ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 2000, том 370, № 4, с. 445–448

МАТЕМАТИКА

УДК 519.63

МОНОТОННЫЕ РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ СО СМЕШАННЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

© 2000 г. Академик А. А. Самарский, В. И. Мажукин, П. П. Матус, М. М. Чуйко

Поступило 01.10.99 г.

В настоящей работе на основе комбинации двух известных разностных схем второго порядка аппроксимации [1] построены схемы, удовлетворяющие принципу максимума при произвольных знакопеременных коэффициентах. Такие схемы принято называть монотонными. Для этих алгоритмов получены априорные оценки устойчивости в сильной норме C. Отметим, что уравнения со смешанными производными возникают при рассмотрении вычислительных методов для классических уравнений (Лапласа, Пуассона и др.) на произвольных неортогональных сетках. Вследствие этого полученные результаты могут быть применены к построению эффективных вычислительных методов на адаптивных сетках. Кроме того, они могут послужить теоретической основой для обоснования вопросов устойчивости и сходимости хорошо известного метода динамической адаптации [2].

1. РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ СО ЗНАКОПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

В прямоугольнике $\overline{G} = \{0 \le x_\alpha \le l_\alpha, \alpha = 1, 2\}$ с границей Γ рассмотрим задачу Дирихле для эллиптического уравнения, содержащего смешанные производные:

$$Lu = -f(x), \quad x \in G, \quad u = \mu(x), \quad x \in \Gamma, \quad x = (x_1, x_2), \tag{1}$$

$$Lu = \sum_{\alpha,\beta=1}^{2} L_{\alpha\beta}u, \quad L_{\alpha\beta}u = \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_{\alpha\beta}\frac{\partial u}{\partial x_\beta}\right). \tag{2}$$

Предполагаются выполненными следующие условия эллиптичности:

$$c_1\sum_{\alpha=1}^{2}\xi_\alpha^2 \le \sum_{\alpha,\beta=1}^{2} k_{\alpha\beta}(x)\xi_\alpha\xi_\beta \le c_2\sum_{\alpha=1}^{2}\xi_\alpha^2, \quad x \in G, \tag{3}$$

где $c_1 > 0$, $c_2 > 0$ – постоянные, а $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ – любой вектор. Из (3), в частности, следует, что

$$0 < c_1 \le k_{\alpha\alpha} \le c_2, \quad \alpha = 1, 2, \quad k_{11}k_{22} - k_{12}k_{21} \ge c_1^2.$$

В прямоугольнике G построим равномерную сетку $\overline{\omega}_h = \omega_h \cup \gamma_h$, $\omega_h = \{x_i = (x_1^{(i_1)}, x_2^{(i_2)}), i_\alpha = 0, 1, \ldots, N_\alpha - 1, x_\alpha^{0} = 0, x_\alpha^{N_\alpha} = l_\alpha, \alpha = 1, 2\}$ с постоянными шагами $h_1 = x_1^{(i_1)} - x_1^{(i_1-1)}$, $h_2 = x_2^{(i_2)} - x_2^{(i_2-1)}$, γ_h – множество граничных узлов. На сетке ω_h введем сеточные операторы

$$\Lambda_{\alpha\alpha}y = (a_{\alpha\alpha}y_{\bar{x}_\alpha})_{x_\alpha} = \frac{a_{\alpha\alpha}^{(+1_\alpha)}(y^{(+1_\alpha)} - y) - a_{\alpha\alpha}(y - y^{(-1_\alpha)})}{h_\alpha^2},$$

$$\Lambda_{\alpha\beta}^{-}y = 0.5((k_{\alpha\beta}y_{\bar{x}_\beta})_{x_\alpha} + (k_{\alpha\beta}y_{x_\beta})_{\bar{x}_\alpha}),$$

$$\alpha, \beta = 1, 2, \quad \alpha \ne \beta,$$

$$\Lambda_{\alpha\beta}^{+}y = 0.5((k_{\alpha\beta}y_{x_\beta})_{x_\alpha} + (k_{\alpha\beta}y_{\bar{x}_\beta})_{\bar{x}_\alpha}),$$

$$\alpha, \beta = 1, 2, \quad \alpha \ne \beta,$$

$$a_{\alpha\alpha} = 0.5(k_{\alpha\alpha}(x_\alpha, x_{3-\alpha}) + k_{\alpha\alpha}(x_\alpha - h_\alpha, x_{3-\alpha})),$$

$$v^{(\pm1_\alpha)} = v(x_\alpha \pm h_\alpha, x_{3-\alpha}).$$

В вычислительной практике при аппроксимации уравнения (1) используются следующие разностные схемы второго порядка локальной аппроксимации [1]:

$$\Lambda^{-}y = -\varphi, \quad x \in \omega_h, \quad y = \mu(x), \quad x \in \gamma_h, \tag{4}$$

$$\Lambda^{+}y = -\varphi, \quad x \in \omega_h, \quad y = \mu(x), \quad x \in \gamma_h, \tag{5}$$

где $\Lambda^{-} = \Lambda_{11} + \Lambda_{12}^{-} + \Lambda_{21}^{-} + \Lambda_{22}$, $\Lambda^{+} = \Lambda_{11} + \Lambda_{12}^{+} + \Lambda_{21}^{+} + \Lambda_{22}$.

Институт математического моделирования Российской Академии наук, Москва

Институт математики Академии наук Беларуси, Минск

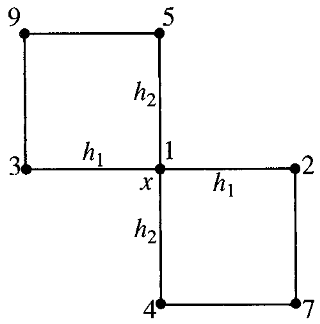

Рис. 1. Шаблон схемы (4).

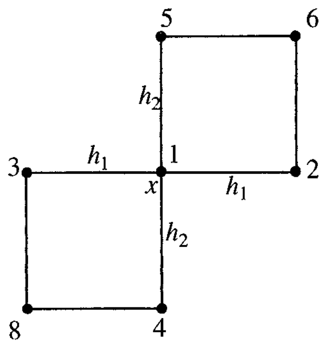

Рис. 2. Шаблон схемы (5).

Для применения принципа максимума схемы (4), (5) следует привести к каноническому виду [1]

$$A(x)y(x) = \sum_{\xi \subset Ш'(x)} B(x, \xi)y(\xi) + F(x), \quad x \in \omega_h, \quad (6)$$

и проверить следующие достаточные условия на коэффициенты

$$A(x) > 0, \quad B(x, \xi) > 0,$$

$$D(x) = A(x) - \sum_{\xi \in Ш'(x)} B(x, \xi) \geq 0, \quad x \in \omega_h.$$

Здесь $Ш'(x) = Ш(x) \backslash \{x\}$, $Ш(x)$ – шаблон схемы.

Узлы шаблона пронумеруем согласно рис. 1, 2. Тогда для схемы (4) будем иметь

$$\sum_{\xi \in Ш'(x)} B(x, \xi) = \sum_{k=2}^{5} \overset{k}{B}{}^{-} + \overset{7}{B}{}^{-} + \overset{9}{B}{}^{-},$$

соответственно для схемы (5)

$$\sum_{\xi \in Ш'(x)} B(x, \xi) = \sum_{k=2}^{6} \overset{k}{B}{}^{+} + \overset{8}{B}{}^{+}.$$

Выпишем значения коэффициентов $\overset{k}{B}{}^{\pm}$:

$$\overset{m}{B}{}^{-} = \frac{\overset{1}{k}_{11} + \overset{m}{k}_{11}}{2h_1^2} + \frac{\overset{1}{k}_{21} + \overset{m}{k}_{12}}{2h_1h_2},$$

$$\overset{m}{B}{}^{+} = \frac{\overset{1}{k}_{11} + \overset{m}{k}_{11}}{2h_1^2} - \frac{\overset{1}{k}_{21} + \overset{m}{k}_{12}}{2h_1h_2}, \quad m = 2, 3,$$

$$\overset{m}{B}{}^{-} = \frac{\overset{1}{k}_{22} + \overset{m}{k}_{22}}{2h_2^2} + \frac{\overset{1}{k}_{12} + \overset{m}{k}_{21}}{2h_1h_2},$$

$$\overset{m}{B}{}^{+} = \frac{\overset{1}{k}_{22} + \overset{m}{k}_{22}}{2h_2^2} - \frac{\overset{1}{k}_{12} + \overset{m}{k}_{21}}{2h_1h_2}, \quad m = 4, 5,$$

$$\overset{7}{B}{}^{-} = -\frac{\overset{2}{k}_{12} + \overset{4}{k}_{21}}{2h_1h_2}, \quad \overset{6}{B}{}^{+} = \frac{\overset{2}{k}_{12} + \overset{5}{k}_{21}}{2h_1h_2},$$

$$\overset{9}{B}{}^{-} = -\frac{\overset{3}{k}_{12} + \overset{5}{k}_{21}}{2h_1h_2}, \quad \overset{8}{B}{}^{+} = \frac{\overset{3}{k}_{12} + \overset{4}{k}_{21}}{2h_1h_2},$$

$$A^{-} = k + \frac{\overset{1}{k}_{11}}{h_1^2} + \frac{\overset{1}{k}_{12} + \overset{1}{k}_{21}}{h_1h_2} + \frac{\overset{1}{k}_{22}}{h_2^2},$$

$$k = \frac{\overset{2}{k}_{11} + \overset{3}{k}_{11}}{2h_1^2} + \frac{\overset{4}{k}_{22} + \overset{5}{k}_{22}}{2h_2^2} > 0,$$

$$A^{+} = k + \frac{\overset{1}{k}_{11}}{h_1^2} - \frac{\overset{1}{k}_{12} + \overset{1}{k}_{21}}{h_1h_2} + k_{22}.$$

Пользуясь условием эллиптичности (3) и полагая $\xi^- = \left(\frac{1}{h_1}, \frac{1}{h_2}\right)$, $\xi^+ = \left(-\frac{1}{h_1}, \frac{1}{h_2}\right)$, убеждаемся в положительности коэффициентов A^-, A^+. Из структуры коэффициентов $\overset{m}{B}{}^{-}$, $\overset{m}{B}{}^{+}$ видно, что разностную схему (4) следует применять при отрицательных коэффициентах $k_{\alpha\beta}$, $\alpha \neq \beta$, а схему (5) – при положительных.

Т е о р е м а 1. *Пусть при всех $x \in \omega_h$ выполнены условия положительности коэффициентов $\overset{m}{B}{}^{\pm}$, $m = 2, 3, 4, 5$:*

$$\max_{m = 4, 5} \frac{|\overset{1}{k}_{12} + \overset{m}{k}_{21}|}{\overset{1}{k}_{22} + \overset{m}{k}_{22}} \leq \frac{h_1}{h_2} \leq \min_{m = 2, 3} \frac{\overset{1}{k}_{11} + \overset{m}{k}_{11}}{|\overset{1}{k}_{21} + \overset{m}{k}_{12}|}. \quad (7)$$

Тогда при $k_{\alpha\beta}(x) \leq 0$, $\alpha \neq \beta$, разностная схема (4) (*а при $k_{\alpha\beta}(x) \geq 0$ – разностная схема* (5)) *устойчива* *по правой части, граничным условиям и имеет место оценка*

$$\|y\|_C \le 0.25(l_1^2 + l_2^2)\|\varphi\|_C + \|\mu\|_{C_\gamma}, \tag{8}$$

где

$$\|y\|_C = \max_{x \in \omega_h} |y(x)|, \quad \|\mu\|_{C_\gamma} = \max_{x \in \gamma_h} |\mu(x)|.$$

Доказательство теоремы проводится стандартным образом [3].

Замечание 1. Если матрица коэффициентов уравнения (1) имеет диагональное преобладание по строкам и столбцам: $k_{\alpha\alpha} \ge |k_{\alpha\beta}|$, $\alpha, \beta = 1, 2$, $\alpha \ne \beta$, то в (7) можно положить $h_1 = h_2 = h$, т.е. условия (7) в этом случае всегда выполнены.

2. РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ СО ЗНАКОПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

В данном пункте будем рассматривать краевую задачу (1) с недивергентным оператором L вида

$$Lu = k_{11}\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + 2k_{12}\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} + k_{22}\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \tag{9}$$

и знакопеременными коэффициентами $k_{12}(x)$.

Дифференциальную задачу (1), (9) аппроксимируем монотонной разностной схемой второго порядка локальной аппроксимации $O(h_1^2 + h_2^2)$ вида

$$\Lambda y = -\varphi, \quad x \in \omega_h, \quad y = \mu(x), \quad x \in \gamma_h, \tag{10}$$

в которой

$$\Lambda y = k_{11}y_{\bar{x}_1 x_1} + k_{12}^+\Lambda_{12}^+ y + k_{12}^-\Lambda_{12}^- y + k_{22}y_{\bar{x}_2 x_2}, \tag{11}$$

$$k_{12}^+ = 0.5(k_{12} + |k_{12}|) \ge 0, \quad \Lambda_{12}^+ = y_{\bar{x}_1\bar{x}_2} + y_{x_1 x_2}, \tag{12}$$

$$k_{12}^- = 0.5(k_{12} - |k_{12}|) \le 0, \quad \Lambda_{12}^- = y_{\bar{x}_1 x_2} + y_{x_1\bar{x}_2}. \tag{13}$$

Шаблон схемы (10)–(13) в общем случае является 9-точечным (рис. 3).

Разностная схема (10) записывается в каноническом виде (6) с коэффициентами

$$\overset{2}{B} = \overset{3}{B} = \frac{k_{11}}{h_1^2} - \frac{|k_{12}|}{h_1 h_2}, \quad \overset{4}{B} = \overset{5}{B} = \frac{k_{22}}{h_2^2} - \frac{|k_{12}|}{h_1 h_2},$$

$$\overset{6}{B} = \overset{8}{B} = \frac{2k_{12}^+}{h_1 h_2} \ge 0, \quad \overset{7}{B} = \overset{9}{B} = -\frac{2k_{12}^-}{h_1 h_2} \ge 0, \tag{14}$$

$$A(x) = \sum_{m=1}^{9} \overset{m}{B}.$$

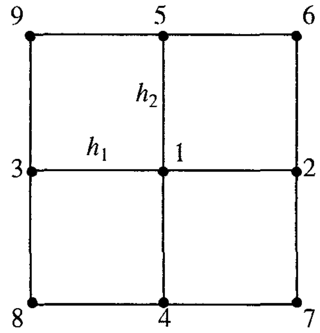

Рис. 3. Шаблон схемы (10).

Очевидно, что все коэффициенты (14) являются положительными при любом $x \in G$ и

$$\frac{|k_{12}|}{k_{22}} \le \frac{h_1}{h_2} \le \frac{k_{11}}{|k_{12}|}. \tag{15}$$

Следовательно, если шаги сетки h_1, h_2 удовлетворяют соотношениям (15), то схема (10)–(13) является монотонной и для ее решения имеет место априорная оценка (8). К сожалению, непосредственно монотонных разностных схем для дивергентных (консервативных) уравнений (1), (2) в случае знакопеременных коэффициентов при смешанных производных построить не удается. Чтобы приведенные выше результаты имели законченный характер, необходимо также рассмотреть задачи с наличием младших производных.

3. РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ОБЩЕГО ВИДА

Вновь рассмотрим дифференциальную задачу (1) с оператором

$$Lu = \sum_{\alpha=1}^{2}\left(k_{\alpha\alpha}\frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha^2} + k_\alpha\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right) +$$

$$+ 2k_{12}\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} - q(x)u, \tag{16}$$

где $|k_\alpha| \le c_3$, $q(x) \ge 0$, а коэффициенты $k_{\alpha\beta}$ удовлетворяют требованию эллиптичности (3). Для построения соответствующих монотонных схем воспользуемся идеей А.А. Самарского [1, с. 184]. Входящие в (16) производные на неравномерной сетке ω_h заменим конечно-разностными соотношениями

$$k_{\alpha\alpha}\frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha^2} + k_\alpha\frac{\partial u}{\partial x_\alpha} =$$

$$= \frac{k_{\alpha\alpha}}{1 + R_\alpha}u_{\bar{x}_\alpha x_\alpha} + k_\alpha^+ u_{x_\alpha} + k_\alpha^- u_{\bar{x}_\alpha} + O(h_\alpha^2),$$

$$R_\alpha = \frac{0.5|k_\alpha|h_\alpha}{k_{\alpha\alpha}}, \quad k_\alpha^\pm = 0.5(k_\alpha \pm |k_\alpha|),$$

$$2k_{12}\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} = k_{12}^+\Lambda_{12}^+ u + k_{12}^-\Lambda_{12}^- u + O(h_1^2 + h_2^2).$$

В результате получим следующую разностную схему второго порядка локальной аппроксимации:

$$\sum_{\alpha=1}^{2}\left(\frac{k_{\alpha\alpha}}{1+R_\alpha}y_{\bar{x}_\alpha x_\alpha} + k_\alpha^+ y_{x_\alpha} + k_\alpha^- y_{\bar{x}_\alpha}\right) +$$

$$+ k_{12}^+\Lambda_{12}^+ y + k_{12}^-\Lambda_{12}^- y - dy = \varphi,$$

$$x \in \omega_h, \quad y = \mu(x), \quad x \in \gamma_h.$$

Здесь d, φ – некоторые шаблонные функционалы [1], которые, в частности, могут быть взяты в виде

$$d(x) = q(x), \quad \varphi(x) = f(x), \quad x \in \omega_h.$$

Для того чтобы схема (16) была монотонной и удовлетворяла принципу максимума, достаточно потребовать выполнения условия

$$\frac{|k_{12}|(1+R_2)}{k_{22}} \le \frac{h_1}{h_2} \le \frac{k_{11}}{|k_{12}|(1+R_1)}.$$

З а м е ч а н и е 2. Полученные выше результаты естественным образом обобщаются на трехмерные задачи и многомерные параболические уравнения со смешанными производными. Подробному изложению этих результатов будет посвящена отдельная работа.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Самарский А.А.* Теория разностных схем. М.: Наука, 1977.
2. *Дарьин Н.А., Мажукин В.И., Самарский А.А.* // ДАН. 1988. Т. 302. № 5. С. 1078–1081.
3. *Вабищевич П.Н., Матус П.П., Самарский А.А.* // ЖВМиМФ. 1998. Т. 38. № 3. С. 413–424.