ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2000, том 40, № 12, с. 1813–1822

УДК 519.6:531.32

Памяти Анатолия Алексеевича Дородницына посвящаем

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ДИНАМИКИ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ С ПЕРЕМЕННОЙ ВЯЗКОСТЬЮ[1)]

© 2000 г. П. Н. Вабищевич, А. А. Самарский

(125047 Москва, Миусская пл., 4А, ИММ РАН)

Поступила в редакцию 15.06.2000 г.

При моделировании неоднородной жидкости, в частности при решении задач гидродинамики со свободной границей, есть необходимость решения задач с переменной плотностью. Отмечаются особенности таких задач, которые связаны с тем, что уравнения для отдельных компонент скорости сильно завязаны (через главные производные). В задачах с постоянной вязкостью такого зацепления уравнений нет, что дает возможность независимого решения уравнений для компонент скорости. Строится специальная аддитивная схема расщепления по физическим процессам, которая учитывает основные особенности задачи с переменной вязкостью. Рассмотрение проведено на модельной задаче с постоянной плотностью.

В настоящее время для приближенного решения задач динамики вязкой несжимаемой жидкости разработаны различные вычислительные алгоритмы [1]–[5]. При решении двумерных задач основное внимание уделяется переменным функция тока–вихрь скорости. В этом случае вычислительные проблемы порождены в основном отсутствием стандартных граничных условий для вихря скорости [6], [7]. Для общих трехмерных задач необходимо ориентироваться на использование переменных скорость–давление. При этом основное внимание уделяется формулированию сеточной эллиптической задачи для давления с использованием тех или иных схем расщепления по физическим процессам (см., например, [8]).

В гидродинамике важный класс составляют задачи для неоднородной жидкости. Неоднородность обусловлена, например, непостоянством плотности (простейший случай – стратифицированная жидкость) или же вязкости. При моделировании процессов тепло- и массопереноса типичной является зависимость этих характеристик среды от температуры. Многие методы сквозного счета для решения задач динамики однородной жидкости со свободной границей базируются на фактическом переходе к моделированию динамики неоднородной жидкости.

В вычислительной гидродинамике имеется много работ, в которых в той или иной мере затрагивается проблема численного решения задач динамики неоднородной жидкости. Основные особенности рассматриваемых задач связаны с тем, что уравнения для отдельных компонент скорости сильно завязаны (через главные производные), в то время как в задачах с постоянной вязкостью такого зацепления уравнений нет и это дает возможность строить вычислительные алгоритмы с относительно независимым решением уравнений для отдельных компонент скорости. Хотелось бы сохранить такую особенность вычислительного алгоритма и в задачах динамики вязкой неоднородной жидкости. Это и является основной целью данной работы.

Для более ясного изложения рассмотрение проведено на модельной задаче с постоянной плотностью. Задачи с постоянной плотностью и переменной вязкостью имеют не только методическое значение. Такие задачи типичны, например, при описании свободноконвективных движений вязкой несжимаемой жидкости. Для учета основных особенностей нестационарной задачи с переменной вязкостью строится специальная аддитивная схема расщепления по физическим процессам при использовании переменных давление–скорость. Вычислительные затраты не намного возрастают по сравнению со случаем постоянной вязкости. Аналогично могут строиться аддитивные разностные схемы при решении двумерных задач в переменных функция тока–вихрь скорости.

[1)]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 99-01-000958).

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Для простоты изложения ограничимся рассмотрением двумерных нестационарных задач. Переход к общим трехмерным задачам носит редакционный характер. Рассматриваются нестационарные движения несжимаемой жидкости с постоянной плотностью и переменной вязкостью.

Пусть ρ – плотность, p – давление, $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ – скорость и μ – вязкость несжимаемой жидкости, t – время и $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$. Уравнение движения имеет вид

$$\rho(\partial\mathbf{v}/\partial t + (\mathbf{v}\cdot\mathrm{grad})\mathbf{v}) + \mathrm{grad}\,p = \mathrm{Div}\,\sigma + \rho\mathbf{f}(\mathbf{x}, t), \tag{1}$$

где σ – тензор вязких напряжений и $\mathbf{f}$ – объемная сила (например, выталкивающая в задачах конвекции).

Для компонент тензора вязких напряжений в случае ньютоновской жидкости имеет место покоординатное представление

$$\sigma_{ij} = \mu(\partial v_i/\partial x_j + \partial v_j/\partial x_i), \quad i, j = 1, 2.$$

Кроме того, для несжимаемой жидкости выполнено уравнение неразрывности, которое запишем в виде

$$\mathrm{div}\,\mathbf{v} = 0. \tag{2}$$

В рассматриваемом случае движения жидкости с постоянной плотностью вместо (1) используем уравнение

$$\partial\mathbf{v}/\partial t + (\mathbf{v}\cdot\mathrm{grad})\mathbf{v} + \mathrm{grad}\,p' = \mathrm{Div}\,\sigma' + \rho\mathbf{f}'(\mathbf{x}, t), \tag{3}$$

где давление, тензор вязких напряжений и сила нормированы на плотность, так что, например,

$$\sigma'_{ij} = \nu(\partial v_i/\partial x_j + \partial v_j/\partial x_i), \quad i, j = 1, 2,$$

когда $\nu = \mu/\rho$ – кинематическая вязкость.

Уравнения (2), (3) в покоординатной записи принимают вид

$$\frac{\partial v_1}{\partial t} + v_1\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + v_2\frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial p'}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(2\nu\frac{\partial v_1}{\partial x_1}\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\nu\frac{\partial v_1}{\partial x_2}\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\nu\frac{\partial v_2}{\partial x_1}\right) + f'_1(\mathbf{x}, t), \tag{4}$$

$$\frac{\partial v_2}{\partial t} + v_1\frac{\partial v_2}{\partial x_1} + v_2\frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial p'}{\partial x_2} = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\nu\frac{\partial v_1}{\partial x_2}\right) + \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\nu\frac{\partial v_2}{\partial x_1}\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(2\nu\frac{\partial v_2}{\partial x_2}\right) + f'_2(\mathbf{x}, t), \tag{5}$$

$$\partial v_1/\partial x_1 + \partial v_2/\partial x_2 = 0. \tag{6}$$

При использовании записи (4)–(6) более ясно видно, как завязаны компоненты v_α, $\alpha = 1, 2$, в правой части уравнения движения.

Уравнения (2), (3) рассматриваются в ограниченной области Ω с твердыми границами. Для однозначного определения давления используем соотношение

$$\int_\Omega p'(\mathbf{x}, t)d\mathbf{x} = 0.$$

На твердых границах условия прилипания и непротекания дают

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = 0, \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega. \tag{7}$$

Задано также некоторое начальное условие

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{v}^0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega. \tag{8}$$

При построении дискретных аналогов задачи (2), (3), (7), (8) естественно ориентироваться на такие аппроксимации, которые на дискретном уровне сохраняют важнейшие свойства. Среди таких свойств необходимо отметить свойство консервативности разностной схемы – выполнение соответствующего закона сохранения на дискретном уровне. При исследовании уравнений Навье–Стокса для вязкой жидкости принципиальный момент связан с выполнением закона сохранения для кинетической энергии. В частности, члены конвективного переноса в уравнении движения и член, связанный с градиентом давления, не дают вклада в кинетическую энергию – как

говорят, энергетически нейтральны. Изменение кинетической энергии в этом случае обусловлено только вязкой диссипацией.

2. ОПЕРАТОР ВЯЗКИХ НАПРЯЖЕНИЙ

Определим стандартное гильбертово пространство $\mathcal{H} = L_2(\Omega)$, в котором скалярное произведение и норма есть

$$(u, v) = \int_\Omega u(\mathbf{x})v(\mathbf{x})d\mathbf{x}, \quad \|u\| = (u, u)^{1/2}.$$

Для векторов $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ зададим гильбертово пространство $\mathcal{H}_2 = \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$, в котором скалярное произведение

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (u_1, v_1) + (u_2, v_2).$$

Определим на множестве вектор-функций $\mathbf{v}$, равных нулю на $\partial\Omega$, оператор

$$\mathcal{N}\mathbf{v} = -\mathrm{Div}\sigma. \tag{9}$$

В соответствии с (4), (5), оператор $\mathcal{N}$ представляет собой операторную матрицу

$$\mathcal{N} = \begin{pmatrix} \mathcal{N}_{11} & \mathcal{N}_{12} \\ \mathcal{N}_{21} & \mathcal{N}_{22} \end{pmatrix},$$

в которой

$$\mathcal{N}_{11}v_1 = -\frac{\partial}{\partial x_1}\left(2\nu\frac{\partial v_1}{\partial x_1}\right) - \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\nu\frac{\partial v_1}{\partial x_2}\right), \quad \mathcal{N}_{12}v_2 = -\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\nu\frac{\partial v_2}{\partial x_1}\right),$$

$$\mathcal{N}_{21}v_1 = -\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\nu\frac{\partial v_1}{\partial x_2}\right), \quad \mathcal{N}_{22}v_2 = -\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\nu\frac{\partial v_2}{\partial x_1}\right) - \frac{\partial}{\partial x_2}\left(2\nu\frac{\partial v_2}{\partial x_2}\right).$$

Непосредственными выкладками убеждаемся, что

$$(\mathcal{N}\mathbf{v}, \mathbf{u}) = (\mathbf{v}, \mathcal{N}\mathbf{u}),$$

т.е. оператор $\mathcal{N}$ самосопряжен в $\mathcal{H}_2$.

Кроме того, имеем

$$(\mathcal{N}\mathbf{v}, \mathbf{v}) = \int_\Omega \left\{2\nu\left[\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_2}\right)^2\right] + \nu\left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial x_2}\right)^2\right\}d\mathbf{x}$$

и поэтому $\mathcal{N} \geq 0$ в $\mathcal{H}_2$ в силу того, что ν положителен.

При построении абсолютно устойчивых разностных схем необходимо ориентироваться на схемы, в которых члены с вязкими напряжениями каким-то образом выносятся на верхний временной слой. С другой стороны, полностью выносить оператор неудобно в силу отмеченной выше связи компонент скорости. Необходимо выбрать близкий к $\mathcal{N}$ оператор, который был бы более удобен для вычислительной реализации. В качестве такого естественно выбрать

$$\mathcal{D} = \begin{pmatrix} \mathcal{D}_{11} & 0 \\ 0 & \mathcal{D}_{22} \end{pmatrix},$$

в котором

$$\mathcal{D}_{11}v_1 = -\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\nu\frac{\partial v_1}{\partial x_1}\right) - \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\nu\frac{\partial v_1}{\partial x_2}\right),$$

$$\mathcal{D}_{22}v_2 = -\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\nu\frac{\partial v_2}{\partial x_1}\right) - \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\nu\frac{\partial v_2}{\partial x_2}\right).$$

Тем самым

$$\mathcal{D}\mathbf{v} = -\mathrm{div}(\nu\,\mathrm{grad}\,\mathbf{v}). \tag{10}$$

Нетрудно показать энергетическую эквивалентность операторов $\mathcal{N}$ и $\mathcal{D}$. А именно, справедлива оценка

$$(\mathcal{D}\mathbf{v}, \mathbf{v}) \le (\mathcal{N}\mathbf{v}, \mathbf{v}) \le 2(\mathcal{D}\mathbf{v}, \mathbf{v}). \tag{11}$$

Свойства самосопряженности и положительности оператора $\mathcal{N}$ в пространстве $\mathcal{H}_2$, его энергетической эквивалентности оператору $\mathcal{D}$ являются наиболее важными. Именно эти свойства отслеживаются нами при построении дискретных аналогов поставленной дифференциальной задачи.

С точки зрения вычислительной реализации удобно ориентироваться на использование представления операторной матрицы $\mathcal{N}$ в виде суммы двух операторных матриц:

$$\mathcal{N} = \mathcal{N}^{(1)} + \mathcal{N}^{(2)}, \quad (\mathcal{N}^{(1)})^* = \mathcal{N}^{(2)}. \tag{12}$$

С учетом определения оператора $\mathcal{N}$ имеем

$$\mathcal{N}^{(1)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\mathcal{N}_{11} & 0 \\ \mathcal{N}_{21} & \frac{1}{2}\mathcal{N}_{22} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{N}^{(2)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\mathcal{N}_{11} & \mathcal{N}_{12} \\ 0 & \frac{1}{2}\mathcal{N}_{22} \end{pmatrix}.$$

При использовании аддитивных схем реализация связана с обращением операторов $E + \sigma\tau\mathcal{N}^{(\alpha)}$, $\alpha = 1, 2$ (без учета конвективного переноса). Тем самым мы имеем расщепляющуюся систему уравнений с решением эллиптических краевых задач для отдельных компонент скорости.

Фактически мы имеем две близкие возможности: первая из них связана с построением разностных схем на основе регуляризатора $\mathcal{D}$, вторая – на основе треугольного расщепления (12). Важно, что в том и другом случае вязкие члены расщепляются.

3. ОЦЕНКА РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ

Для решения рассматриваемой задачи выполняются некоторые априорные оценки. Выделим основную и наиболее простую из них, которая с математической точки зрения выражает оценку нормы решения, а с физической – задает закон изменения кинетической энергии.

Пусть $\mathcal{H}_2^*$ – подпространство $\mathcal{H}_2$, которое состоит из соленоидальных функций, т.е. функций, для которых выполнены условия несжимаемости (2). Перепишем уравнения (2), (3) в указанном подпространстве, как одно уравнение в следующей операторной форме. Будем ориентироваться на операторную формулировку задачи (2), (3), (7), (8) в виде задачи Коши для дифференциально-операторного уравнения

$$d\mathbf{v}/dt + \mathcal{V}(\mathbf{v})\mathbf{v} + \mathcal{P}\mathbf{v} + \mathcal{N}\mathbf{v} = \mathbf{f}' \tag{13}$$

на подпространстве соленоидальных функций ($\mathrm{div}\,\mathbf{v} = 0$).

Оператор конвективного переноса $\mathcal{V}$ с учетом условия несжимаемости (2) возьмем в виде

$$\mathcal{V}(\mathbf{w})\mathbf{v} = \frac{1}{2}[(\mathbf{w}\cdot\mathrm{grad})\mathbf{v} + \mathrm{div}(\mathbf{w}\mathbf{v})].$$

Преимущества такой формы записи конвективных слагаемых обсуждаются в книге [9] и связаны прежде всего с тем, что этот оператор не дает вклада в изменение кинетической энергии при любых $\mathbf{w}$ ($(\mathcal{V}\mathbf{v}, \mathbf{v}) = 0$). Это свойство имеет место для отдельных компонент скорости, т.е. в $L_2(\Omega)$ оператор $\mathcal{V}$ является кососимметричным:

$$\mathcal{V}(\mathbf{v}) = -\mathcal{V}^*(\mathbf{v}).$$

Аналогичным свойством в рассматриваемом классе соленоидальных функций обладает оператор градиента

$$\mathcal{P}\mathbf{v} = \mathrm{grad}\,p', \quad \mathcal{P} = -\mathcal{P}^*.$$

Свойства оператора вязкого переноса $\mathcal{N}$, определяемого согласно (9), рассмотрены выше. Он является симметричным и положительным.

Чтобы получить простейшую априорную оценку для задачи Коши (8), (13), домножим скалярно в $\mathcal{H}_2^*$ уравнение (13) на $\mathbf{v}$. С учетом отмеченных свойств операторов получим априорную оценку

$$\|\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)\| \le \|\mathbf{v}^0(\mathbf{x})\| + \int_0^t \|\mathbf{f}'(\mathbf{x}, s)\| ds. \tag{14}$$

Она обеспечивает ограниченность решения. Для линейных задач оценка подобного типа дает устойчивость решения по начальным данным и правой части. В нелинейном случае, что и имеет место в нашем примере, оценка (14) обеспечивает устойчивость только тривиального решения.

4. АППРОКСИМАЦИЯ ПО ПРОСТРАНСТВУ

Будем строить сеточные аналоги операторов $\mathcal{V}$, $\mathcal{P}$, $\mathcal{N}$, которые обладают отмеченными выше свойствами. Рассматривается модельная задача в прямоугольнике

$$\Omega = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{x} = (x_1, x_2), 0 < x_\alpha < l_\alpha, \alpha = 1, 2\}.$$

Используется равномерная прямоугольная сетка с шагами h_1 и h_2. Пусть $\bar{\omega} = \omega + \partial\omega$, где ω – множество внутренних узлов, а $\partial\omega$ – множество граничных узлов.

Для сеточных функций определим гильбертово пространство H, в котором

$$(y, z) = \sum_{\mathbf{x} \in \omega} y(\mathbf{x}) z(\mathbf{x}) h_1 h_2.$$

В $H_2 = H \oplus H$ имеем

$$(\mathbf{y}, \mathbf{z}) = \sum_{\alpha = 1}^{2} (y_\alpha, z_\alpha).$$

Определим пространство H_2^* как подпространство H_2, состоящее из соленоидальных сеточных функций, удовлетворяющих дискретному аналогу условия несжимаемости

$$\mathrm{div}_h \mathbf{w} = 0, \quad \mathbf{x} \in \omega^*, \tag{15}$$

где ω^* – подмножество сетки $\bar{\omega}$, которое мы конкретизируем позднее.

Рассмотрим следующую дифференциально-разностную (непрерывную по времени и дискретную по пространству) задачу:

$$d\mathbf{w}/dt + V(\mathbf{w})\mathbf{w} + P\mathbf{w} + N\mathbf{w} = \mathbf{f}', \quad \mathbf{w} \in H_2^*, \tag{16}$$

$$\mathbf{w}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{v}^0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \omega. \tag{17}$$

В соответствии с симметричной формой оператора конвективного переноса $\mathcal{V}$ используем следующую центрально-разностную аппроксимацию:

$$V(\mathbf{w})\mathbf{y} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha = 1}^{2} [(w_\alpha \mathbf{y})_{\mathring{x}_\alpha} + w_\alpha \mathbf{y}_{\mathring{x}_\alpha}]. \tag{18}$$

В этом случае

$$(V(\mathbf{w})\mathbf{y}, \mathbf{y}) = 0 \tag{19}$$

для любых $\mathbf{w}, \mathbf{y} \in H_2$, обращающихся в нуль на $\partial\omega$. Тем самым разностный оператор конвективного переноса наследует основное свойство кососимметричности дифференциального оператора $\mathcal{V}(\mathbf{v})$.

Ниже рассмотрим сеточный оператор N отдельно, а пока построим кососимметричный сеточный оператор P. Используем следующее представление:

$$P\mathbf{w} = \mathrm{grad}_h p', \quad \mathbf{w} \in H_2^*, \tag{20}$$

для разностного оператора P. Оператор P будет кососимметричным, если

$$(P\mathbf{w}, \mathbf{w}) = 0, \quad \mathbf{w} \in H_2^*. \tag{21}$$

Для того чтобы выполнить свойство кососимметричности оператора P, для которого справедливо (20), необходимо использовать согласованные аппроксимации операторов градиента и дивергенции. Согласованность аппроксимаций операторов grad_h и div_h понимается в смысле выполнения равенства

$$(\mathrm{grad}_h p', \mathbf{w}) = -(p, \mathrm{div}_h \mathbf{w})^*, \tag{22}$$

где

$$(v, y)^* = \sum_{\mathbf{x} \in \omega^*} v(\mathbf{x}) y(\mathbf{x}) h_1 h_2. \tag{23}$$

Очевидно, что равенство (21) при использовании представления (20) для оператора P будет верно, если сеточные операторы grad_h и div_h согласованы в смысле выполнения (22), (23) и $\mathrm{div}_h \mathbf{w} = = 0$ для $\mathbf{x} \in \omega^*$.

Для того чтобы получить согласованные аппроксимации операторов grad_h и div_h, сначала определим оператор grad_h и затем используем равенство (22) для конкретизации формы оператора div_h и множества узлов $\omega^* \in \overline{\omega}$.

В вычислительной гидродинамике используются многие классы разностных схем. Их многообразие обусловлено, в частности, выбором расчетных сеток. Используются, например, полностью разнесенные сетки, когда все компоненты скорости и давления определены на разных сетках, частично разнесенных (давление на своей сетке) и полностью совмещенных. В нашем исследовании основное внимание уделяется аппроксимациям вязких членов уравнения движения, способу реализаций таких схем. Поэтому ограничимся использованием единой сетки для компонент скорости и давления.

Выбирая направленные аппроксимации назад для разностного оператора градиента

$$\mathrm{grad}_h p' = (p'_{\bar{x}_1}, p'_{\bar{x}_2}), \quad \mathbf{x} \in \omega, \tag{24}$$

из (22) получаем

$$(\mathrm{grad}_h p', \mathbf{w}) = \sum_{\alpha=1}^{2} (p'_{\bar{x}_\alpha}, w_\alpha) = -\sum_{\alpha=1}^{2} (p', (w_\alpha)_{x_\alpha})^*.$$

Для сеточного оператора дивергенции в рассматриваемом случае получим представление

$$\mathrm{div}_h \mathbf{w} = (w_1)_{x_1} + (w_2)_{x_2}, \quad x \in \omega^*. \tag{25}$$

Из (22) и (25) следует, что давление p' и оператор div_h должны определяться на одном множестве узлов ω^*, причем

$$\omega^* = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2) \mid x_\alpha = i_\alpha h_\alpha, i_\alpha = 0, 1, \ldots, N_\alpha - 1, i_1 + i_2 \neq 0\}.$$

При аппроксимациях (24) и (25) обеспечивается свойство кососимметричности оператора P. Аналогично рассматриваются и другие способы согласованной аппроксимации операторов градиента и дивергенции.

5. РАЗНОСТНЫЙ ОПЕРАТОР ВЯЗКИХ НАПРЯЖЕНИЙ

Подобно дифференциальному случаю определим оператор N как операторную матрицу:

$$N = \begin{pmatrix} N_{11} & N_{12} \\ N_{21} & N_{22} \end{pmatrix}. \tag{26}$$

Для смешанных производных используем стандартные аппроксимации второго порядка точности [10]. Определим разностные операторы

$$\Lambda_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(\Lambda^{+}_{\alpha\beta} + \Lambda^{-}_{\alpha\beta}), \quad \Lambda^{+}_{\alpha\beta}u = -(\nu u_{\bar{x}_\beta})_{x_\alpha}, \quad \Lambda^{-}_{\alpha\beta}u = -(\nu u_{x_\beta})_{\bar{x}_\alpha}.$$

Тогда для операторов $N_{\alpha\beta}$, $\alpha, \beta = 1, 2$, получим представления

$$N_{11}w_1 = 2\Lambda_{11}w_1 + \Lambda_{22}w_1, \quad N_{12}w_2 = \Lambda_{21}w_2, \quad N_{21}w_1 = \Lambda_{21}w_1, \quad N_{22}w_2 = \Lambda_{11}w_2 + 2\Lambda_{22}w_2.$$

С учетом свойств разностных операторов $\Lambda_{\alpha\beta}$, $\alpha, \beta = 1, 2$, имеем

$$(N\mathbf{w}, \mathbf{y}) = (N_{11}w_1, y_1) + (N_{12}w_2, y_1) + (N_{21}w_1, y_2) + (N_{22}w_2, y_2) = 2(\Lambda_{11}w_1, y_1) + (\Lambda_{21}w_2, y_1) +$$
$$+ (\Lambda_{12}w_1, y_2) + 2(\Lambda_{22}w_2, y_2) = 2(w_1, \Lambda_{11}y_1) + (w_2, \Lambda_{12}y_1) + (w_1, \Lambda_{21}y_2) + 2(w_2, \Lambda_{22}y_2) =$$
$$= (w_1, N_{11}y_1) + (w_2, N_{21}y_1) + (w_1, N_{12}y_2) + (w_2, N_{22}y_2) = (\mathbf{w}, N\mathbf{y}).$$

Тем самым оператор N является самосопряженным в H_2.

Дифференциальному оператору $\mathcal{D}$ поставим в соответствие разностный оператор

$$D = \begin{pmatrix} D_{11} & 0 \\ 0 & D_{22} \end{pmatrix}, \tag{27}$$

в котором

$$D_{11}w_1 = \Lambda_{11}w_1 + \Lambda_{22}w_1, \quad D_{22}w_2 = \Lambda_{11}w_2 + \Lambda_{22}w_2.$$

Самосопряженность и положительность разностного оператора D очевидна.

Подобно дифференциальному случаю имеет место неравенство

$$(D\mathbf{w}, \mathbf{w}) \le (N\mathbf{w}, \mathbf{w}) \le 2(D\mathbf{w}, \mathbf{w}) \tag{28}$$

для операторов N и D, определяемых согласно (26), (27). Доказательство неравенства (28) технически ненамного сложнее доказательства неравенства (11) в дифференциальном случае.

Базируясь на известных результатах теории разностных схем [10], устанавливаем, что при $\nu \ge \nu_0 > 0$ оператор D является положительно-определенным. Положительно-определенным и самосопряженным будет и разностный оператор вязких напряжений: $N = N^* \ge \nu_0 E$.

Аналогично (12), для оператора N верно разложение на две треугольные операторные матрицы:

$$N = N^{(1)} + N^{(2)}, \quad (N^{(1)})^* = N^{(2)}, \tag{29}$$

в котором

$$N^{(1)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}N_{11} & 0 \\ N_{21} & \frac{1}{2}N_{22} \end{pmatrix}, \quad N^{(2)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}N_{11} & N_{12} \\ 0 & \frac{1}{2}N_{22} \end{pmatrix}.$$

На основе отмеченных свойств операторов конвективного и вязкого переноса, операторов градиента и дивергенции строятся разностные схемы для решения задачи (16), (17).

6. АДДИТИВНЫЕ РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ

Построим простейшие разностные схемы для уравнения (16) при использовании равномерной сетки по времени с шагом $\tau > 0$. Пусть $\mathbf{y}_n(\mathbf{x}) = \mathbf{y}(\mathbf{x}, t_n)$, где $t_n = n\tau$, $n = 0, 1, \ldots, N$, $N\tau = T$.

При аппроксимации по времени используются схемы расщепления, которые позволяют наиболее естественно сформулировать задачу для давления. Запишем (16) в виде

$$d\mathbf{w}/dt + (A^{(1)} + A^{(2)})\mathbf{w} = \mathbf{f}', \quad 0 < t \le T.$$

При двухкомпонентном расщеплении естественно выделить оператор давления так, чтобы

$$A^{(1)} = V(\mathbf{w}) + N, \quad A^{(1)}(\mathbf{w}) \ne (A^{(1)})^* \ge 0, \quad A^{(2)} = P, \quad A^{(2)} = -(A^{(2)})^*.$$

Далее можно ориентироваться на те или иные схемы расщепления [11]: типа переменных направлений, факторизованные, аналоги локально-одномерных и т.д. Например, при использовании аналога схемы Дугласа–Рэкфорда имеем

$$\frac{\mathbf{w}_{n+1/2}-\mathbf{w}_n}{\tau}+A^{(1)}(\mathbf{w}_n)\mathbf{w}_{n+1/2}+A^{(2)}\mathbf{w}_n = \mathbf{f}'_n, \tag{30}$$

$$\frac{\mathbf{w}_{n+1}-\mathbf{w}_n}{\tau}+A^{(1)}(\mathbf{w}_n)\mathbf{w}_{n+1/2}+A^{(2)}\mathbf{w}_{n+1} = \mathbf{f}'_n, \quad \mathbf{x}\in\omega. \tag{31}$$

Для (30), (31) имеет место безусловная устойчивость (в линейном смысле):

$$\|(E+\tau A^{(2)})\mathbf{w}_{n+1}\| \le \|(E+\tau A^{(2)})\mathbf{w}_n\| + \tau\|\mathbf{f}'_n\|.$$

Уравнение (30) соответствует неявному конвективно-диффузионному переносу при явном определении градиента давления

$$\frac{\mathbf{w}_{n+1/2}-\mathbf{w}_n}{\tau}+[V(\mathbf{w}_n)+N]\mathbf{w}_{n+1/2}+\mathrm{grad}_h p_n = \mathbf{f}'_n, \quad \mathbf{x}\in\omega.$$

Второй шаг (уравнение (31)) соответствует неявному переносу за счет градиента давления:

$$\frac{\mathbf{w}_{n+1}-\mathbf{w}_n}{\tau}+[V(\mathbf{w}_n)+N]\mathbf{w}_{n+1/2}+\mathrm{grad}_h p'_{n+1} = \mathbf{f}'_n, \quad \mathbf{x}\in\omega,$$

$$\mathrm{div}_h\mathbf{w}_{n+1} = 0, \quad \mathbf{x}\in\omega^*.$$

Численная реализация этой схемы связана с решением несамосопряженной системы эллиптических уравнений для определения $\mathbf{w}_{n+1/2}$ и с решением самосопряженной эллиптической задачи для $\delta p = p'_{n+1}-p'_n$:

$$\mathrm{div}_h\mathrm{grad}_h\delta p = \frac{1}{\tau}\mathrm{div}_h\mathbf{v}_{n+1/2}, \quad \mathbf{x}\in\omega.$$

После этого (поправка по давлению) определяется поле скоростей на новом временном слое:

$$\mathbf{w}_{n+1} = \mathbf{w}_{n+1/2}-\tau\mathrm{grad}_h(p'_{n+1}-p'_n), \quad \mathbf{x}\in\omega.$$

Для рассматриваемых аппроксимаций операторов div и grad имеем стандартный пятиточечный шаблон для оператора $\mathrm{div}_h\mathrm{grad}_h$.

Для того чтобы получить расщепляющиеся задачи для определения отдельных компонент скорости, будем строить регуляризованные аддитивные схемы [11] с теми или иными регуляризаторами. Традиционные схемы типа переменных направлений здесь не проходят. Если говорить в двух словах, то основная проблема связана с тем, что оценки на промежуточных слоях не должны зависеть от операторов.

При использовании регуляризатора D можно использовать схему

$$\frac{\mathbf{w}_{n+1}-\mathbf{w}_n}{\tau}+(E+\sigma_1\tau V_n)^{-1}V_n\mathbf{w}_n+(E+\sigma_2\tau D)^{-1}N(E+\sigma_2\tau D)^{-1}\mathbf{w}_n+(E+\sigma_3\tau P)^{-1}P\mathbf{w}_n = \mathbf{f}'_n. \tag{32}$$

Можно было бы ориентироваться на схемы, в которых конвективный перенос берется с предыдущего временного слоя (схема явная по конвективному переносу). Это соответствует выбору $\sigma_1 = 0$ в (32). Подобные явно-неявные схемы для задач конвекции-диффузии широко используются в вычислительной гидродинамике. Как показывает анализ (см., например, [9]), в задачах конвекции-диффузии явно-неявные схемы (явные по конвективному переносу и неявные по диффузионному) относятся к классу безусловно устойчивых (точнее, ρ-устойчивых).

В плане вычислительной реализации и получения условий устойчивости запишем регуляризованную схему (32), как аддитивно-усредненную аддитивную схему [11]. Введем вспомогательные функции $\mathbf{w}^{(\alpha)}_{n+1}$, $\alpha = 1, 2, 3$, которые определим из уравнений

$$\frac{\mathbf{w}^{(1)}_{n+1}-\mathbf{w}_n}{3\tau}+(E+\sigma_1\tau V_n)^{-1}V_n\mathbf{w}_n = \mathbf{f}'_n, \tag{33}$$

$$\frac{\mathbf{w}_{n+1}^{(2)} - \mathbf{w}_n}{3\tau} + (E + \sigma_2\tau D)^{-1} N (E + \sigma_2\tau D)^{-1} \mathbf{w}_n = 0, \tag{34}$$

$$\frac{\mathbf{w}_{n+1}^{(3)} - \mathbf{w}_n}{3\tau} + (E + \sigma_3\tau P)^{-1} P \mathbf{w}_n = 0. \tag{35}$$

Рассчитывается изменение скорости за счет конвективного переноса, вязких напряжений и давления. Под решением на новом временном слое понимается

$$\mathbf{w}_{n+1} = \frac{1}{3}\sum_{\alpha=1}^{3} \mathbf{w}_{n+1}^{(\alpha)}. \tag{36}$$

Нетрудно получить оценки устойчивости на основе рассмотрения отдельных уравнений (33)–(35). В нашем случае (33) есть не что иное, как схема с весами для уравнения переноса с кососимметричным оператором и несколько нестандартным весовым множителем σ_1. Исследование таких разностных схем проведено в [12]. Схема (33) устойчива при $\sigma_1 \geq 3/2$, и, например, при $\sigma_1 = 3$ (полностью неявная схема) для решения справедлива послойная оценка

$$\left\|\mathbf{w}_{n+1}^{(1)}\right\| \leq \|\mathbf{w}_n\| + 3\tau\left\|(E + \sigma_1\tau V_n)\mathbf{f}_n'\right\|.$$

Аналогично рассматривается и схема (35). С учетом $P = -P^*$ она устойчива при $\sigma_3 \geq 3/2$, причем

$$\left\|\mathbf{w}_{n+1}^{(3)}\right\| \leq \|\mathbf{w}_n\|.$$

Для исследования (34) привлекаются стандартные условия устойчивости операторно-разностных схем [10], [13]. Запишем (34) в канонической форме двухслойных схем

$$B\frac{\mathbf{w}_{n+1}^{(2)} - \mathbf{w}_n}{\tau} + A\mathbf{w}_n = 0 \tag{37}$$

с самосопряженными и положительными операторами

$$B = \frac{1}{3}E, \quad A = (E + \sigma_2\tau D)^{-1} N (E + \sigma_2\tau D)^{-1}.$$

Необходимое и достаточное условие устойчивости схемы (37) имеет вид

$$B \geq \frac{\tau}{2}A.$$

Принимая во внимание оценку энергетической эквивалентности (28), устанавливаем безусловную устойчивость в H_2 при $\sigma_2 \geq 3/2$, при этом

$$\left\|\mathbf{w}_{n+1}^{(2)}\right\| \leq \|\mathbf{w}_n\|.$$

Тем самым для схемы (33)–(36) установлена безусловная устойчивость при весовых множителях $\sigma_\alpha \geq 3/2$, $\alpha = 1, 2, 3$, с выполнением априорной оценки типа

$$\|\mathbf{w}_{n+1}\| \leq \|\mathbf{w}_n\| + \tau\left\|(E + \sigma_1\tau V_n)\mathbf{f}_n'\right\|,$$

которая согласована с априорной оценкой (14) для решения дифференциальной задачи.

Основной новый элемент состоит в расчете переноса за счет вязких напряжений. Сложная конструкция (см. (34)) строится для получения устойчивой схемы. Реализация состоит в двукратном решении эллиптических задач $E + \sigma_2\tau D$. Тем самым по сравнению с задачами с постоянной вязкостью (см., например, (30), (31)) вычислительная работа удваивается. Такое увеличение вычислительных затрат не носит принципиального характера в вычислительной гидродинамике, так как основные затраты связаны с расчетом давления.

Отдельного упоминания заслуживает схема

$$\frac{\mathbf{w}_{n+1} - \mathbf{w}_n}{\tau} + (E + \sigma_1\tau D)^{-1}(N + V_n)(E + \sigma_1\tau D)^{-1}\mathbf{w}_n + (E + \sigma_2\tau P)^{-1} P \mathbf{w}_n = \mathbf{f}_n',$$

которая, как и схема (30), (31), основана на двухкомпонентном расщеплении.

Аналогично (32) строятся схемы при использовании треугольного разложения (29) разностного оператора вязких напряжений. В этом случае

$$\frac{\mathbf{w}_{n+1}-\mathbf{w}_n}{\tau}+(E+\sigma_1\tau V_n)^{-1}V_n\mathbf{w}_n+$$
$$+(E+\sigma_2\tau N^{(1)})^{-1}N(E+\sigma_2\tau N^{(2)})^{-1}\mathbf{w}_n+(E+\sigma_3\tau P)^{-1}P\mathbf{w}_n=\mathbf{f}'_n. \tag{38}$$

При интерпретации этой схемы как аддитивно-усредненной вместо (34) имеем

$$\frac{\mathbf{w}^{(2)}_{n+1}-\mathbf{w}_n}{3\tau}+(E+\sigma_2\tau N^{(1)})^{-1}N(E+\sigma_2\tau N^{(2)})^{-1}\mathbf{w}_n=0. \tag{39}$$

Схема (39) записывается в каноническом виде (37), если

$$B=\frac{1}{3}E,\quad A=(E+\sigma_2\tau N^{(1)})^{-1}N(E+\sigma_2\tau N^{(2)})^{-1},$$

причем $A=A^*>0$. Условия устойчивости принимают вид

$$E-\frac{3\tau}{2}(E+\sigma_2\tau N^{(1)})^{-1}N(E+\sigma_2\tau N^{(2)})^{-1}\geq 0.$$

Имеем

$$(E+\sigma_2\tau N^{(2)})(E+\sigma_2\tau N^{(1)})-\frac{3\tau}{2}N=(E-\sigma_2\tau N^{(2)})(E-\sigma_2\tau N^{(1)})+\left(2\sigma_2-\frac{3\tau}{2}\right)\tau N\geq 0$$

при $\sigma_2\geq 3/4$.

Преимущество схемы (38) перед схемой (32) в том, что решаются не две, а только одна эллиптическая задача для определения компоненты скорости на новом временном слое. Правда, при этом эллиптические задачи немного сложнее.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ладыженская О.А.* Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1970.
2. *Dorodnicyn A.A.* Review of methods for solving the Navier–Stokes equations // Lect. Notes Phys. 1973. V. 18. P. 23–47.
3. *Patankar S.V.* Numerical heat transfer and fluid flow. Washington, D.C.: Hemisphere, 1980.
4. *Fletcher C.A.J.* Computational techniques for fluid dynamics. Berlin: Springer, 1988.
5. *Temam R.* Navier–Stokes equations, theory and numerical analysis. Amsterdam: North-Holland, 1984.
6. *Roache P.* Computational fluid dymanics. Albuquerque, New Mexico: Hermosa Publs, 1979.
7. *Chudanov V.V., Popkov A.G., Churbanov A.G. et al.* Operator-splitting schemes for the stream function – vorticity formulation // Comput. Fluids. 1995. V. 24. P. 771–786.
8. *Churbanov A.G., Pavlov A.N., Vabishchevich P.N.* Operation-splitting methods for the incompressible Navier-Stokes equations on non-staggered grids, Part 1: First-order schemes // Internat. J. Numer. Meth. Fluids. 1995. V. 21. P. 617–640.
9. *Самарский А.А., Вабищевич П.Н.* Численные методы решения задач конвекции-диффузии. М.: Эдиториал УРСС, 1999.
10. *Самарский А.А.* Теория разностных схем. М.: Наука, 1989.
11. *Самарский А.А., Вабищевич П.Н.* Аддитивные схемы для задач математической физики. М.: Наука, 1999.
12. *Самарский А.А., Вабищевич П.Н.* Разностные схемы для уравнения переноса. I // Дифференц. ур-ния. 1998. Т. 34. С. 1675–1685.
13. *Самарский А.А., Гулин А.В.* Устойчивость разностных схем. М.: Наука, 1973.