1}\| \ge$

$\geq (1-\sigma\tau K)\|y_{n+1}\|$, где в соответствии с (31) $K = \max\limits_{\mathbf{x}\in\bar{\omega}} |\mathrm{div}_h \mathbf{b}|$. При сформулированных ранее ограничениях (28) на шаг по времени для правой части (38) получим $\|(E-(1-\sigma)\tau(C_1 + \mathrm{div}_h\mathbf{b}))y_n\| \leq \|E-(1-\sigma)\tau C_1\|\,\|y_n\| + (1-\sigma)\tau\|\mathrm{div}_h\mathbf{b}\|\,\|y_n\| \leq (1+(1-\sigma)\tau K)\|y_n\|$. Подстановка в (38) приводит к послойной оценке $(1-\sigma\tau K)\|y_{n+1}\| \leq (1+(1-\sigma)\tau K)\|y_n\|$. Отсюда получим оценку ϱ-устойчивости

$$\|y_{n+1}\|_\infty \leq \varrho\|y_n\|_\infty, \quad n = 0,1,\ldots, \tag{39}$$

с постоянной $\varrho = \exp((1+\sigma)\tau K)$ при дополнительных (помимо (28)) ограничениях на шаг по времени $\tau \leq 3/(4\sigma K)$. Оценка (39) выступает в качестве разностного аналога оценки (31) для дифференциальной задачи (1), (2), (5).

При использовании аппроксимаций дивергентного конвективного переноса в виде (23) можно получить оценку ϱ-устойчивости (39), в которой постоянная

$$K = \sum_{\alpha=1}^{2} \max_{\mathbf{x}\in\bar{\omega}}\left(|(b_+^{(\alpha)})_{\bar{x}_\alpha}| + |(b_-^{(\alpha)})_{x_\alpha}|\right)$$

имеет мало общего с постоянной $\mathcal{K}$ для исходной дифференциальной задачи. В силу этого необходимо отдавать предпочтение использованию аппроксимаций (34) с заданием коэффициентов переноса на смещенных сетках перед аппроксимациями (23) с коэффициентами в узлах.

Монотонные и консервативные разностные схемы. Монотонными мы называем разностные схемы, для которых выполнен принцип максимума. Будем рассматривать однородные двухслойные разностные схемы, которые запишем в виде

$$D(t_n)y_{n+1} = G(t_n)y_n, \quad n = 0,1,\ldots \tag{40}$$

Эта схема будет монотонной, если при неотрицательных начальных условиях ($y_0 \geq 0$) решение будет неотрицательным и на любом другом шаге по времени ($y_n \geq 0$, $n = 0,1,\ldots$). Сформулируем достаточные условия монотонности разностной схемы (40) на основе использования простейших результатов теории неотрицательных матриц в линейной алгебре [4, 11].

Ограничимся рассмотрением соответствующих свойств отдельно матриц $D(t_n)$ и $G(t_n)$. Для $y_n \geq 0$ неотрицательным будет $g_n = G(t_n)y_n$, если $G(t_n)$ — неотрицательная матрица, т.е. матрица с неотрицательными элементами. При $g_n \geq 0$ решение y_{n+1} уравнения $D(t_n)y_{n+1} = g_n$ будет неотрицательным, если матрица $D(t_n)$ является монотонной. Тем самым двухслойная разностная схема (40) будет монотонной, если матрица $G(t_n)$ неотрицательна, а матрица $D(t_n)$ монотонна.

Разностная схема (17) записывается в виде (40) при $D(t_n) = E+\sigma\tau A$, $G(t_n) = E-(1-\sigma)\tau A$. При стандартных ограничениях на вес $0 \leq \sigma \leq 1$ требование неотрицательности матрицы $G(t_n)$ будет выполнено при неположительности всех внедиагональных элементов

$$a_{ij} \leq 0, \quad i \neq j, \tag{41}$$

и ограничений (19) на шаг по времени.

Воспользуемся простейшим критерием монотонности матрицы: матрица со строгим диагональным преобладанием и неположительными недиагональными элементами является монотонной. Вследствие этого матрица $D(t_n)$ при любых $\tau > 0$ и ограничениях (41) будет монотонной при нестрогом диагональном преобладании по строкам (13) или столбцам (14) для матрицы A.

Таким образом, при ограничениях (13) (или (14)), (41) двухслойная схема с весами (17), (18) будет монотонна при шагах по времени, удовлетворяющих ограничениям (19). В частности, чисто неявная схема ($\sigma = 1$) будет абсолютно монотонной (при любых τ). Отметим, что на основе использования логарифмической нормы устойчивость в соответствующих пространствах доказана в несколько более слабых предположениях — без требования (41). С учетом этого устанавливается монотонность рассмотренных выше двухслойных разностных схем с направленными разностями для уравнения переноса в дивергентной и недивергентной формах при ограничениях (28) на шаг по времени. Дополнительное условие неположительности внедиагональных элементов (41) для схем с направленными разностями всегда выполнено.

Обсудим консервативность разностных схем с направленными разностями для уравнения переноса (1), (5): консервативность разностной схемы понимается (см. [1]) в смысле выполнения послойного равенства $(y_{n+1}, 1) = (y_0, 1)$, $n = 0, 1, \ldots$, обеспечивается свойством

$$(C_2 y, 1) = 0 \tag{42}$$

разностного оператора конвективного переноса в дивергентной форме. Поскольку для разностного оператора (34) свойство (42) имеет место, то при использовании смещенных сеток для задания коэффициентов конвективного переноса (аппроксимации (34)) получаем консервативную схему. Немного сложнее ситуация с разностным оператором (23), для которого (42) уже не выполнено. Но в силу ограничений (3) можем более или менее произвольно аппроксимировать нормальную компоненту переноса на границе. При использовании (23) одна такая возможность реализована. Вторая возможность подобна (33) и связана с удвоением скорости конвективного переноса на границе. В этом случае вместо (23) имеем

$$C_2 = \sum_{\alpha=1}^{2} C_2^{(\alpha)}, \quad C_2^{(\alpha)} y = \begin{cases} 2(b_-^{(\alpha)} y)_{x_\alpha}, & x_\alpha = 0, \\ (b_+^{(\alpha)} y)_{\bar{x}_\alpha} + (b_-^{(\alpha)} y)_{x_\alpha}, & h_\alpha \le x_\alpha \le l_\alpha - h_\alpha, \\ 2(b_+^{(\alpha)} y)_{\bar{x}_\alpha}, & x_\alpha = l_\alpha, \end{cases} \quad \alpha = 1, 2.$$

Для такого оператора конвективного переноса уже выполнено свойство (42), т. е. соответствующие схемы консервативны.

Проведенный анализ позволил выделить класс основных аппроксимаций операторов конвективного переноса. Как при использовании центральноразностных аппроксимаций, так и при применении направленных аппроксимаций нужно ориентироваться на задание коэффициентов конвективного переноса на смещенных сетках. В этом случае достигается согласованность аппроксимаций операторов конвективного переноса в различных формах, что обеспечивает устойчивость разностных схем в соответствующих нормах с постоянными ϱ-устойчивости, согласованными с дифференциальной задачей. Кроме того, при таких аппроксимациях имеет место консервативность разностных схем.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 98 — 01 — 00335 и 99 — 01 — 00958).

Литература

1. *Самарский А. А., Вабищевич П. Н.* // Дифференц. уравнения. 1998. Т. 34, № 12. С. 1675 — 1685.
2. *Самарский А. А.* Теория разностных схем. М., 1989.
3. *Самарский А. А., Гулин А. В.* Устойчивость разностных схем. М., 1973.
4. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. М., 1988.
5. *Dekker K., Verwer J. G.* Stability of Runge-Kutta Methods for Stiff Nonlinear Differential Equations. Amsterdam, 1984.
6. *Hairer E., Norsett S. P., Wanner G.* Solving Ordinary Differential Equations. I. Nonstiff Problems. Berlin, 1987.
7. *Вабищевич П. Н., Самарский А. А.* // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 1997. Т. 37, № 2. С. 182 — 186.
8. *Вабищевич П. Н., Самарский А. А.* Численные методы решения задач конвекции-диффузии. М., 1999.
9. *Desoer C., Haneda H.* // IEEE Trans. Circuit Theory. 1972. Vol. 19. P. 480 — 486.
10. *Масленникова В. Н., Боговский М. Е.* // Докл. РАН. 1994. Т. 339. С. 446 — 450.
11. *Horn R. A., Johnson C. R.* Matrix Analysi. Cambridge, 1986.

Институт математического моделирования РАН,
г. Москва

Поступила в редакцию
1 марта 2000 г.