ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2000, том 40, № 6, с. 900–907

УДК 519.633.6:536.71

НЕЛИНЕЙНЫЕ РЕГУЛЯРИЗОВАННЫЕ РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ ДЛЯ МНОГОМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА[1)]

© 2000 г. П. Н. Вабищевич*, В. А. Первичко**, А. А. Самарский*, В. В. Чуданов**

(*125047 Москва, Миусская пл., 4А, ИММ РАН;

**113191 Москва, ул. Б. Тульская, 52, Ин-т проблем безопасного развития ат. энергетики РАН)

Поступила в редакцию 15.12.99 г.

Для приближенного решения начально-краевых задач для уравнения переноса широко используются разностные схемы, для которых выполнен принцип максимума, – монотонные разностные схемы. Для дивергентных уравнений известны многие нелинейные разностные схемы типа схем TVD, которые имеют повышенный (второй и более) локальный порядок аппроксимации в большей части расчетной области. Рассмотрены нелинейные монотонные разностные схемы для многомерного уравнения переноса, записанного в недивергентной (характеристической) форме. Схемы строятся на основе принципа регуляризации разностных схем. Представлены некоторые результаты по тестированию этого нового класса нелинейных монотонных схем на модельных одно- и двумерных задачах.

При численном решении многомерных нестационарных задач механики сплошной среды, и прежде всего задач газовой динамики, в качестве базового выступает линейное уравнение переноса [1]–[3]. Среди основных свойств решений начально-краевых задач для уравнения переноса выделяют выполнимость принципа максимума. Разностные схемы, которые удовлетворяют принципу максимума, называют монотонными.

Для уравнения переноса легко строятся безусловно монотонные разностные схемы первого порядка по пространству с использованием направленных разностных производных [4], [5]. Хорошо известно (см. [6]), что в классе однородных линейных схем отсутствуют схемы с порядком аппроксимации, по пространству выше первого. При численном решении задач механики сплошной среды строятся различные классы нелинейных монотонных схем, которые в основной части расчетной области имеют повышенный порядок аппроксимации – второй и выше. Среди первых исследований по построению нелинейных монотонных схем выделим работу [7].

В настоящее время большое внимание в прикладных исследованиях по механике сплошной среды уделяется разностным схемам типа TVD. Безусловная монотонность в этих и им подобных схемах достигается за счет нелинейного ограничения потоков в исходной схеме с направленными разностями второго порядка. Эти исследования инициированы в работах [8], [9], среди многих других работ в этом направлении отметим [10]–[14].

В работе [15] отмечается возможность построения монотонных однородных нелинейных разностных схем для уравнения переноса на основе регуляризации (возмущения) схемы второго порядка аппроксимации. В качестве производящей выбираются схемы со стандартными аппроксимациями первой производной второго порядка – центральными разностями и направленными разностями второго порядка, их комбинациями. Рассмотрению этих схем при приближенном решении задач для двумерного уравнения переноса посвящено данное исследование, где используются простейшие равномерные прямоугольные сетки. Представлены результаты тестирования при решении одно- и двумерных задач. В частности, расчеты выполнены для задачи, когда точное решение описывает вращение с сохранением формы. Этот тест является [16] стандартным для уравнения переноса.

1. МОДЕЛЬНАЯ ЗАДАЧА

В прямоугольнике

$$\Omega = \{\mathbf{x} | \mathbf{x} = (x_1, x_2), 0 \le x_\alpha \le l_\alpha, \alpha = 1, 2\}$$

рассматривается нестационарное уравнение переноса с конвективными слагаемыми в недивер-

[1)]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 98-01-00335, 99-01-00958).

гентной (характеристической) форме:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{\alpha=1}^{2} v_\alpha(\mathbf{x}, t)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha} = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad t > 0. \tag{1}$$

Уравнение (1) дополняется начальным условием

$$u(\mathbf{x}, 0) = u_0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega. \tag{2}$$

Граничные условия задаются на той части границы, на которой поток входит в область. Для простоты ограничимся случаем

$$(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega, \quad t > 0, \tag{3}$$

где $\mathbf{n}$ – нормаль к границе расчетной области. При ограничениях (3) на поле скоростей нет необходимости формулировать какие-либо граничные условия для однозначного определения решения задачи (1), (2).

Для задачи (1), (2) справедлив принцип максимума: $u(\mathbf{x}, t) \geq 0$, если $u_0(\mathbf{x}) \geq 0$. Кроме того, верна априорная оценка в $L_\infty(\Omega)$:

$$\|u(\mathbf{x}, t)\|_\infty \leq \|u_0(\mathbf{x})\|_\infty,$$

где

$$\|g\|_\infty = \max_{\mathbf{x} \in \Omega} |g(\mathbf{x})|.$$

Естественно ориентироваться на построение таких разностных схем, для которых эти важнейшие свойства были бы выполнены. Разностные схемы, для которых выполнен принцип максимума, называют монотонными схемами.

2. РАЗНОСТНАЯ СХЕМА С НАПРАВЛЕННЫМИ РАЗНОСТЯМИ

Свое исследование начнем с рассмотрения явной условно устойчивой и монотонной схемы первого порядка аппроксимации по времени и пространству. В прямоугольнике Ω введем равномерную (для простоты – по обеим переменным) разностную сетку с шагами h_α, $\alpha = 1, 2$. Для сеток по отдельным направлениям x_α, $\alpha = 1, 2$, используем обозначения

$$\bar{\omega}_\alpha = \partial\omega_\alpha \cup \omega_\alpha = \{x_\alpha | x_\alpha = i_\alpha h_\alpha, \quad i_\alpha = 0, 1, \ldots, N_\alpha, \quad N_\alpha h_\alpha = l_\alpha\},$$

и пусть

$$\omega_\alpha = \{x_\alpha | x_\alpha = i_\alpha h_\alpha, \quad i_\alpha = 1, 2, \ldots, N_\alpha - 1, \quad N_\alpha h_\alpha = l_\alpha\}$$

есть множество внутренних узлов.

В стандартных безындексных обозначениях теории разностных схем [3] для правой и левой разностных производных имеем

$$w_{x_\alpha} = \frac{w(x_\alpha + h_\alpha) - w(x_\alpha)}{h_\alpha}, \quad w_{\bar{x}_\alpha} = \frac{w(x_\alpha) - w(x_\alpha - h_\alpha)}{h_\alpha},$$

а центральная разностная производная определяется выражением

$$w_{\overset{\circ}{x}_\alpha} = \frac{1}{2}(w_{x_\alpha} + w_{\bar{x}_\alpha}) = \frac{w(x_\alpha + h_\alpha) - w(x_\alpha - h_\alpha)}{2h_\alpha}, \quad \alpha = 1, 2.$$

Определим дифференциальный оператор конвективного переноса с помощью соотношения

$$\mathscr{C}u = \sum_{\alpha=1}^{2} v_\alpha(\mathbf{x}, t)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}.$$

Аналогичное аддитивное представление будем использовать и для разностного оператора конвективного переноса

$$C = \sum_{\alpha=1}^{2} C_\alpha,$$

в котором C_α, $\alpha = 1, 2$, связываются с переносом по отдельным направлениям.

После дискретизации по пространственным переменным от (1) придем к дифференциально-операторному уравнению

$$dw/dt + Cw = 0, \quad C = C(t), \quad t > 0. \tag{4}$$

В соответствии с (2) положим

$$w(0) = u_0. \tag{5}$$

При решении задач для уравнения переноса обычно ориентируются на использование явных схем. Будем использовать равномерную сетку по времени с шагом $\tau > 0$, и пусть y^n – приближенное решение на момент времени $t^n = n\tau$, $n = 0, 1, \ldots$.

Простейшей является двухслойная явная схема, когда дифференциально-разностной задаче (4), (5) ставится в соответствие разностное уравнение

$$(y^{n+1} - y^n)/\tau + C(t^n)y^n = 0, \quad n = 0, 1, \ldots, \tag{6}$$

$$y^0 = u_0. \tag{7}$$

При построении схем с направленными разностями учитывается знак скорости в соответствующем направлении. Удобно использовать обозначения

$$g(x) = g^+(x) + g^-(x), \quad g^+(x) = \frac{1}{2}[g(x) + |g(x)|] \ge 0, \quad g^-(x) = \frac{1}{2}[g(x) - |g(x)|] \le 0.$$

С учетом (3) положим

$$C = \sum_{\alpha=1}^{2} C_\alpha, \quad C_\alpha y = \begin{cases} b_\alpha^+ y_{\bar{x}_\alpha} + b_\alpha^- y_{x_\alpha}, & h_\alpha \le x_\alpha \le l_\alpha - h_\alpha, \\ 0, \quad x_\alpha = 0, & x_\alpha = l_\alpha, \end{cases} \quad \alpha = 1, 2, \tag{8}$$

где, например, $b_\alpha(\mathbf{x}, t) = v_\alpha(\mathbf{x}, t)$, $\mathbf{x} \in \bar{\omega}$.

Разностная схема (6) – (8) устойчива в $L_\infty(\bar{\omega})$ при следующих ограничениях (условие Куранта) на шаг по времени:

$$\tau \le \tau_0 = \left(\sum_{\alpha=1}^{2} \max_{\mathbf{x} \in \bar{\omega}} \frac{|v_\alpha(\mathbf{x}, t)|}{h_\alpha} \right)^{-1}. \tag{9}$$

При этом для решения имеет место оценка

$$\|y^{n+1}\|_\infty \le \|u_0\|_\infty, \quad n = 0, 1, \ldots,$$

где

$$\|y(\mathbf{x})\|_\infty = \max_{\mathbf{x} \in \bar{\omega}} |y(\mathbf{x})|.$$

Разностная схема (6), (7) с центрально-разностными аппроксимациями конвективных слагаемых

$$C = \sum_{\alpha=1}^{2} C_\alpha, \quad C_\alpha y = \begin{cases} b_\alpha y_{\overset{\circ}{x}_\alpha}, & h_\alpha \le x_\alpha \le l_\alpha - h_\alpha, \\ 0, \quad x_\alpha = 0, & x_\alpha = l_\alpha, \end{cases} \quad \alpha = 1, 2, \tag{10}$$

является безусловно неустойчивой и немонотонной при всех τ. Ее потенциальное преимущество перед схемой с направленными разностями (6)–(8) связано со вторым порядком аппроксимации по пространству.

Помимо аппроксимаций (10), для конвективных слагаемых можно использовать направленные разности второго порядка аппроксимации. Не обсуждая проблемы, связанные с аппроксимациями в приграничных узлах (считая, что компоненты скорости имеют там соответствующий знак или же просто равны нулю), полагаем

$$C_\alpha y = \begin{cases} b_\alpha^+\left(y_{\bar{x}_\alpha} + \frac{h_\alpha}{2} y_{\bar{x}_\alpha \bar{x}_\alpha}\right) + b_\alpha^-\left(y_{x_\alpha} - \frac{h_\alpha}{2} y_{x_\alpha x_\alpha}\right), & h_\alpha \le x_\alpha \le l_\alpha - h_\alpha, \\ 0, \quad x_\alpha = 0, \quad x_\alpha = l_\alpha, \end{cases} \quad \alpha = 1, 2.$$

Комбинируя центрально-разностные аппроксимации, определяем разностный оператор конвективного переноса в следующем параметрическом виде:

$$C_\alpha y = b_\alpha^+\left(y_{\bar{x}_\alpha} + \frac{h_\alpha}{2}[\theta y_{\bar{x}_\alpha x_\alpha} + (1-\theta) y_{\bar{x}_\alpha \bar{x}_\alpha}]\right) + b_\alpha^-\left(y_{x_\alpha} - \frac{h_\alpha}{2}[\theta y_{\bar{x}_\alpha x_\alpha} + (1-\theta) y_{x_\alpha x_\alpha}]\right), \quad \alpha = 1, 2. \tag{11}$$

В этом случае значение $\theta = 1$ соответствует использованию центрально-разностных аппроксимаций (10), $\theta = 0$ – аппроксимаций направленными разностями второго порядка. Среди аппроксимаций второго порядка (11) отдельного упоминания заслуживает случай $\theta = 1/2$ и $\theta = 2/3$ – аппроксимации третьего порядка.

3. РЕГУЛЯРИЗОВАННЫЕ МОНОТОННЫЕ СХЕМЫ

Монотонные разностные схемы строятся [15] на основе общего методологического принципа получения разностных схем заданного качества – принципа регуляризации разностных схем [18]. При построении монотонных разностных схем проводится нелинейное возмущение коэффициентов разностной схемы. По существу, речь идет об использовании в отдельных подобластях (вне экстремумов решения) схем второго порядка аппроксимации. Это достигается комбинированием монотонных аппроксимаций первого порядка с немонотонными аппроксимациями более высокого порядка.

При построении нелинейных монотонных схем обычно (см., например, [8]–[14]) привлекаются соображения физического плана и оперируют, например, потоками, их направлениями и т.д. Фактически речь идет о том, как от одной схемы в части расчетной области перейти к другой схеме в другой части расчетной области, об интерполяции между двумя схемами. Огромное количество работ в этом направлении иллюстрирует очевидную мысль, что можно построить множество таких интерполяционных схем. В [15] идея перехода от одной схемы к другой реализована при использовании простейших математических соображений.

В нелинейной регуляризованной схеме используются аппроксимации конвективного переноса, которые имеют форму аппроксимаций направленными разностями со специальными регуляризующими множителями:

$$C_\alpha y = b_\alpha^+ \chi_\alpha^+ y_{\bar{x}_\alpha} + b_\alpha^- \chi_\alpha^- y_{x_\alpha}, \quad \alpha = 1, 2. \tag{12}$$

Принимая во внимание (11), для регуляризующих множителей будем использовать представление

$$\begin{aligned} \chi_\alpha^+ &= 1 + \frac{h_\alpha}{2} \frac{[\theta y_{\bar{x}_\alpha x_\alpha} + (1-\theta) y_{\bar{x}_\alpha \bar{x}_\alpha}] y_{\bar{x}_\alpha}}{|y_{\bar{x}_\alpha}|^2 + \gamma^2 h_\alpha^2 [\theta y_{\bar{x}_\alpha x_\alpha} + (1-\theta) y_{\bar{x}_\alpha \bar{x}_\alpha}]^2}, \\ \chi_\alpha^- &= 1 - \frac{h_\alpha}{2} \frac{[\theta y_{\bar{x}_\alpha x_\alpha} + (1-\theta) y_{x_\alpha x_\alpha}] y_{x_\alpha}}{|y_{x_\alpha}|^2 + \gamma^2 h_\alpha^2 [\theta y_{\bar{x}_\alpha x_\alpha} + (1-\theta) y_{x_\alpha x_\alpha}]^2}. \end{aligned} \tag{13}$$

Здесь $\gamma > 0$ выступает в качестве параметра регуляризации, и в предельном случае $\gamma = 0$ мы приходим к линейной аппроксимации (11) второго или третьего (при $\theta = 2/3$) порядка. Монотонность схемы (6), (7), (13) (неотрицательность регуляризующих коэффициентов $\chi_\alpha^\pm$, $\alpha = 1, 2$) обеспечивается выбором коэффициента $\gamma \geq 1/4$.

Принимая во внимание, что для положительных γ

$$\chi_\alpha \leq 1 + 1/(4\gamma),$$

приходим к следующим ограничениям на временной шаг:

$$\tau \leq \tau_0 [1 + 1/(4\gamma)]^{-1},$$

где (см. (9)) τ_0 – максимальный шаг для схемы с направленными разностями первого порядка. Тем самым при минимально допустимом значении параметра $\gamma = 1/4$ предельный шаг по времени в нелинейной монотонной схеме в два раза меньше по сравнению с обычной схемой (6)–(8).

4. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ

Исследование рассматриваемых регуляризованных схем для приближенного решения уравнения переноса проводится на простейших модельных задачах. Начнем с результатов численного решения одномерной задачи.

Рассматривается решение уравнения

$$\partial u/\partial t + \partial u/\partial x = 0, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t < T. \tag{14}$$

Начальное условие берется в виде

$$u(x, 0) = u_0(x) = \begin{cases} >0, & 0.125 < x < 0.375, \\ =0, & 0 < x \le 0.125, \quad 0.375 \le x < 1. \end{cases} \tag{15}$$

При $T = 0.5$ начальное финитное возмущение самоподобно переносится на половину длины расчетного интервала.

Тестировались следующие разностные схемы для приближенного решения рассматриваемой модельной задачи.

1. Явная разностная схема с аппроксимациями направленными разностями первого порядка (схема (6) – (8)).

2. Нелинейная монотонная схема, построенная на основе центрально-разностных аппроксимаций (схема (6), (7), (12), (13) с параметром $\theta = 1$).

3. Разностная схема, порожденная схемой с направленными разностями второго порядка аппроксимации (схема (7), (12), (13) с $\theta = 0$).

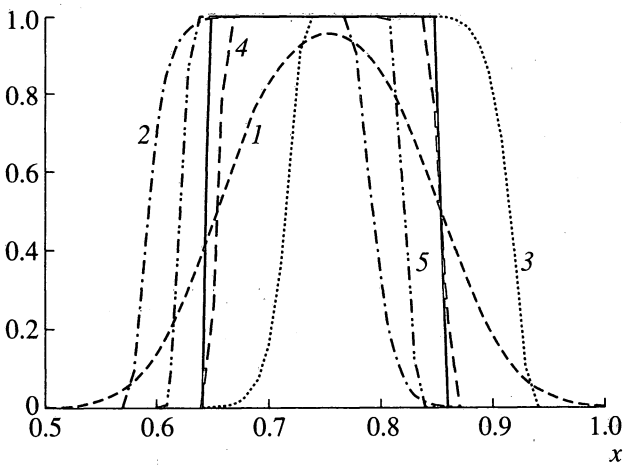
4. Разностная схема (7), (12), (13) с $\theta = 1/2$.

5. Регуляризованная схема третьего порядка аппроксимации (7), (12), (13) с параметром $\theta = 2/3$.

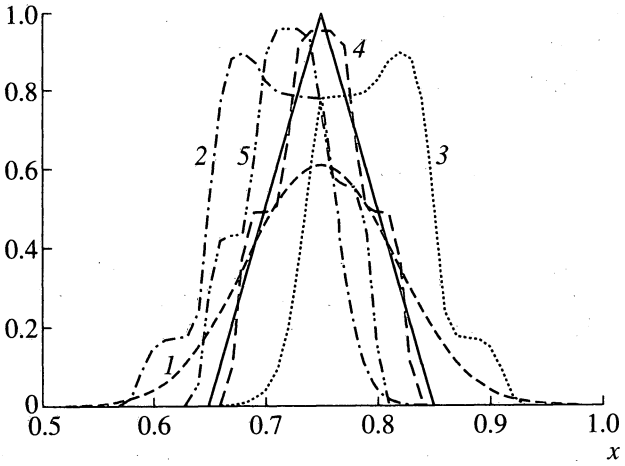
Влияние параметра возмущения (регуляризации) γ на свойства разностной схемы совершенно очевидно. В силу этого нет особой необходимости в представлении результатов специально проведенных вычислительных экспериментов, иллюстрирующих это влияние. Подобное относится и к влиянию шага сетки по времени. Поэтому ниже приведены результаты расчетов, выполненных при минимально допустимом параметре возмущения $\gamma = 1/4$ и максимальном шаге по времени $\tau = \tau_0/2$. Не имеется простых соображений в пользу того или иного однозначного выбора параметра θ.

Тестирование проведено для трех финитных функций $u_0(x)$ – прямоугольного профиля, треугольного и части функции $\sin[4\pi(x - 0.125)]$. Тем самым точное решение является разрывным в первом случае, разрывны первая (второй случай) или вторая (третий случай) производная по пространству.

На фиг. 1–3 представлены результаты расчетов по отмеченным схемам на сетке с шагом $h = 0.01$ ($N = 100$). Видно, что регуляризованные схемы (линии *2–5*) дают более точное решение по сравнению со схемой первого порядка (линии *1*). Какого-либо преимущества схемы с локальным третьим порядком (линии *5*, $\theta = 2/3$) не наблюдается. Различные величины параметра θ приводят к тому, что профиль перемещается с меньшей или большей скоростью, чем для точного решения задачи (14), (15). Тем самым параметр θ связывается с дисперсионными характеристиками разностной схемы. В этом плане оптимально значение $\theta = 1/2$ (линии *4*). Имеются и другие соображения в пользу такого выбора. Поэтому в дальнейшем приводятся результаты расчетов с $\theta = 1/2$.



Фиг. 1.



Фиг. 2.

Влияние расчетной сетки представлено на фиг. 4–6, где приведены результаты расчетов на последовательности расчетных сеток $N = 100, 200, 400, 800$ для тех же начальных условий, что и на фиг. 1–3. Используется регуляризованная схема с параметром $\theta = 1/2$. Из приведенных расчетов можно сделать вывод о том, что используемая схема хорошо передает разрывные решения. Для гладких профилей наблюдается локальное обострение фронта.

Проведено масштабное тестирование регуляризованных разностных схем при решении двумерных задач. Приведем некоторые типичные результаты для стандартного (см., например, [16]) двумерного теста. Решается уравнение переноса (1), которое имеет самоподобное решение в виде вращающегося вокруг оси начального профиля.

В единичном квадрате $\Omega(l_\alpha = 1, \alpha = 1, 2)$ поле скоростей определяется компонентами

$$v_1 = 2\pi(x_2 - 1/2), \quad v_2 = -2\pi(x_1 - 1/2).$$

Решение уравнения (1) при этом представляется в виде

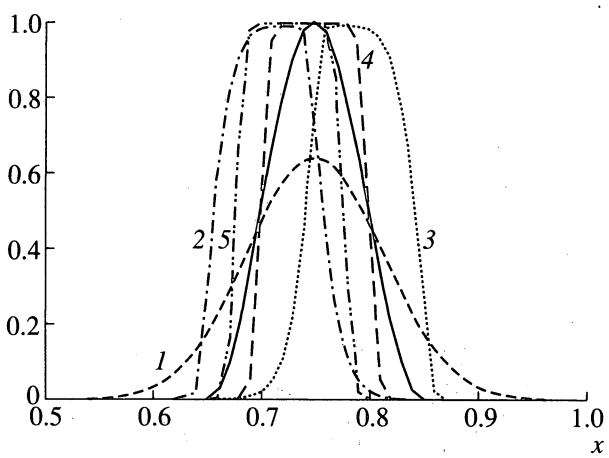
$$u(\mathbf{x}, t) = U(\xi, \eta),$$

где

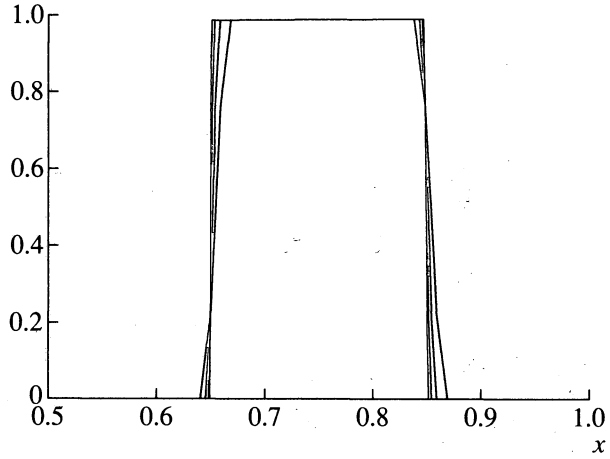
$$\xi = \cos(2\pi t)(x_1 - 1/2) - \sin(2\pi t)(x_2 - 1/2), \quad \eta = \sin(2\pi t)(x_1 - 1/2) + \cos(2\pi t)(x_2 - 1/2).$$

Функция $U(\xi, \eta)$ описывает вращение твердого тела с периодом $T = 1$ вокруг оси (1/2, 1/2), причем $U(\xi(\mathbf{x}, 0), \eta(\mathbf{x}, 0)) = u_0(\mathbf{x})$.

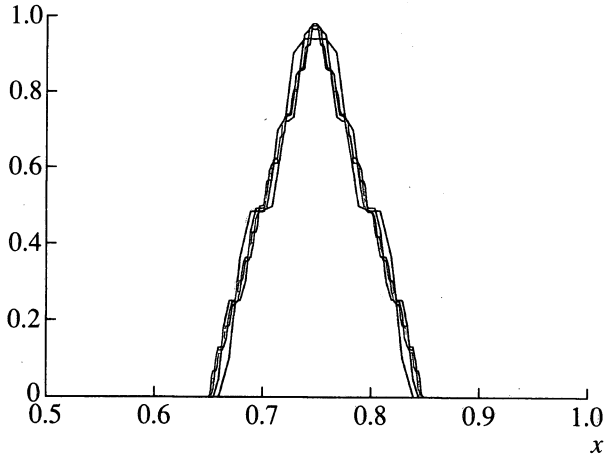
Рассматривается задача с неотрицательным начальным условием, а сама функция $u_0(\mathbf{x})$ предполагается финитной. Для контроля точности приближенного решения использовалось несколько характеристик. Обычно при динамической эволюции профиля с сохранением формы



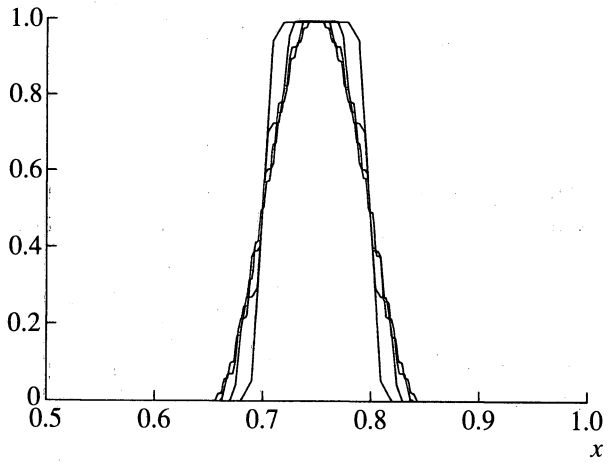
Фиг. 3.



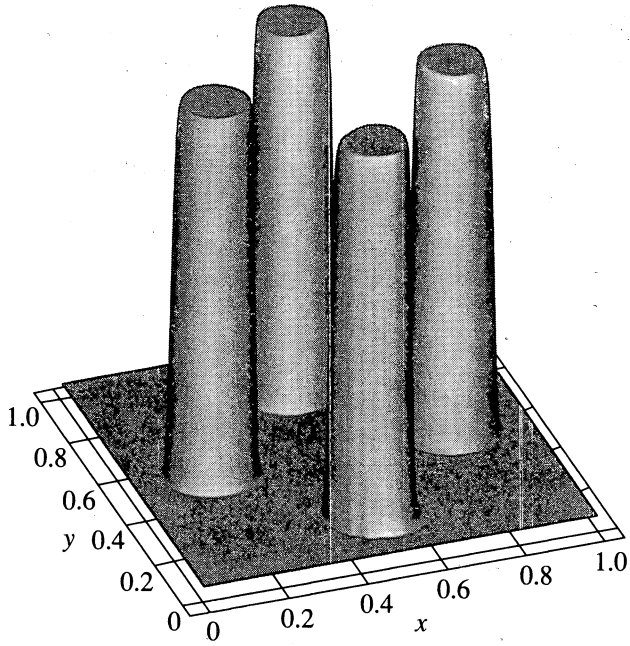
Фиг. 4.



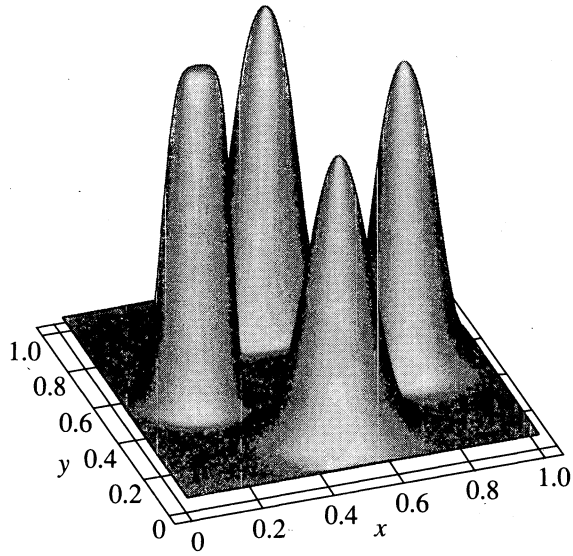
Фиг. 5.



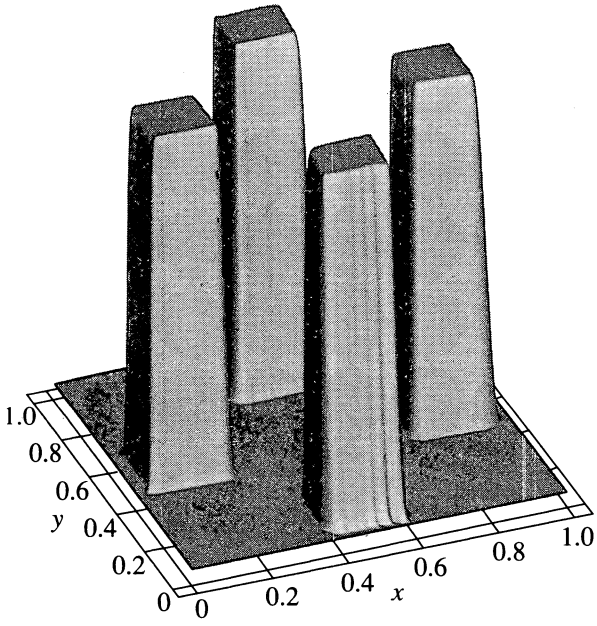
Фиг. 6.



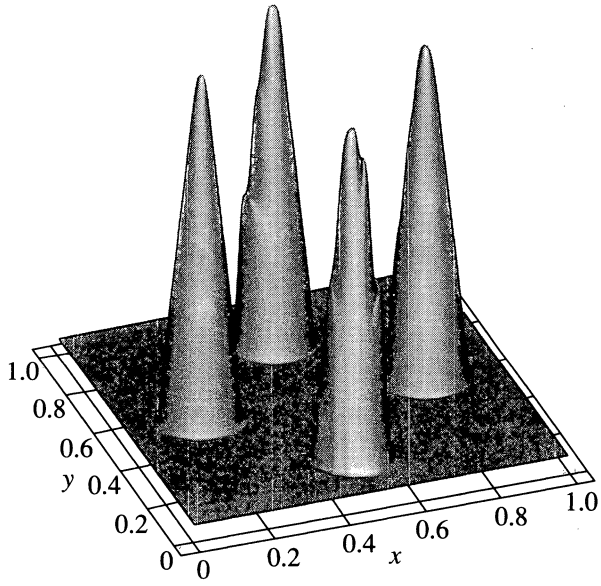
Фиг. 7.



Фиг. 8.



Фиг. 9.



Фиг. 10.

отслеживают амплитуду (максимальное значение) решения. Кроме того, в силу несжимаемости среды ($\operatorname{div}\mathbf{v} = 0$) уравнение переноса (1) может быть записано в дивергентном виде:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{\alpha=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_\alpha}(v_\alpha(\mathbf{x}, t)u) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad t > 0. \tag{16}$$

Среди основных свойств решения задачи (2), (3), (21) необходимо выделить свойство консервативности:

$$\int_\Omega u(\mathbf{x}, t)dx = \int_\Omega u_0(\mathbf{x})dx.$$

Поэтому для разностного решения контролируется выполнимость разностного равенства

$$\|y(\mathbf{x}, t)\|_{L_1(\bar{\omega})} = \sum_{\mathbf{x} \in \bar{\omega}} |y(\mathbf{x}, t)| h_1 h_2 = \text{const}.$$

Рассматривалась эволюция начального профиля в виде цилиндра единичной высоты с радиусом 0.1 и центром (1/2, 1/4). На фиг. 7 представлены результаты расчетов на моменты времени $t = 1/4, 1/2, 3/4, 1$ при использовании регуляризованной разностной схемы. Численное решение получено на равномерной прямоугольной сетке с $h_\alpha = 0.0025$, $\alpha = 1, 2$. Для сравнения на фиг. 8 приведено разностное решение, полученное при использовании монотонной разностной схемы первого порядка аппроксимации направленными разностями. Аналогичные данные при эволюции начального профиля в виде параллелепипеда и конуса представлены на фиг. 9, 10. Расчеты на более длинные временны́е промежутки (2, 3 и более оборотов) показали, что качество разностного решения сохраняется. В частности, практически не проявляется неконсервативность разностной схемы.

Монотонные разностные схемы подобного класса применялись и при решении более общих задач. Среди наиболее важных обобщений отметим задачи на неравномерных, не обязательно прямоугольных сетках. На основе предложенной монотонной разностной схемы строятся численные методы решения двух- и трехмерных нестационарных задач динамики несжимаемой жидкости, задач тепло- и массопереноса. Наиболее важным достоинством рассматриваемых схем является их простота, прозрачность базовых математических конструкций.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Самарский А.А., Попов Ю.П.* Разностные методы решения задач газовой динамики. М.: Наука, 1992.
2. *Hirsch C.* Numerical computation of internal and external flows. Vol. 2: Computational methods for inviscid and viscous flows. Chichester: Wiley, 1988.
3. *Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н.* Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. М.: Наука, 1978.
4. *Самарский А.А.* Теория разностных схем. М.: Наука, 1989.
5. *Роуч П.* Вычислительная гидродинамика. М.: Мир, 1980.
6. *Годунов С.К.* Разностный метод численного расчета разрывных решений уравнений гидродинамики // Матем. сб. 1959. Т. 47(89). № 3. С. 271–306.
7. *Гольдин В.Я., Калиткин Н.Н., Шишова Т.В.* Нелинейные разностные схемы для гиперболических уравнений // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1965. Т. 5. № 5. С. 938–944.
8. *Колган В.П.* Применение принципа минимальных значений производной к построению конечноразностных схем для расчета разрывных решений газовой динамики // Уч. зап. ЦАГИ. 1972. Т. 3. № 6. С. 68–77.
9. *Harten A.* High resolution schemes for hyperbolic conservation laws // J. Comput. Phys. 1983. V. 49. № 3. P. 357–393.
10. *Osher S., Chakravarthy S.* High resolution schemes and the entropy condition // SIAM J. Numer. Analys. 1984. V. 21. № 5. P. 955–984.
11. *Sweby P.K.* High resolution schemes using flux limiters for hyperbolic conservation laws // SIAM. J. Numer. Analys. 1984. V. 21. № 5. P. 995–1011.
12. *Harten A., Osher S.* Uniformly high-order accurate nonoscillatory schemes. I // SIAM J. Numer. Analys. 1987. V. 24. № 2. P. 279–309.
13. *Yee H.C.* Construction of explicit and implicit symmetric TVD schemes and their applications // J. Comput. Phys. 1987. V. 68. P. 151–179.
14. *Вязников К.В., Тишкин В.Ф., Фаворский А.П.* Построение монотонных разностных схем повышенного порядка аппроксимации для систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами гиперболического типа // Матем. моделирование. 1989. Т. 1. № 95–120.
15. *Самарский А.А., Вабищевич П.Н.* Нелинейные монотонные схемы для уравнения переноса // Докл. РАН. 1998. Т. 361. № 1. С. 21–23.
16. *Vreugdenhil C.B., Koren B.* Numerical methods for advection-diffusion problems. Braunschweig: Vieweg, 1993.
17. *Самарский А.А., Гулин А.В.* Устойчивость разностных схем. М.: Наука, 1973.
18. *Самарский А.А.* О регуляризации разностных схем // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1967. Т. 7. № 1. С. 62–93.