ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 2000, том 371, № 6, с. 742–746

МАТЕМАТИКА

УДК 519.63

МОНОТОННЫЕ РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ НА ТРЕУГОЛЬНЫХ СЕТКАХ

© 2000 г. Академик А. А. Самарский, П. Н. Вабищевич

Поступило 16.12.99 г.

Свойство монотонности мы связываем с выполнением принципа максимума для разностных уравнений [1]. При использовании регулярных прямоугольных сеток наиболее просто строятся безусловно монотонные схемы с направленными разностями. Для задач конвекции–диффузии известны (см., например, [2, 3]) различные типы безусловно монотонных разностных схем второго порядка. Наиболее общий подход к их построению связан с применением принципа регуляризации разностных схем [4] и основан на фактическом переходе к схемам первого порядка в области нарушения монотонности.

Для уравнения переноса при численном решении задач механики сплошной среды широко используются нелинейные монотонные схемы. В схемах TVD безусловная монотонность достигается за счет нелинейного ограничения потоков в исходной схеме с центральными разностями второго порядка [5]. В нашей работе [6] нелинейные монотонные схемы для недивергентного уравнения переноса построены с привлечением принципа регуляризации разностных схем с минимальным набором регуляризирующих параметров.

В настоящем сообщении строятся монотонные аппроксимации конвективного переноса с использованием направленных разностей на произвольной неструктурированной сетке. Для заданного набора узлов формируется триангуляция Делоне, а сами разностные схемы строятся интегроинтерполяционным методом (методом баланса). В качестве контрольного объема выступают многоугольники Вороного. На основе принципа регуляризации предлагаются безусловно монотонные схемы для задач конвекции–диффузии, подобные тем, что рассматривались на прямоугольных сетках [7]. Для задач с доминированием конвективного переноса над диффузионным построены нелинейные монотонные схемы.

1. Для содержательного обсуждения вопросов построения монотонных разностных схем будем рассматривать уравнения конвекции–диффузии в недивергентной

$$\sum_{\alpha=1}^{2} v^{(\alpha)}(\mathbf{x})\frac{\partial u}{\partial x^{(\alpha)}} - \sum_{\alpha=1}^{2}\frac{\partial}{\partial x^{(\alpha)}}\left(k(\mathbf{x})\frac{\partial u}{\partial x^{(\alpha)}}\right) = f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \tag{1}$$

или же в дивергентной

$$\sum_{\alpha=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x^{(\alpha)}}(v^{(\alpha)}(\mathbf{x})u) - \sum_{\alpha=1}^{2}\frac{\partial}{\partial x^{(\alpha)}}\left(k(\mathbf{x})\frac{\partial u}{\partial x^{(\alpha)}}\right) = f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \tag{2}$$

формах. Дополним эти уравнения однородными краевыми условиями первого рода

$$u(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega. \tag{3}$$

Для эллиптических уравнений, записанных в недивергентной форме (1), выполнен принцип максимума (см., например, [8]). Наиболее важные особенности, связанные с уравнением конвекции–диффузии в дивергентной форме, обсуждаются в [9]. Для разностных аналогов краевых задач (1), (3) и (2), (3) строятся различные классы монотонных разностных схем [1, 9] при использовании стандартных прямоугольных сеток. Здесь мы рассмотрим вопросы построения монотонных разностных схем для краевых задач конвекции–диффузии на общих треугольных сетках.

Введем некоторые обозначения. Для простоты изложения мы ограничились рассмотрением двухмерных задач, переход к трехмерным задачам носит в значительной степени редакционный характер. Пусть $\mathbf{x} = (x^{(1)}, x^{(2)})$ и Ω есть выпуклый многоугольник с границей $\partial\Omega$. В области $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$ введена сетка $\bar{\omega}$, состоящая из узлов $\mathbf{x}_i$, $i = 1, 2, \ldots, M$, причем углы многоугольника Ω являются узлами. Пусть ω – множество внутренних, а $\partial\omega$ – множество граничных узлов ($\omega = \bar{\omega} \cap \Omega$, $\partial\omega = \bar{\omega} \cap \partial\Omega$).

С каждым узлом $\mathbf{x}_i$, $i = 1, 2, \ldots, M$, свяжем контрольный объем Ω_i как определенную часть расчетной области. В качестве контрольного объема выбираются многоугольники Вороного или их часть, принадлежащая Ω. С каждой из вершин многоугольника Вороного связывается треугольник, построенный по соответствующим узлам контак-

Институт математического моделирования Российской Академии наук, Москва

тирующих многоугольников Вороного. Эти треугольники определяют триангуляцию Делоне [10].

Контрольные объемы покрывают всю расчетную область, так что

$$\bar{\Omega} = \bigcup_{i=1}^{M} \bar{\Omega}_i, \quad \bar{\Omega}_i = \Omega_i \cup \partial\Omega_i, \quad \Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset,$$
$$i \neq j, \quad i, j = 1, 2, \ldots, M.$$

Для общих граней контрольных объемов используем обозначения

$$\partial\Omega_i \cap \partial\Omega_j = \Gamma_{ij}, \quad i \neq j, \quad j = 1, 2, \ldots, M.$$

Для узла i определим множество соседних узлов $\mathcal{W}(i)$, для которых контрольные объемы имеют общие грани с контрольным объемом для узла i, т.е.

$$\mathcal{W}(i) = \{j | \ \partial\Omega_i \cap \partial\Omega_j \neq \emptyset, j = 1, 2, \ldots, M\},$$
$$i = 1, 2, \ldots, M.$$

Введем также обозначения

$$V_i = \int_{\Omega_i} d\mathbf{x}, \quad l_{ij} = \int_{\Gamma_{ij}} d\mathbf{x}, \quad i, j = 1, 2, \ldots, M,$$

для площади контрольного объема и длины ребра многоугольника Вороного соответственно.

2. Аппроксимацию проведем с использованием интегроинтерполяционного метода (метода баланса) [1, 11]. В качестве основной используется треугольная сетка (триангуляция) Делоне, когда контрольным объемом для внутренних узлов является соответствующий многоугольник Вороного [12, 13].

Для оператора диффузионного переноса

$$\mathcal{D}u = -\sum_{\alpha=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x^{(\alpha)}}\left(k(\mathbf{x})\frac{\partial u}{\partial x^{(\alpha)}}\right) \tag{4}$$

основной [13] является аппроксимация

$$(Dy)_i = -\frac{1}{V_i}\sum_{j \in \mathcal{W}(i)} l_{ij}k(\mathbf{x}_{ij})\frac{y_j - y_i}{d(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j)}, \quad \mathbf{x}_i \in \omega. \tag{5}$$

При аппроксимации оператора конвективного переноса в дивергентной форме

$$\mathcal{C}_2 u = \sum_{\alpha=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x^{(\alpha)}}(v^{(\alpha)}(\mathbf{x})u) \tag{6}$$

стандартной является аппроксимация

$$(C_2 y)_i = \frac{1}{V_i}\sum_{j \in \mathcal{W}(i)} l_{ij}b_{ij}\frac{y_j + y_i}{2}, \quad \mathbf{x}_i \in \omega. \tag{7}$$

Для нормальных компонент скорости на каждой грани многоугольника Вороного используется выражение

$$b_{ij} = (\mathbf{v}, \mathbf{n})(\mathbf{x}_{ij}),$$

где $\mathbf{n}$ – внешняя нормаль.

На равномерных прямоугольных сетках (7) соответствует использованию обычных центрально-разностных аппроксимаций. По сравнению с аппроксимациями направленными разностями в этом случае можно рассчитывать на большую точность. Однако при этом не всегда для разностного решения выполнен принцип максимума, т.е. схемы с центрально-разностными аппроксимациями не всегда являются монотонными. При построении безусловно монотонных схем необходимо ориентироваться на применение схем с направленными разностями.

Выделим положительную и отрицательную составляющие нормальной компоненты скорости, положив

$$b_{ij} = b_{ij}^{+} + b_{ij}^{-},$$

где

$$b_{ij}^{+} = \frac{1}{2}(b_{ij} + |b_{ij}|),$$
$$b_{ij}^{-} = \frac{1}{2}(b_{ij} - |b_{ij}|).$$

При аппроксимации правой части

$$C_2 u = (C_2 u)_i \approx \frac{1}{V_i}\int_{\Omega_i} \mathcal{C}_2 u \, d\mathbf{x}$$

будем использовать значение сеточной функции либо в центральном, либо в периферийном узле в зависимости от знака скорости. Это приводит к разностному оператору конвективного переноса в виде

$$(C_2 y)_i = \frac{1}{V_i}\sum_{j \in \mathcal{W}(i)} l_{ij}(b_{ij}^{-} y_j + b_{ij}^{+} y_i), \quad \mathbf{x}_i \in \omega. \tag{8}$$

Наиболее просто аппроксимация оператора конвективного переноса в недивергентной форме

$$\mathcal{C}_2 u = \sum_{\alpha=1}^{2} v^{(\alpha)}(\mathbf{x})\frac{\partial u}{\partial x^{(\alpha)}} \tag{9}$$

проводится на основе использования разностного аналога соотношения

$$\mathcal{C}_1 u = \mathcal{C}_2 u - \operatorname{div}\mathbf{v}u. \tag{10}$$

Для разностного оператора дивергенции положим [13]

$$\mathrm{div}_h \mathbf{v} = \frac{1}{V_i} \sum_{j \in \mathcal{W}(i)} l_{ij} b_{ij}, \quad \mathbf{x}_i \in \omega. \qquad (11)$$

Из (см. (10))

$$C_1 y = C_2 y - \mathrm{div}_h \mathbf{v} y \qquad (12)$$

для разностного аналога (9) имеем выражение

$$(C_1 y)_i = \frac{1}{V_i} \sum_{j \in \mathcal{W}(i)} l_{ij} b_{ij}^- (y_j - y_i), \quad \mathbf{x}_i \in \omega. \qquad (13)$$

Тем самым получены аппроксимации (8) и (13) операторов конвективного переноса в дивергентной (6) и недивергентной (9) формах направленными разностями. Причем эти аппроксимации согласованы в смысле выполнения равенства (12).

3. Краевым задачам (1), (3) и (2), (3) поставим в соответствие разностные задачи

$$Cy + Dy = \varphi(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \omega, \qquad (14)$$

для сеточных функций $y(\mathbf{x}) = 0$, $\mathbf{x} \in \partial\omega$. Для правых частей (14) положим, например,

$$\varphi(\mathbf{x}) = \frac{1}{V_i} \int_{\Omega_i} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad \mathbf{x} \in \omega.$$

Для того чтобы воспользоваться результатами о выполнении принципа максимума на сеточном уровне [1], запишем разностные задачи (14) в виде

$$\alpha_i y_i - \sum_{j \in \mathcal{W}(i)} \beta_{ij} y_j = \phi_i, \quad \mathbf{x}_i \in \omega, \qquad (15)$$

$$y_i = 0, \quad \mathbf{x} \in \partial\omega. \qquad (16)$$

Будем считать, что $\bar{\omega}$ является связной сеткой.

Для разностной задачи (15), (16) справедлив принцип максимума, т.е. разностная схема монотонна, при выполнении [1] условий

$$\alpha_i > 0, \quad \beta_{ij} > 0, \quad j \in \mathcal{W}(i), \qquad (17)$$

$$\delta_i \equiv \alpha_i - \sum_{j \in \mathcal{W}(i)} \beta_{ij} \ge 0, \quad \mathbf{x}_i \in \omega. \qquad (18)$$

Разностная схема (14) для задачи (1), (3) при использовании аппроксимаций (5) и (13) записывается в виде (15), (16) с коэффициентами

$$\alpha_i = -\frac{1}{V_i} \sum_{j \in \mathcal{W}(i)} l_{ij} b_{ij}^- + \frac{1}{V_i} \sum_{j \in \mathcal{W}(i)} l_{ij} k(\mathbf{x}_{ij}) \frac{1}{d(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j)},$$

$$\beta_{ij} = -\frac{1}{V_i} l_{ij} b_{ij}^- + \frac{1}{V_i} k(\mathbf{x}_{ij}) \frac{l_{ij}}{d(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j)}, \quad j \in \mathcal{W}(i),$$

$$\delta_i = 0, \quad \mathbf{x}_i \in \omega.$$

Условия монотонности (17), (18) безусловно выполнены.

Для задачи (2), (3) при использовании аппроксимаций (5) и (8) имеем

$$\alpha_i = \frac{1}{V_i} \sum_{j \in \mathcal{W}(i)} l_{ij} b_{ij}^+ + \frac{1}{V_i} \sum_{j \in \mathcal{W}(i)} l_{ij} k(\mathbf{x}_{ij}) \frac{1}{d(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j)},$$

$$\beta_{ij} = -\frac{1}{V_i} l_{ij} b_{ij}^- + \frac{1}{V_i} k(\mathbf{x}_{ij}) \frac{l_{ij}}{d(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j)}, \quad j \in \mathcal{W}(i),$$

$$\delta_i = \mathrm{div}_h \mathbf{v}, \quad \mathbf{x}_i \in \omega.$$

Тем самым стандартные условия монотонности (17), (18) будут выполнены только при $\mathrm{div}_h \mathbf{v} \ge 0$.

Аналогичная ситуация имеет место при рассмотрении разностных схем на прямоугольных сетках [4, 9]. Безусловное выполнение принципа максимума для схем с направленными разностями для уравнения (10) можно в этом случае связать с диагональным преобладанием не по строкам (как условия (17), (18)), а с диагональным преобладанием по столбцам. Вторая, более перспективная при рассмотрении разностных схем на неструктурированных сетках возможность связана с установлением принципа максимума в стандартной формулировке для сопряженной задачи [9, 14].

Рассмотрим сопряженный к C_2 оператор. Скалярное произведение для сеточных функций $y(\mathbf{x})$, $w(\mathbf{x})$, заданных в узлах $\mathbf{x} \in \bar{\omega}$ и обращающихся в нуль в граничных узлах $\mathbf{x} \in \partial\omega$, задается соотношением

$$(y, w) = \sum_{\mathbf{x}_i \in \omega} V_i y(\mathbf{x}_i) \omega(\mathbf{x}_i).$$

Принимая во внимание $l_{ij} = l_{ji}$, $b_{ij}^+ = -b_{ji}^-$, получим

$$(C_2 y, v) = \sum_{\mathbf{x}_i \in \omega} \sum_{j \in \mathcal{W}(i)} l_{ij} (b_{ij}^- y_j + b_{ij}^+ y_i) v_i =$$

$$= \sum_{\mathbf{x}_i \in \omega} \sum_{j \in \mathcal{W}(i)} l_{ij} y_i b_{ij}^+ (v_i - v_j).$$

Тем самым

$$C_2^* v = \frac{1}{V_i} \sum_{j \in \mathcal{W}(i)} l_{ij} b_{ij}^+ (v_i - v_j), \quad \mathbf{x}_i \in \omega. \qquad (19)$$

При рассмотрении сопряженной задачи

$$C_2^* v + Du = \varphi(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \omega,$$

устанавливается обычным образом безусловная выполнимость принципа максимума в стандартной формулировке. Следовательно, принцип максимума имеет место и для исходной задачи (5), (8), (14). Напомним, что речь идет о формулировке принципа максимума в следующей форме: при выполнении условий (17), (18) решение задачи (15), (16) неотрицательно (неположительно), если правая часть (15) неотрицательна (неположительна).

4. Обсудим кратко возможности построения монотонных разностных схем на основе принципа регуляризации на примере модельной задачи (1), (3). В качестве производящей (исходной, первичной) возьмем схему (14), в которой используется обычный разностный оператор конвективного переноса $C = C_1$, где

$$(C_1 y)_i = \frac{1}{V_i}\sum_{j\in\mathcal{W}(i)} l_{ij}b_{ij}\frac{y_j - y_i}{2}, \quad \mathbf{x}_i\in\omega. \qquad (20)$$

Схема (5), (14), (20) записывается в каноническом виде (15), (16) при

$$\alpha_i = -\frac{1}{2V_i}\sum_{j\in\mathcal{W}(i)} l_{ij}b_{ij} + \frac{1}{V_i}\sum_{j\in\mathcal{W}(i)} l_{ij}k(\mathbf{x}_{ij})\frac{1}{d(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j)},$$

$$\beta_{ij} = -\frac{1}{2V_i}l_{ij}b_{ij} + \frac{1}{V_i}k(\mathbf{x}_{ij})\frac{l_{ij}}{d(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j)}, \quad j\in\mathcal{W}(i),$$

$$\delta_i = 0, \quad \mathbf{x}_i\in\omega.$$

Определим локальное сеточное число Пекле

$$\mathrm{Pe}_{ij} = \frac{|b_{ij}|d(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j)}{k(\mathbf{x}_{ij})}, \quad j\in\mathcal{W}(i), \quad \mathbf{x}_i\in\omega.$$

Условия монотонности (17) приводят к ограничениям

$$\mathrm{Pe}_{ij} < 2, \quad j\in\mathcal{W}(i), \quad \mathbf{x}_i\in\omega. \qquad (21)$$

Монотонизацию схемы проведем на основе возмущения сеточных коэффициентов. Можно возмущать как коэффициент диффузии, так и компоненты скоростей. Мы ограничимся вариантом с возмущением коэффициента диффузии, записав регуляризованную схему в виде (15), (16) с

$$\alpha_i = -\frac{1}{2V_i}\sum_{j\in\mathcal{W}(i)} l_{ij}b_{ij} + $$

$$+ \frac{1}{V_i}\sum_{j\in\mathcal{W}(i)} l_{ij}(1+\rho_{ij})k(\mathbf{x}_{ij})\frac{1}{d(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j)},$$

$$\beta_{ij} = -\frac{1}{2V_i}l_{ij}b_{ij} + \frac{1}{V_i}(1+\rho_{ij})k(\mathbf{x}_{ij})\frac{l_{ij}}{d(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j)},$$

$$j\in\mathcal{W}(i), \quad \mathbf{x}_i\in\omega.$$

Сеточный коэффициент ρ_{ij} обеспечивает монотонность при

$$1 + \rho_{ij} > 1 + \frac{\mathrm{Pe}_{ij}}{2}, \quad j\in\mathcal{W}(i), \quad \mathbf{x}_i\in\omega. \qquad (22)$$

Принимая во внимание (см. (21)), что $\mathrm{Pe}_{ij} = O(h)$, для сохранения порядка аппроксимации (второго на прямоугольной сетке) выберем регуляризирующий множитель $\rho_{ij} = O(h^2)$. Из (22) следует, что достаточно положить

$$\rho_{ij} > \eta\mathrm{Pe}_{ij}^2, \quad \eta > \frac{1}{16}, \quad j\in\mathcal{W}(i), \quad \mathbf{x}_i\in\omega. \qquad (23)$$

Можно предложить и другие регуляризованные монотонные схемы, связанные с некоторыми другими возможностями [4, 9] задания сеточной функции $\rho_{ij} = O(h^2)$. Среди них отметим

$$\rho_{ij} = \frac{\mathrm{Pe}_{ij}^2}{4 + 2\mathrm{Pe}_{ij}}, \quad j\in\mathcal{W}(i), \quad \mathbf{x}_i\in\omega,$$

которая представляет аналог монотонной схемы, рассмотренной в [15].

Подобным образом строятся и безусловно монотонные разностные схемы для уравнения (2). В качестве производящей возьмем схему (5), (14) с оператором конвективного переноса

$$(C_2 y)_i = \frac{1}{V_i}\sum_{j\in\mathcal{W}(i)} l_{ij}b_{ij}\frac{y_j + y_i}{2}, \quad \mathbf{x}_i\in\omega. \qquad (24)$$

При записи схемы (5), (14), (24) в виде (15), (16) получим

$$\alpha_i = \frac{1}{2V_i}\sum_{j\in\mathcal{W}(i)} l_{ij}b_{ij} + \frac{1}{V_i}\sum_{j\in\mathcal{W}(i)} l_{ij}k(\mathbf{x}_{ij})\frac{1}{d(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j)},$$

$$\beta_{ij} = -\frac{1}{2V_i}l_{ij}b_{ij} + \frac{1}{V_i}k(\mathbf{x}_{ij})\frac{l_{ij}}{d(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j)},$$

$$j\in\mathcal{W}(i), \quad \mathbf{x}_i\in\omega.$$

Подобно задаче конвекции–диффузии с оператором конвективного переноса в недивергентной форме, регуляризацию проведем на основе возмущения коэффициента диффузии, т.е.

$$\alpha_i = \frac{1}{2V_i}\sum_{j\in\mathcal{W}(i)} l_{ij}b_{ij} + $$

$$+ \frac{1}{V_i}\sum_{j\in\mathcal{W}(i)} l_{ij}(1+\rho_{ij})k(\mathbf{x}_{ij})\frac{1}{d(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j)},$$

$$\beta_{ij} = -\frac{1}{2V_i}l_{ij}b_{ij} + \frac{1}{V_i}(1+\rho_{ij})k(\mathbf{x}_{ij})\frac{l_{ij}}{d(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j)},$$

$$j\in\mathcal{W}(i), \quad \mathbf{x}_i\in\omega.$$

При ограничениях (23) устанавливается монотонность этой схемы. Необходимо только еще раз подчеркнуть, что для исследования таких схем привлекается сопряженная задача.

5. При построении нелинейных монотонных аппроксимаций операторов конвективного переноса в недивергентной форме для задач с доминированием конвективного переноса над диффузионным будем следовать работе [6]. Монотонная схема строится на фактической записи исходной разностной схемы в виде нелинейной схемы с направленными разностями.

Будем записывать разностный оператор (20) как некий нелинейный разностный оператор типа (13). Имеем

$$(C_1y)_i = \frac{1}{V_i}\sum_{j\in\mathcal{W}(i)} l_{ij}b_{ij}\frac{y_j-y_i}{2} =$$

$$= \frac{1}{V_i}\sum_{j\in\mathcal{W}(i)} l_{ij}b_{ij}^-(y_j-y_i) + \frac{1}{V_i}\sum_{j\in\mathcal{W}(i)} l_{ij}|b_{ij}|(y_j-y_i).$$

Последнее слагаемое (см. (5)) интерпретируется как оператор диффузионного переноса со специальным коэффициентом диффузии порядка $O(h)$, равный $-|b_{ij}|d(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j)$. Приходим к формальному представлению

$$(C_1y)_i = \chi_i\frac{1}{V_i}\sum_{j\in\mathcal{W}(i)} l_{ij}b_{ij}^-(y_j-y_i), \qquad (25)$$

где нелинейный множитель

$$\chi_i = 1 + \frac{1}{V_i}\sum_{j\in\mathcal{W}(i)} l_{ij}|b_{ij}|(y_j-y_i)\times$$

$$\times\left(\frac{1}{V_i}\sum_{j\in\mathcal{W}(i)} l_{ij}b_{ij}^-(y_j-y_i)\right)^{-1}.$$

Немонотонность разностного оператора C_2, определяемого в соответствии с (20), связана с возможной неотрицательностью множителя χ_i в представлении (25). Для того чтобы получить безусловно монотонный оператор, выберем регуляризирующий множитель в виде

$$\chi_i = 1 + \frac{g_1g_2}{g_1^2+\gamma g_2^2}, \qquad (26)$$

где

$$g_1 = \frac{1}{V_i}\sum_{j\in\mathcal{W}(i)} l_{ij}b_{ij}^-(y_j-y_i),$$

$$g_2 = \frac{1}{V_i}\sum_{j\in\mathcal{W}(i)} l_{ij}|b_{ij}|(y_j-y_i).$$

При $\gamma \ge 0.25$ имеем $\chi_i \ge 0$ и поэтому нелинейный разностный оператор (25) является монотонным.

Схемы с подобной аппроксимацией конвективного переноса опробованы при решении прикладных задач тепло- и массопереноса, гидродинамики несжимаемой жидкости и доказали свою работоспособность. Здесь мы лишь отметили аналог таких аппроксимаций при использовании произвольных неструктурированных сеток.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 98–01–00335, 99–01–00958).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Самарский А.А.* Теория разностных схем. М.: Наука, 1989.
2. *Morton K.W.* Numerical Solution of Convection–Diffusion Problems. L.: Chapman & Hall, 1996.
3. *Roos H.-G., Stynes M., Tobiska L.* Numerical Methods for Singular Perturbed Differential Equations. Convection–Diffusion and Flow Problems. B.: Springer, 1995.
4. *Samarskii A.A., Vabishchevich P.N.* Computational Heat Transfer. Chichester: Wiley, 1995.
5. *Hirsch C.* Numerical Computation of Internal and External Flows. V. 2. Computational Methods for Inviscid and Viscous Flows. Chichester: Wiley, 1988.
6. *Самарский А.А., Вабищевич П.Н.* // ДАН. 1998. Т. 361. № 1. С. 21–23.
7. *Вабищевич П.Н.* // Дифференц. уравнения. 1994. Т. 30. С. 503–513.
8. *Gillbarg D., Trudinger N.* Elliptic Partial Differential Equations of Second Order. B: Springer, 1983.
9. *Самарский А.А., Вабищевич П.Н.* Численные методы решения задач конвекции–диффузии. М.: Эдиториал УРСС, 1999.
10. *George P.-L., Borouchaki H.* Delaunay Triangulation and Meshing: Application to Finite Elements. P.: Hermes, 1998.
11. *Самарский А.А.* Тр. Всесоюз. совещ. по дифференциальным уравнениям. 1958. Ереван: Изд. АН АрмССР, 1960. С. 148–160.
12. *Соловьев А.В., Соловьева Е.В., Тишкин В.Ф. и др.* // Дифференц. уравнения. 1986. Т. 22. № 7. С. 1227–1237.
13. *Самарский А.А., Вабищевич П.Н.* // ДАН. 2000. Т. 370. № 1. С. 27–30.
14. *Голант Е.И.* // ЖВМиМФ. 1978. Т. 18. С. 1162–1169.
15. *Самарский А.А.* // Там же. 1965. Т. 5. С. 548–551.