ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 1999, том 39, № 1, с. 45–60

УДК 519.62

ТОЧНЫЕ ТРЕХТОЧЕЧНЫЕ РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ 2-ГО ПОРЯДКА И ИХ РЕАЛИЗАЦИЯ

© 1999 г. **М. В. Кутнив*, В. Л. Макаров*, А. А. Самарский****

(252017 Киев, ул. Владимирская, 64, Университет;*

*** 125047 Москва, Миусская пл., 4а, ИММ РАН)*

Поступила в редакцию 18.05.98 г.

Доказано существование точных трехточечных разностных схем (т. т. р. с.) для нелинейных краевых задач с кусочно-гладкими коэффициентами. На основании т. т. р. с. построены однородные трехточечные разностные схемы (т. р. с.) m-го порядка точности, которые приближают решение $u(x)$ и его поток $k(x)du/dx$. Предложенные т. р. с. m-го порядка точности для своего построения в каждом узле сетки требуют решения двух нелинейных задач Коши на отрезках $[x_{j-1}, x_j]$, $[x_j, x_{j+1}]$, что осуществляется за один шаг любым одношаговым методом.

1. ВВЕДЕНИЕ

В данной работе рассматривается задача построения точной трехточечной разностной схемы (т. т. р. с.) для нелинейной краевой задачи вида

$$\frac{d}{dx}\left[k(x)\frac{du}{dx}\right] = -f(x, u(x)), \quad x \in (0, 1), \quad u(0) = A, \quad u(1) = B, \tag{1.1}$$

$$\begin{gathered} 0 < c_1 \le k(x), \quad |f(x, u) - f(x, v)| \le L|u - v| \quad \forall x \in [0, 1], \quad u, v \in \Omega_u, \\ k(x) \in C^{(1)}[0, \eta] \cup C^{(1)}[\eta, 1], \quad f(x, u) \in C[0, \eta] \cup C[\eta, 1], \quad \eta \in (0, 1), \quad \forall u \in \Omega_u, \end{gathered} \tag{1.2}$$

где Ω_u – некоторая окрестность решения задачи (1.1), (1.2), которая будет определена ниже (см. замечание 2), в точке разрыва η требуется выполнение обычных условий согласования

$$u(\eta - 0) = u(\eta + 0), \quad k(\eta - 0)\frac{du(\eta - 0)}{dx} = k(\eta + 0)\frac{du(\eta + 0)}{dx}.$$

На основании т. т. р. с. построены однородные трехточечные разностные схемы (т. р. с.) m-го порядка точности как в отношении приближения функции, так и ее потока kdu/dx в узлах сетки ω_h. Предложенные т. р. с. m-го порядка точности для своего построения требуют для каждого узла x_j ($j = 1, 2, ..., N-1$) сетки ω_h решения двух нелинейных задач Коши на отрезках $[x_{j-1}, x_j]$ (вперед) и $[x_j, x_{j+1}]$ (назад), что осуществляется за один шаг с помощью какого-либо одношагового метода – разложения в ряд Тейлора или Рунге–Кутты. Предпочтение отдано методу разложения в ряд Тейлора. Эффективность т. р. с. 4-го порядка точности иллюстрируется на числовом примере. Для линейного случая т. р. с. m-го порядка точности построены в [1], [2]. Данная работа является модификацией и развитием результатов, анонсированных в [3].

Заметим, что попытка построения для задачи (1.1) т. р. с. 4-го порядка точности была предпринята в [4], но обоснование дано только для случая $k(x) = \exp(bx/a)$. Предложенная в [4] методика не может быть использована даже в таком специальном случае для построения т. р. с. более высокого порядка точности (больше 4).

2. СУЩЕСТВОВАНИЕ ТОЧНОЙ ТРЕХТОЧЕЧНОЙ РАЗНОСТНОЙ СХЕМЫ

Для простоты ограничимся равномерной сеткой $\omega_h = \{x_j = jh, j = 1, 2, ..., N-1, h = 1/N\}$ и одной точкой разрыва η, совпадающей с i-м узлом сетки x_i. Введем функции $w_\alpha^j(x, u, b_\alpha)$, $l_\alpha^j(x, u, b_\alpha)$ ($\alpha = 1, 2$), являющиеся решением следующих двух задач Коши:

$$\frac{d}{dx}w_\alpha^j(x, u, b_\alpha) = \frac{l_\alpha^j(x, u, b_\alpha)}{k(x)},$$

$$\frac{d}{dx}l_\alpha^j(x, u, b_\alpha) = -f(x, u_{j+(-1)^\alpha} + (-1)^{\alpha+1}b_\alpha v_\alpha^j(x) + w_\alpha^j(x, u, b_\alpha)), \tag{2.1}$$

$$x_{j-2+\alpha} < x < x_{j-1+\alpha}, \quad w_\alpha^j(x_{j+(-1)^\alpha}, u, b_\alpha) = l_\alpha^j(x_{j+(-1)^\alpha}, u, b_\alpha) = 0, \quad \alpha = 1, 2,$$

где

$$v_1^j(x) = \int_{x_{j-1}}^{x} \frac{dt}{k(t)}, \quad v_2^j(x) = \int_{x}^{x_{j+1}} \frac{dt}{k(t)}.$$

Свяжем решения левой и правой задач Коши в точке x_j через параметры b_α ($\alpha = 1, 2$) условиями

$$u_{j-1} + b_1 v_1^j(x_j) + w_1^j(x_j, u, b_1) = u_{j+1} - b_2 v_2^j(x_j) + w_2^j(x_j, u, b_2),$$

$$\left\{k(x)\frac{d}{dx}[u_{j-1} + b_1 v_1^j(x) + w_1^j(x, u, b_1)]\right\}_{x_j-0} = \left\{k(x)\frac{d}{dx}[u_{j+1} - b_2 v_2^j(x) + w_2^j(x, u, b_2)]\right\}_{x_j+0}. \tag{2.2}$$

Если задача (2.1), (2.2) имеет решение, то будем его обозначать через $w_\alpha^j(x, u) = w_\alpha^j(x, u, b_\alpha)$, $l_\alpha^j(x, u) = l_\alpha^j(x, u, b_\alpha)$; при этом параметры b_α будут иметь вид

$$b_\alpha = b_\alpha^j(u) = [v_1^j(x_{j+1})]^{-1}\{2hu_{\bar{x},j} + w_2^j(x_j, u) - w_1^j(x_j, u) + \\ +(-1)^{\alpha+1}v_{3-\alpha}^j(x_j)[l_2^j(x_j, u) - l_1^j(x_j, u)]\}, \quad \alpha = 1, 2. \tag{2.3}$$

Имеет место следующая

Лемма 1. *Пусть задача* (1.1), (1.2) *имеет единственное решение* $u(x)$ *и параметр* $h_0 > 0$ *выбран так, что* $\max\{h_0/c_1, Lh_0(3 + 2h_0/c_1)\} = 1$; *тогда* $\forall h \in (0, h_0)$ *задачи* (2.1), (2.2) *имеют единственное решение* $w_\alpha^j(x, u)$, $l_\alpha^j(x, u)$ ($\alpha = 1, 2$), *причем*

$$u(x) = u_{j+(-1)^\alpha} + (-1)^{\alpha+1}b_\alpha v_\alpha^j(x) + w_\alpha^j(x, u), \quad x \in [x_{j-2+\alpha}, x_{j-1+\alpha}], \quad \alpha = 1, 2. \tag{2.4}$$

Доказательство. Введем векторы

$$\mathbf{Y}_\alpha^j(x, u) = \{w_\alpha^j(x, u), l_\alpha^j(x, u)\}, \quad \alpha = 1, 2,$$

и вектор-операторы $\mathbf{A}_\alpha(x, \mathbf{Y}_\alpha^j(x, u))$ ($\alpha = 1, 2$) согласно формулам

$$\mathbf{A}_\alpha(x, \mathbf{Y}_\alpha^j(x, u)) = \{A_{\alpha s}(x, \mathbf{Y}_\alpha^j(x, u))\}_{s=1}^2,$$

$$A_{\alpha 1}(x, \mathbf{Y}_\alpha^j(x, u)) = (-1)^{\alpha+1}\int_{x_{j+(-1)^\alpha}}^{x} \frac{l_\alpha^j(t, u)}{k(t)}dt,$$

$$A_{\alpha 2}(x, \mathbf{Y}_\alpha^j(x, u)) = (-1)^\alpha \int_{x_{j+(-1)^\alpha}}^{x} f(t, u_{j+(-1)^\alpha} + (-1)^{\alpha+1}b_\alpha v_\alpha^j(t) + w_\alpha^j(t, u))dt,$$

где $x_{j-2+\alpha} \le x \le x_{j-1+\alpha}$. Рассмотрим вопрос о существовании и единственности решения уравнений

$$\mathbf{Y}_\alpha^j(x, u) = \mathbf{A}_\alpha(x, \mathbf{Y}_\alpha^j(x, u)), \quad \alpha = 1, 2, \tag{2.5}$$

или, что то же самое, о неподвижных точках операторов $\mathbf{A}_\alpha$.

В качестве нормы вектора $\mathbf{U}_\alpha(x)$ возьмем

$$\|\mathbf{U}_\alpha(x)\|_1 = \max_{s=1,2}\ \max_{x\in[x_{j-2+\alpha},\,x_{j-1+\alpha}]} |U_{\alpha s}(x)|.$$

Пусть

$$\mathbb{Y}^j_{\alpha 1}(x,u) = \{w^j_{\alpha 1}(x,u), l^j_{\alpha 1}(x,u)\},\quad \mathbf{Y}^j_{\alpha 2}(x,u) = \{w^j_{\alpha 2}(x,u), l^j_{\alpha 2}(x,u)\};$$

тогда будем иметь

$$\|\mathbf{A}_\alpha(x,\mathbf{Y}^j_{\alpha 1}(x,u)) - \mathbf{A}_\alpha(x,\mathbf{Y}^j_{\alpha 2}(x,u))\|_1 \le$$

$$\le \max\left\{\frac{1}{c_1}\int\limits_{x_{j-2+\alpha}}^{x_{j-1+\alpha}} |l^j_{\alpha 1}(t,u) - l^j_{\alpha 2}(t,u)|dt,\ L\int\limits_{x_{j-2+\alpha}}^{x_{j-1+\alpha}} |(-1)^{\alpha+1}(b_{\alpha 1}-b_{\alpha 2})v^j_\alpha(t) + w^j_{\alpha 1}(t,u) - w^j_{\alpha 2}(t,u)|dt\right\} \le$$

$$\le \max\left\{\frac{h}{c_1}\|\mathbb{Y}^j_{\alpha 1}(x,u) - \mathbb{Y}^j_{\alpha 2}(x,u)\|_1,\ L\int\limits_{x_{j-2+\alpha}}^{x_{j-1+\alpha}}\left|(-1)^{\alpha+1}\frac{v^j_\alpha(t)}{v^j_1(x_{j+1})}[w^j_{21}(x_j,u) - w^j_{22}(x_j,u) - w^j_{11}(x_j,u) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + w^j_{12}(x_j,u)] + w^j_{\alpha 1}(t,u) - w^j_{\alpha 2}(t,u) + \frac{v^j_\alpha(t)}{v^j_1(x_{j+1})}v^j_{3-\alpha}(x_j)[l^j_{21}(x_j,u) - l^j_{22}(x_j,u) - l^j_{11}(t,u) + l^j_{12}(t,u)]\right|dt\right\},$$

$$\alpha = 1, 2.$$

Так как $v^j_1(t) > 0$ монотонно возрастает на $(x_{j-1}, x_{j+1}]$, а $v^j_2(t) > 0$ монотонно убывает на $[x_{j-1}, x_{j+1})$, то $v^j_\alpha(t) \le v^j_1(x_{j+1})$, $t \in [x_{j-2+\alpha}, x_{j-1+\alpha}]$. Кроме того, $v^j_{3-\alpha}(x_j) \le h/c_1$. Тогда

$$\|\mathbb{A}_\alpha(x,\mathbb{Y}^j_{\alpha 1}(x,u)) - \mathbb{A}_\alpha(x,\mathbf{Y}^j_{\alpha 2}(x,u))\|_1 \le \max\left(\frac{h}{c_1}, 3Lh + \frac{2Lh^2}{c_1}\right)\|\mathbf{Y}^j_{\alpha 1}(x,u) - \mathbf{Y}^j_{\alpha 2}(x,u)\|_1,\quad \alpha = 1, 2.$$

Таким образом, если $h_0 > 0$ таково, что

$$\max\left\{\frac{h_0}{c_1}, Lh_0\left(3 + \frac{2h_0}{c_1}\right)\right\} = 1, \tag{2.6}$$

то $\forall h \in (0, h_0)$ операторы $\mathbf{A}_\alpha(x, \mathbf{Y}_\alpha(x,u))$ $(\alpha = 1, 2)$ сжимающие и система (2.5) имеет единственное решение.

Легко видеть, что

$$\frac{d}{dx}\left[k(x)\frac{d}{dx}(u_{j+(-1)^\alpha} + (-1)^{\alpha+1}b_\alpha v^j_\alpha(x) + w^j_\alpha(x,u))\right] =$$

$$= -f(x, u_{j+(-1)^\alpha} + (-1)^{\alpha+1}b_\alpha v^j_\alpha(x) + w^j_\alpha(x,u)),\quad x \in (x_{j-2+\alpha}, x_{j-1+\alpha}),\quad \alpha = 1, 2,$$

$$u_{j-1} + b_1 v^j_1(x_j) + w^j_1(x_j,u) = u_{j+1} - b_2 v^j_2(x_j) + w^j_2(x_j,u),$$

$$\left\{k(x)\frac{d}{dx}[u_{j-1} + b_1 v^j_1(x) + w^j_1(x,u)]\right\}_{x_j-0} = \left\{k(x)\frac{d}{dx}[u_{j+1} - b_2 v^j_2(x) + w^j_2(x,u)]\right\}_{x_j+0},$$

$$u_{j+(-1)^\alpha} + (-1)^{\alpha+1}b_\alpha v^j_\alpha(x_{j+(-1)^\alpha}) + w^j_\alpha(x_{j+(-1)^\alpha}, u) = u(x_{j+(-1)^\alpha}),$$

следовательно, функция

$$\bar{u}(x) \equiv \begin{cases} u_{j-1} + b_1 v_1^j(x) + w_1^j(x, u), & x_{j-1} \le x \le x_j, \\ u_{j+1} - b_2 v_2^j(x) + w_2^j(x, u), & x_j \le x \le x_{j+1}, \end{cases}$$

является решением краевой задачи

$$\frac{d}{dx}\left[k(x)\frac{d\bar{u}}{dx}\right] = -f(x, \bar{u}(x)), \quad x \in (x_{j-1}, x_{j+1}),$$
$$\bar{u}(x_{j+(-1)^\alpha}) = u(x_{j+(-1)^\alpha}), \quad \alpha = 1, 2. \tag{2.7}$$

Задача (2.7) может быть записана в эквивалентной интегральной форме:

$$\bar{u}(x) = \int_{x_{j-1}}^{x_{j+1}} G^h(x, \xi) f(\xi, \bar{u}(\xi)) d\xi + u(x_j)\frac{v_1^j(x)}{v_1^j(x_j)} + u(x_{j-1})\frac{v_2^{j-1}(x)}{v_1^j(x_j)}, \tag{2.8}$$

где

$$G^h(x, \xi) = \frac{1}{v_1^j(x_{j+1})}\begin{cases} v_1^j(x) v_2^j(\xi), & x_{j-1} \le x \le \xi, \\ v_1^j(\xi) v_2^j(x), & \xi \le x \le x_{j+1}, \end{cases}$$

или в операторной форме

$$\bar{u}(x) = \mathfrak{B}_h(x, u(\cdot)).$$

Оценим

$$\|\mathfrak{B}_h(x, \bar{u}_1(\cdot)) - \mathfrak{B}_h(x, \bar{u}_2(\cdot))\|_{0,\infty,e} \le \max_{x \in e} \int_{x_{j-1}}^{x_{j+1}} G^h(x, \xi)|f(\xi, \bar{u}_1(\xi)) - f(\xi, \bar{u}_2(\xi))| d\xi \le$$

$$\le L \max_{x \in e} \int_{x_{j-1}}^{x_{j+1}} |\bar{u}_1(\xi) - \bar{u}_2(\xi)| G^h(x, \xi) d\xi \le L\|\bar{u}_1 - \bar{u}_2\|_{0,\infty,e} \max_{x \in e} \int_{x_{j-1}}^{x_{j+1}} G^h(x, \xi) d\xi,$$

где $e = [x_{j-1}, x_{j+1}]$. Так как

$$\int_{x_{j-1}}^{x_{j+1}} G^h(x, \xi) d\xi = \frac{1}{v_1^j(x_{j+1})}\left[v_1^j(x)\int_x^{x_{j+1}} v_2^j(\xi) d\xi + v_2^j(x)\int_{x_{j-1}}^x v_1^j(\xi) d\xi\right] \le$$

$$\le \frac{1}{c_1 v_1^j(x_{j+1})}\left[(x - x_{j-1})\int_x^{x_{j+1}} v_2^j(\xi) d\xi + (x_{j+1} - x)\int_{x_{j-1}}^x v_1^j(\xi) d\xi\right] \le \frac{(x - x_{j-1})(x_{j+1} - x)[v_2^j(x) + v_1^j(x)]}{c_1 v_1^j(x_{j+1})}$$

и $v_1^j(x) + v_2^j(x) = v_1^j(x_{j+1})$, то

$$\max_{x \in e} \int_{x_{j-1}}^{x_{j+1}} G^h(x, \xi) d\xi \le \frac{1}{c_1}\max_{x \in e}[(x - x_{j-1})(x_{j+1} - x)] = \frac{h^2}{c_1}.$$

Тогда

$$\|\mathfrak{B}_h(x, \bar{u}_1(\cdot)) - \mathfrak{B}_h(x, \bar{u}_2(\cdot))\|_{0,\infty,e} \le \frac{h^2 L}{c_1}\|\bar{u}_1 - \bar{u}_2\|_{0,\infty,e}.$$

На основании условия (2.6), $h^2L/c_1 < 1$ и, следовательно, оператор $\mathfrak{B}_h(x, u(\cdot))$ сжимающий и уравнение (2.8) или задача (2.7) имеет единственное решение. Но, с другой стороны, решением задачи (2.7) является единственное решение исходной краевой задачи (1.1). Лемма доказана.

С помощью леммы доказывается

Теорема 1. *Пусть выполнены условия леммы* 1; *тогда* $\forall h \in (0, h_0)$ *для задачи* (1.1), (1.2) *существует т. т. р. с. вида*

$$(au_{\bar{x}})_x = -T^x(f(\xi, u(\xi))), \quad x \in \omega_h, \quad u(0) = A, \quad u(1) = B, \tag{2.9}$$

где

$$a(x_j) = \left[\frac{1}{h} v_1^j(x_j)\right]^{-1}, \tag{2.10}$$

$$T^{x_j}(w(\xi)) = [h v_1^j(x_j)]^{-1} \int_{x_{j-1}}^{x_j} v_1^j(\xi) w(\xi) d\xi + [h v_2^j(x_j)]^{-1} \int_{x_j}^{x_{j+1}} v_2^j(\xi) w(\xi) d\xi;$$

функция $u(\xi)$ *в правой части* (2.9) *определяется согласно формуле* (2.4) *и зависит только от* $u(x_{j\pm 1})$, $u(x_j)$.

Доказательство. Подействуем оператором T^{x_j} на обе части уравнения (1.1); тогда (см., например, [5])

$$T^{x_j}\left(\frac{d}{d\xi}\left(k(\xi)\frac{du(\xi)}{d\xi}\right)\right) = -T^{x_j}(f(\xi, u(\xi))),$$

где

$$T^{x_j}\left(\frac{d}{d\xi}\left(k(\xi)\frac{du(\xi)}{d\xi}\right)\right) = (au_{\bar{x}})_{x,j},$$

что с учетом (2.4) доказывает утверждение.

Замечание 1. Достаточным условием существования и единственности решения задачи (1.1), (1.2) является

$$L/c_1 < 1. \tag{2.11}$$

Существование решения нелинейной т. т. р. с. (2.9) доказано в теореме 1, а единственность устанавливает

Лемма 2. *Пусть выполнены условия леммы* 1, *а также* (2.11); *тогда* $\exists h_1 \in (0, h_0)$ *такое, что* $\forall h \in (0, h_1]$ *т. т. р. с.* (2.9) *будет иметь единственное решение, которое может быть получено методом последовательных приближений*:

$$(au_{\bar{x}}^{(n)})_x = -T^x(f(\xi, u^{(n-1)}(\xi))), \quad x \in \omega_h, \quad u^{(n)}(0) = A, \quad u^{(n)}(1) = B,$$

$$u^{(n)}(x) = u^{(n)}_{j+(-1)^\alpha} + (-1)^{\alpha+1} b_\alpha^j(u^{(n)}) v_\alpha^j(x) + w_\alpha^j(x, u^{(n)}), \quad x \in [x_{j-2+\alpha}, x_{j-1+\alpha}], \quad \alpha = 1, 2,$$

$$n = 1, 2, \ldots, \quad u^{(0)}(x) = A(1-x) + Bx,$$

с оценкой погрешности

$$\|u^{(n)} - u\|_{1,\infty,(0,1)} = \max\left\{\|u^{(n)} - u\|_{0,\infty,(0,1)}, \left\|\frac{du^{(n)}}{dx} - \frac{du}{dx}\right\|_{0,\infty,(0,1)}\right\} \le \frac{q^n}{1-q}\|u^{(1)} - u^{(0)}\|_{1,\infty,(0,1)}, \tag{2.12}$$

где $q = L/c_1 < 1$.

Доказательство. Будем использовать принцип сжимающих отображений. Т. т. р. с. (2.9) запишем в виде

$$u(x) = \mathfrak{B}(x, u(\cdot)) = \sum_{\xi \in \omega_h} hG(x, \xi) T^\xi(f(\eta, u(\eta))) + A\frac{V_2(x)}{V_2(0)} + B\frac{V_1(x)}{V_1(1)},$$

где

$$G(x, \xi) = \frac{1}{V_1(1)}\begin{cases} V_1(x)V_2(\xi), & 0 \le x \le \xi, \\ V_1(\xi)V_2(x), & \xi \le x \le 1, \end{cases} \quad V_1(x) = \int_0^x \frac{dt}{k(t)}, \quad V_2(x) = \int_x^1 \frac{dt}{k(t)}.$$

Исследуем свойства оператора $\mathfrak{B}$.

Заметим, что оператор T^{ξ} обладает таким свойством: $\forall g(\xi) \in \overset{\circ}{H}_h$ и $w(\eta) \in L_1(0, 1)$ имеет место тождество

$$\sum_{\xi \in \omega_h} hT^{\xi}(w(\eta))g(\xi) = \int_0^1 \hat{g}(\eta)w(\eta)d\eta, \tag{2.13}$$

где

$$\hat{g}(\eta) = g(x_j)\frac{v_1^j(\eta)}{v_1^j(x_j)} + g(x_j - h)\frac{v_2^{j-1}(\eta)}{v_1^j(x_j)}, \quad x_{j-1} \le \eta \le x_j.$$

Действительно,

$$\sum_{j=1}^{N-1} h\frac{g(x_j)}{hv_1^j(x_j)}\int_{x_{j-1}}^{x_j} v_1^j(\eta)w(\eta)d\eta + \sum_{j=1}^{N-1} h\frac{g(x_j)}{hv_2^j(x_j)}\int_{x_j}^{x_{j+1}} v_2^j(\eta)w(\eta)d\eta =$$

$$= \sum_{j=1}^{N}\int_{x_{j-1}}^{x_j}\left[g(x_j)\frac{v_1^j(\eta)}{v_1^j(x_j)} + g(x_{j-1})\frac{v_2^{j-1}(\eta)}{v_2^{j-1}(x_{j-1})}\right]w(\eta)d\eta,$$

что с учетом принципа взаимности $v_2^{j-1}(x_{j-1}) = v_1^j(x_j)$ доказывает (2.13).

На основании (2.13) получаем

$$\mathfrak{B}(x, u(\cdot)) = \int_0^1 \hat{G}(x, \eta)f(\eta, u(\eta))d\eta + A\frac{V_2(x)}{V_2(0)} + B\frac{V_1(x)}{V_1(1)}, \tag{2.14}$$

$$\hat{G}(x, \eta) = G(x, x_j)\frac{v_1^j(\eta)}{v_1^j(x_j)} + G(x, x_{j-1})\frac{v_2^{j-1}(\eta)}{v_1^j(x_j)}, \quad x_{j-1} \le \eta \le x_j,$$

$$u(\eta) = u_{j-1} + b_1 v_1^j(\eta) + w_1^j(\eta, u), \quad x_{j-1} \le \eta \le x_j.$$

Тогда из (2.14) с учетом соотношений

$$G(x, \xi) \le \frac{1}{c_1}, \quad \left|\frac{\partial G(x, \xi)}{\partial x}\right| \le \frac{1}{c_1}, \quad v_1^j(\eta) + v_2^{j-1}(\eta) = v_1^j(x_j)$$

и условия Липшица получаем

$$\|\mathfrak{B}(x, u(\cdot)) - \mathfrak{B}(x, \tilde{u}(\cdot))\|_{1,\infty,(0,1)} \le \frac{1}{c_1}\int_0^1 |f(\eta, u(\eta)) - f(\eta, \tilde{u}(\eta))|d\eta \le$$

$$\le \frac{L}{c_1}\int_0^1 |u(\eta) - \tilde{u}(\eta)|d\eta \le \frac{L}{c_1}\|u - \tilde{u}\|_{1,\infty,(0,1)}.$$

Так как $q = L/c_1 < 1$, то отображение, которое осуществляет оператор $\mathfrak{B}(x, u(\cdot))$, сжимающее и, согласно принципу сжимающих отображений, т. т. р. с. имеет единственное решение, которое может быть получено методом последовательных приближений:

$$u^{(n)}(x) = \mathfrak{B}(x, u^{(n-1)}), \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Доказательство оценки скорости сходимости (2.12) очевидно.

Замечание 2. Условие (2.11), т.е. $|f(x, u) - f(x, v)| \le L < c_1$, должно выполнятся только $\forall u, v \in \Omega_u = \{v(x): \|v - u^{(0)}\|_{0,\infty,(0,1)} \le \|u^{(1)} - u^{(0)}\|_{0,\infty,(0,1)}(1 - q)^{-1}\}$, а не $\forall u, v \in \mathbb{R}_1$. В дальнейшем будем предполагать, что Ω_u определено именно так.

3. АЛГОРИТМИЧЕСКАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ Т. Т. Р. С.

Прежде всего учтем, что так как $m_\alpha^j(x) = k(x)dv_\alpha^j(x)/dx = (-1)^{\alpha+1}$, то, согласно [1],

$$\varphi(x_j, u) = T^{x_j}(f(\xi, u(\xi))) = h^{-1}\sum_{\alpha=1}^{2}(-1)^\alpha\left[l_\alpha^j(x_j, u) + (-1)^\alpha\frac{w_\alpha^j(x_j, u)}{v_\alpha^j(x_j)}\right]. \tag{3.1}$$

Тогда $\forall x_j \in \omega_h$ для построения т. т. р. с. (2.9), (2.10), (3.1) необходимо решить две задачи Коши (2.1), (2.3): одну ($\alpha = 1$) вперед на отрезке $[x_{j-1}, x_j]$, а другую ($\alpha = 2$) назад на отрезке $[x_j, x_{j+1}]$, причем обе имеют гладкие коэффициенты. Применим для их приближенного решения какой-либо одношаговый метод: разложения в ряд Тейлора или Рунге–Кутты $\{\bar{m} = 2[(m+1)/2]\}$-го порядка точности ($[\cdot]$ – целая часть). Для определенности изложение будем вести для метода разложения в ряд Тейлора.

Алгоритм решения задачи (2.1), (2.3) имеет следующий вид:

$$\begin{gathered}
w_\alpha^{(s)j}(x_j, u) = -\frac{h^2}{2}\frac{f_{j+(-1)^\alpha}}{k_{j+(-1)^\alpha}} + \sum_{p=3}^{s}\frac{[(-1)^{\alpha+1}h]^p}{p!}\frac{d^p w_\alpha^j(x_{j+(-1)^\alpha}, u, b_\alpha^{(s+1-p)})}{dx^p},\\
s = 2, 3, \ldots, \bar{m}, \quad \sum_{p=3}^{2} = 0, \quad w_\alpha^{(1)j}(x_j, u) = 0,\\
l_\alpha^{(s)j}(x_j, u) = (-1)^\alpha h f_{j+(-1)^\alpha} + \sum_{p=2}^{s}\frac{[(-1)^{\alpha+1}h]^p}{p!}\frac{d^p l_\alpha^j(x_{j+(-1)^\alpha}, u, b_\alpha^{(s-p)})}{dx^p},\\
s = 1, 2, \ldots, m, \quad \sum_{p=2}^{1} = 0, \quad l_\alpha^{(0)j}(x_j, u) = 0,
\end{gathered} \tag{3.2}$$

где

$$\begin{gathered}
b_\alpha^{(s-2)} = b_\alpha^{(s-2)j}(u) = [v_1^{(s-1)j}(x_{j+1})]^{-1}\{2hu_{\bar{x},j} + w_2^{(s-1)j}(x_j, u) - w_1^{(s-1)j}(x_j, u) +\\
+ (-1)^{\alpha+1}v_{3-\alpha}^{(s-1)j}(x_j)[l_2^{(s-2)j}(x_j, u) - l_1^{(s-2)j}(x_j, u)]\}, \quad s = 2, 3, \ldots, \bar{m}.
\end{gathered} \tag{3.3}$$

Имеет место

Лемма 3. *Пусть* $0 < c_1 \le k(x)$, $k(x) \in C^{m+1}[0, x_i] \cup C^{m+1}[x_i, 1]$, $f(x, u) \in C^m([0, x_i] \times \Omega_u) \cup C^m([x_i, 1] \times \times \Omega_u)$; *тогда справедливы соотношения*

$$v_\alpha^j(x_j) = v_\alpha^{(m)j}(x_j) + O(h^{m+1}) = (-1)^{\alpha+1}\sum_{p=1}^{m}\frac{[(-1)^{\alpha+1}h]^p}{p!}\left[\frac{d^{p-1}}{dx^{p-1}}\frac{1}{k(x)}\right]_{x_{j+(-1)^\alpha}} + O(h^{m+1}), \tag{3.4}$$

$$w_\alpha^j(x_j, u) = w_\alpha^{(\bar{m})j}(x_j, u) + (1 - \bar{m} + m)\frac{[(-1)^{\alpha+1}h]^{m+1}}{(m+1)!}\frac{d^{m+1}w_\alpha^j(x_{j+(-1)^\alpha}, u)}{dx^{m+1}} + O(h^{m+2}), \tag{3.5}$$

$$l_\alpha^j(x_j, u) = l_\alpha^{(m)j}(x_j, u) + O(h^{m+1}), \tag{3.6}$$

$$b_\alpha^j(u) = b_\alpha^{(m-1)j}(u) + O(h^m). \tag{3.7}$$

Доказательство. Для доказательства (3.4) разложим функции, стоящие слева, в ряд Тейлора в точках $x_{j+(-1)^\alpha}$ с использованием остаточного члена в интегральной форме:

$$v_\alpha^j(x_j) = \sum_{p=1}^{m}\frac{[(-1)^{\alpha+1}h]^p}{p!}\frac{d^p v_\alpha^j(x_{j+(-1)^\alpha})}{dx^p} + \frac{1}{m!}\int_{x_{j+(-1)^\alpha}}^{x_j}(x_j - t)^m\frac{d^{m+1}v_\alpha^j(t)}{dt^{m+1}}dt = v_\alpha^{(m)j}(x_j) + O(h^{m+1}).$$

Так как

$$\frac{d^p v_\alpha^j(x_{j+(-1)^\alpha})}{dx^p} = (-1)^{\alpha+1}\left[\frac{d^{p-1}}{dx^{p-1}}\frac{1}{k(x)}\right]_{x_{j+(-1)^\alpha}},$$

то получим (3.4).

Методом математической индукции докажем равенства

$$\begin{aligned} b_\alpha^j(u) &= b_\alpha^{(m-1)j}(u) + O(h^m), \\ w_\alpha^j(x_j, u) &= w_\alpha^{(m+1)j}(x_j, u) + O(h^{m+2}), \\ l_\alpha^j(x_j, u) &= l_\alpha^{(m)j}(x_j, u) + O(h^{m+1}), \quad m \geq 2. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Для $m = 2$ с учетом

$$w_\alpha^j(x_j, u) = -\frac{h^2}{2}\frac{f_{j+(-1)^\alpha}}{k_{j+(-1)^\alpha}} + \frac{1}{2!}\int\limits_{x_{j+(-1)^\alpha}}^{x_j}(x_j - t)^2\frac{d^3 w_\alpha^j(t, u)}{dt^3}dt = w_\alpha^{(2)j}(x_j, u) + O(h^3),$$

$$l_\alpha^j(x_j, u) = (-1)^\alpha h f_{j+(-1)^\alpha} + \int\limits_{x_{j+(-1)^\alpha}}^{x_j}(x_j - t)\frac{d^2 l_\alpha^j(t, u)}{dt^2}dt = l_\alpha^{(1)j}(x_j, u) + O(h^2)$$

имеем

$$\begin{aligned} b_\alpha^j(u) = {} & [v_1^{(2)j}(x_{j+1}) + O(h^3)]^{-1}\{2hu_{\bar{x},j} + w_2^{(2)j}(x_j, u) - w_1^{(2)j}(x_j, u) + O(h^3) + \\ & + (-1)^{\alpha+1}[v_{3-\alpha}^{(2)j}(x_j) + O(h^3)][l_2^{(1)j}(x_j, u) - l_2^{(1)j}(x_j, u) + O(h^2)]\} = b_\alpha^{(1)j}(u) + O(h^2). \end{aligned}$$

Используя предыдущее равенство и $b_\alpha^j(u) = b_\alpha^{(0)j}(u) + O(h)$, получаем

$$\begin{aligned} w_\alpha^{(3)j}(x_j, u) &= -\frac{h^2}{2}\frac{f_{j+(-1)^\alpha}}{k_{j+(-1)^\alpha}} + \frac{[(-1)^{\alpha+1}h]^3}{3!}\frac{d^3 w_\alpha^j(x_{j+(-1)^\alpha}, u, b_\alpha^{(1)})}{dx^3} = \\ &= -\frac{h^2}{2}\frac{f_{j+(-1)^\alpha}}{k_{j+(-1)^\alpha}} + \frac{[(-1)^{\alpha+1}h]^3}{3!}\frac{d^3 w_\alpha^j(x_{j+(-1)^\alpha}, u, b_\alpha + O(h^2))}{dx^3} = \\ &= -\frac{h^2}{2}\frac{f_{j+(-1)^\alpha}}{k_{j+(-1)^\alpha}} + \frac{[(-1)^{\alpha+1}h]^3}{3!}\frac{d^3 w_\alpha^j(x_{j+(-1)^\alpha}, u, b_\alpha)}{dx^3} + O(h^5), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} l_\alpha^{(2)j}(x_j, u) &= (-1)^\alpha h f_{j+(-1)^\alpha} + \frac{h^2}{2!}\frac{d^2 l_\alpha^j(x_{j+(-1)^\alpha}, u, b_\alpha^{(0)})}{dx^2} = \\ &= (-1)^\alpha h f_{j+(-1)^\alpha} + \frac{h^2}{2!}\frac{d^2 l_\alpha^j(x_{j+(-1)^\alpha}, u, b_\alpha + O(h))}{dx^2} = \\ &= (-1)^\alpha h f_{j+(-1)^\alpha} + \frac{h^2}{2!}\frac{d^2 l_\alpha^j(x_{j+(-1)^\alpha}, u, b_\alpha)}{dx^2} + O(h^3). \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} w_\alpha^j(x_j, u) &= -\frac{h^2}{2}\frac{f_{j+(-1)^\alpha}}{k_{j+(-1)^\alpha}} + \frac{[(-1)^{\alpha+1}h]^3}{3!}\frac{d^3 w_\alpha^j(x_{j+(-1)^\alpha}, u)}{dx^3} + \frac{1}{3!}\int\limits_{x_{j+(-1)^\alpha}}^{x_j}(x_j - t)^3\frac{d^4 w_\alpha^j(t, u)}{dt^4}dt = \\ &= w_\alpha^{(3)j}(x_j, u) + O(h^4), \end{aligned}$$

$$l_\alpha^j(x_j, u) = (-1)^\alpha h f_{j+(-1)^\alpha} + \frac{h^2}{2!}\frac{d^2 l_\alpha^j(x_{j+(-1)^\alpha}, u)}{dx^2} + \frac{1}{2!}\int\limits_{x_{j+(-1)^\alpha}}^{x_j} (x_j - t)^2 \frac{d^3 l_\alpha^j(t, u)}{dt^3} dt = l_\alpha^{(2)j}(x_j, u) + O(h^3).$$

Предположим, что (3.8) имеют место для всех $m < s$, и докажем справедливость этих равенств для $m = s$. Имеем

$$b_\alpha^j(u) = [v_1^{(s)j}(x_{j+1}) + O(h^{s+1})]^{-1}\{2hu_{\overset{\circ}{x},j} + w_2^{(s)j}(x_j, u) - w_1^{(s)j}(x_j, u) + O(h^{s+1}) +$$

$$+ (-1)^{\alpha+1}[v_{3-\alpha}^{(s)j}(x_j) + O(h^{s+1})][l_2^{(s-1)j}(x_j, u) - l_2^{(s-1)j}(x_j, u) + O(h^s)]\} = b_\alpha^{(s-1)j}(u) + O(h^s).$$

Так как

$$w_\alpha^{(s+1)j}(x_j, u) = -\frac{h^2}{2}\frac{f_{j+(-1)^\alpha}}{k_{j+(-1)^\alpha}} + \sum_{p=3}^{s+1}\frac{[(-1)^{\alpha+1}h]^p}{p!}\frac{d^p w_\alpha^j(x_{j+(-1)^\alpha}, u, b_\alpha^{(s+2-p)})}{dx^p} =$$

$$= -\frac{h^2}{2}\frac{f_{j+(-1)^\alpha}}{k_{j+(-1)^\alpha}} + \sum_{p=3}^{s+1}\frac{[(-1)^{\alpha+1}h]^p}{p!}\frac{d^p w_\alpha^j(x_{j+(-1)^\alpha}, u, b_\alpha + O(h^{s+3-p}))}{dx^p} =$$

$$= -\frac{h^2}{2}\frac{f_{j+(-1)^\alpha}}{k_{j+(-1)^\alpha}} + \sum_{p=3}^{s+1}\frac{[(-1)^{\alpha+1}h]^p}{p!}\frac{d^p w_\alpha^j(x_{j+(-1)^\alpha}, u, b_\alpha)}{dx^p} + O(h^{s+3}),$$

$$l_\alpha^{(s)j}(x_j, u) = (-1)^\alpha h f_{j+(-1)^\alpha} + \sum_{p=2}^{s}\frac{[(-1)^{\alpha+1}h]^p}{p!}\frac{d^p l_\alpha^j(x_{j+(-1)^\alpha}, u, b_\alpha^{(s-p)})}{dx^p} =$$

$$= (-1)^\alpha h f_{j+(-1)^\alpha} + \sum_{p=2}^{s}\frac{[(-1)^{\alpha+1}h]^p}{p!}\frac{d^p l_\alpha^j(x_{j+(-1)^\alpha}, u, b_\alpha + O(h^{s+1-p}))}{dx^p} =$$

$$= (-1)^\alpha h f_{j+(-1)^\alpha} + \sum_{p=2}^{s}\frac{[(-1)^{\alpha+1}h]^p}{p!}\frac{d^p l_\alpha^j(x_{j+(-1)^\alpha}, u, b_\alpha)}{dx^p} + O(h^{s+1}),$$

то

$$w_\alpha^j(x_j, u) = -\frac{h^2}{2}\frac{f_{j+(-1)^\alpha}}{k_{j+(-1)^\alpha}} + \sum_{p=3}^{s+1}\frac{[(-1)^{\alpha+1}h]^p}{p!}\frac{d^p w_\alpha^j(x_{j+(-1)^\alpha}, u)}{dx^p} + \frac{1}{(s+1)!}\int\limits_{x_{j+(-1)^\alpha}}^{x_j}(x_j - t)^{s+1}\frac{d^{s+2}w_\alpha^j(t, u)}{dt^{s+2}}dt =$$

$$= w_\alpha^{(s+1)j}(x_j, u) + O(h^{s+2}),$$

$$l_\alpha^j(x_j, u) = (-1)^\alpha h f_{j+(-1)^\alpha} + \sum_{p=2}^{s}\frac{[(-1)^{\alpha+1}h]^p}{p!}\frac{d^p l_\alpha^j(x_{j+(-1)^\alpha}, u)}{dx^p} +$$

$$+ \frac{1}{s!}\int\limits_{x_{j+(-1)^\alpha}}^{x_j}(x_j - t)^s\frac{d^{s+1}l_\alpha^j(t, u)}{dt^{s+1}}dt = l_\alpha^{(s)j}(x_j, u) + O(h^{s+1}).$$

Докажем соотношения (3.5). Если m нечетное, то $\overline{m} = m + 1$ и из (3.8) следует

$$w_\alpha^j(x_j, u) = w_\alpha^{(\overline{m})j}(x_j, u) + O(h^{m+2}).$$

Для четного $m = \bar{m}$ будем иметь

$$w_\alpha^j(x_j, u) = -\frac{h^2}{2}\frac{f_{j+(-1)^\alpha}}{k_{j+(-1)^\alpha}} + \sum_{p=3}^{m+1}\frac{[(-1)^{\alpha+1}h]^p}{p!}\frac{d^p w_\alpha^j(x_{j+(-1)^\alpha}, u)}{dx^p} +$$

$$+\frac{1}{(m+1)!}\int\limits_{x_{j+(-1)^\alpha}}^{x_j}(x_j - t)^{m+1}\frac{d^{m+2}w_\alpha^j(t, u)}{dt^{m+2}}dt =$$

$$= w_\alpha^{(\bar{m})j}(x_j, u) + \frac{[(-1)^{\alpha+1}h]^{m+1}}{(m+1)!}\frac{d^{m+1}w_\alpha^j(x_{j+(-1)^\alpha}, u)}{dx^{m+1}} + O(h^{m+2}).$$

Лемма доказана.

Вместо т. т. р. с. (2.9), (2.10), (3.1) можно теперь воспользоваться т. р. с. m-го ранга вида

$$(a^{(m)}y_{\bar{x}}^{(m)})_x = -\varphi^{(m)}(x, y^{(m)}), \quad x \in \omega_h, \quad y^{(m)}(0) = A, \quad y^{(m)}(1) = B, \quad a^{(m)}(x_j) = \left[\frac{1}{h}v_1^{(m)j}(x_j)\right]^{-1},$$

$$\varphi^{(m)}(x_j, y^{(m)}) = h^{-1}\sum_{\alpha=1}^{2}(-1)^\alpha\left[l_\alpha^{(m)j}(x_j, y^{(m)}) + (-1)^\alpha\frac{w_\alpha^{(\bar{m})j}(x_j, y^{(m)})}{v_\alpha^{(m)j}(x_j)}\right]. \tag{3.9}$$

Для доказательства существования и единственности решения т. р. с. (3.9), а также для установления ее точности понадобится следующая

Лемма 4. *Пусть выполнены условия леммы* 3, *тогда будут иметь место оценки*

$$\left|a^{(m)}(x_j) - a(x_j)\right| \le Mh^m, \tag{3.10}$$

$$\left|\varphi^{(m)}(x_j, u) - \varphi(x_j, u)\right| \le Mh^m \quad \forall u \in \Omega_u, \tag{3.11}$$

если m нечетное, и

$$\varphi^{(m)}(x_j, u) - \varphi(x_j, u) = \left\{h^m\frac{k(x_j - 0)}{(m+1)!}\frac{d^m}{dx^m}\left[\frac{l_2^{j-1}(x, u)}{k(x)}\right]_{x_j - 0}\right\}_x + O(h^m), \tag{3.12}$$

если m четное; кроме того,

$$\left|\varphi^{(m)}(x_j, u) - \varphi^{(m)}(x_j, v)\right| \le (L + Mh)\|u - v\|_{1,\infty,\omega_h} \quad \forall u, v \in \Omega_u, \tag{3.13}$$

$$\left|b_1^{(m-1)j}(u) + l_1^{(m)j}(x_j, u) - b_1^{(m-1)j}(v) - l_1^{(m)j}(x_j, v)\right| \le M\|u - v\|_{1,\infty,\omega_h} \quad \forall u, v \in \Omega_u, \tag{3.14}$$

где постоянная M не зависит от h.

Доказательство. Неравенство (3.10) следует из (3.4). Докажем (3.11). Заметим, что

$$\varphi^{(m)}(x_j, u) - \varphi(x_j, u) = \frac{1}{h}\sum_{\alpha=1}^{2}(-1)^\alpha\left\{l_\alpha^{(m)j}(x_j, u) - l_\alpha^j(x_j, u) + (-1)^\alpha\left[\frac{w_\alpha^{(\bar{m})j}(x_j, u)}{v_\alpha^{(m)j}(x_j)} - \frac{w_\alpha^j(x_j, u)}{v_\alpha^j(x_j)}\right]\right\}. \tag{3.15}$$

Из леммы 3 имеем

$$l_\alpha^j(x_j, u) - l_\alpha^{(m)j}(x_j, u) = O(h^{m+1}),$$

$$\frac{w_\alpha^j(x_j, u)}{v_\alpha^j(x_j)} - \frac{w_\alpha^{(\bar{m})j}(x_j, u)}{v_\alpha^{(m)j}(x_j)} = (1 - \bar{m} + m)\frac{[(-1)^{\alpha+1}h]^{m+1}}{(m+1)!}\frac{d^{m+1}w_\alpha^j(x_{j+(-1)^\alpha}, u)}{dx^{m+1}}\frac{1}{v_\alpha^{(m)j}(x_j)} + O(h^{m+1}). \tag{3.16}$$

Соотношения (3.15), (3.16) и $v_1^{(m)j}(x_j) = h/k_{j-1} + O(h^2)$, $v_2^{(m)j}(x_j) = h/k_{j+1} + O(h^2)$ при нечетном m приводят к (3.11), а при четном m – к выражению

$$\varphi^{(m)}(x_j, u) - \varphi(x_j, u) = \frac{h^{m-1}}{(m+1)!}\left[k_j\frac{d^{m+1}w_2^j(x_{j+1}, u)}{dx^{m+1}} - k_{j-1}\frac{d^{m+1}w_1^j(x_{j-1}, u)}{dx^{m+1}}\right] + O(h^m). \tag{3.17}$$

Дифференцируя (2.4) для $x \in [x_{j-1}, x_j]$, получаем

$$\frac{d^{m+1}u(x)}{dx^{m+1}} = b_1^j(u)\frac{d^m}{dx^m}\left[\frac{1}{k(x)}\right] + \frac{d^{m+1}w_1^j(x,u)}{dx^{m+1}},$$

или

$$\frac{d^{m+1}u(x)}{dx^{m+1}} = b_2^{j-1}(u)\frac{d^m}{dx^m}\left[\frac{1}{k(x)}\right] + \frac{d^{m+1}w_2^{j-1}(x,u)}{dx^{m+1}}.$$

Исключим из последних двух равенство $d^{m+1}u(x)/dx^{m+1}$, тогда

$$\frac{d^{m+1}w_1^j(x,u)}{dx^{m+1}} - \frac{d^{m+1}w_2^{j-1}(x,u)}{dx^{m+1}} = [b_2^{j-1}(u) - b_1^j(u)]\frac{d^m}{dx^m}\left[\frac{1}{k(x)}\right] = O(h).$$

Так как при условиях леммы 3 с учетом последнего равенства верно

$$k(x_{j-1}+0)\frac{d^{m+1}w_1^j(x_{j-1}+0,u)}{dx^{m+1}} - k(x_j-0)\frac{d^{m+1}w_2^{j-1}(x_j-0,u)}{dx^{m+1}} = O(h),$$

то из (3.17) следует (3.12).

Докажем неравенства (3.13). Поскольку

$$\varphi^{(m)}(x_j,u) = h^{-1}\sum_{\alpha=1}^{2}(-1)^\alpha\left[l_\alpha^{(m)j}(x_j,u) + (-1)^\alpha\frac{w_\alpha^{(\bar m)j}(x_j,u)}{v_\alpha^{(m)j}(x_j)}\right] =$$

$$= \sum_{\alpha=1}^{2}(-1)^\alpha\left\{\frac{(-1)^\alpha}{2}\left[1 + \frac{v_\alpha^{(m)j}(x_j) - v_\alpha^{(1)j}(x_j)}{v_\alpha^{(m)j}(x_j)}\right]f(x_{j+(-1)^\alpha},u) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{h}\sum_{p=2}^{m}\frac{[(-1)^{\alpha+1}h]^p}{p!}\frac{d^p l_\alpha^j(x_{j+(-1)^\alpha},u,b_\alpha^{(m-p)})}{dx^p} + \frac{(-1)^\alpha}{hv_\alpha^{(m)j}(x_j)}\sum_{p=3}^{\bar m}\frac{[(-1)^{\alpha+1}h]^p}{p!}\frac{d^p w_\alpha^j(x_{j+(-1)^\alpha},u,b_\alpha^{(\bar m+1-p)})}{dx^p}\right\},$$

то

$$\left|\varphi^{(m)}(x_j,u) - \varphi^{(m)}(x_j,v)\right| \le$$

$$\le \sum_{\alpha=1}^{2}\left\{\frac{1}{2}\left|f(x_{j+(-1)^\alpha},u) - f(x_{j+(-1)^\alpha},v)\right|\left[1 + \frac{\left|v_\alpha^{(m)j}(x_j) - v_\alpha^j(x_j)\right|}{\left|v_\alpha^{(m)j}(x_j)\right|} + \frac{\left|v_\alpha^j(x_j) - v_\alpha^{(1)j}(x_j)\right|}{\left|v_\alpha^{(m)j}(x_j)\right|}\right] + \right.$$

$$+ \frac{1}{h}\sum_{p=2}^{m}\frac{h^p}{p!}\left|\frac{d^p l_\alpha^j(x_{j+(-1)^\alpha},u,b_\alpha^{(m-p)j}(u))}{dx^p} - \frac{d^p l_\alpha^j(x_{j+(-1)^\alpha},v,b_\alpha^{(m-p)j}(v))}{dx^p}\right| +$$

$$\left. + \frac{1}{hv_\alpha^{(m)j}(x_j)}\sum_{p=3}^{\bar m}\frac{h^p}{p!}\left|\frac{d^p w_\alpha^j(x_{j+(-1)^\alpha},u,b_\alpha^{(\bar m+1-p)j}(u))}{dx^p} - \frac{d^p w_\alpha^j(x_{j+(-1)^\alpha},v,b_\alpha^{(\bar m+1-p)j}(v))}{dx^p}\right|\right\}.$$

С учетом условий леммы имеем

$$\left|\varphi^{(m)}(x_j,u) - \varphi^{(m)}(x_j,v)\right| \le (L + Kh^m + Kh)\|u-v\|_{0,\infty,\omega_h} +$$

$$+ \frac{1}{h}\sum_{p=2}^{m}\frac{h^p}{p!}\left|\frac{d^p l_\alpha^j(x_{j+(-1)^\alpha},u,b_\alpha^{(m-p)j}(u))}{dx^p} - \frac{d^p l_\alpha^j(x_{j+(-1)^\alpha},v,b_\alpha^{(m-p)j}(v))}{dx^p}\right| + \tag{3.18}$$

$$+ \frac{c_2}{h^2}\sum_{p=3}^{\bar m}\frac{h^p}{p!}\left|\frac{d^p w_\alpha^j(x_{j+(-1)^\alpha},u,b_\alpha^{(\bar m+1-p)j}(u))}{dx^p} - \frac{d^p w_\alpha^j(x_{j+(-1)^\alpha},v,b_\alpha^{(\bar m+1-p)j}(v))}{dx^p}\right|.$$

Докажем по индукции неравенства

$$\left|b_\alpha^{(m-1)j}(u) - b_\alpha^{(m-1)j}(v)\right| \le B_{m-1}\|u - v\|_{1,\infty,\omega_h},$$

$$\sum_{p=3}^{m+1}\frac{h^p}{p!}\left|\frac{d^p w_\alpha^j(x_{j+(-1)^\alpha}, u, b_\alpha^{(m+2-p)j}(u))}{dx^p} - \frac{d^p w_\alpha^j(x_{j+(-1)^\alpha}, v, b_\alpha^{(m+2-p)j}(v))}{dx^p}\right| \le M_{m+1}h^3\|u - v\|_{1,\infty,\omega_h}, \quad (3.19)$$

$$\sum_{p=2}^{m}\frac{h^p}{p!}\left|\frac{d^p l_\alpha^j(x_{j+(-1)^\alpha}, u, b_\alpha^{(m-p)j}(u))}{dx^p} - \frac{d^p l_\alpha^j(x_{j+(-1)^\alpha}, v, b_\alpha^{(m-p)j}(v))}{dx^p}\right| \le L_m h^2\|u - v\|_{1,\infty,\omega_h},$$

где константы B_{m-1}, M_{m+1}, L_m не зависят от h.

Пусть $m = 2$. Учитывая

$$\left|w_\alpha^{(2)j}(x_j, u) - w_\alpha^{(2)j}(x_j, v)\right| \le \frac{h^2}{2c_1}\left|f(x_{j+(-1)^\alpha}, u) - f(x_{j+(-1)^\alpha}, v)\right| \le \frac{Lh^2}{2c_1}\|u - v\|_{0,\infty,\omega_h},$$

$$\left|l_\alpha^{(1)j}(x_j, u) - l_\alpha^{(1)j}(x_j, v)\right| \le h\left|f(x_{j+(-1)^\alpha}, u) - f(x_{j+(-1)^\alpha}, v)\right| \le Lh\|u - v\|_{0,\infty,\omega_h},$$

имеем

$$\left|b_\alpha^{(1)j}(u) - b_\alpha^{(1)j}(v)\right| \le \frac{c_3}{h}[2h\|u_{\bar x} - v_{\bar x}\|_{0,\infty,\omega_h} + \left|w_2^{(2)j}(x_j, u) - w_2^{(2)j}(x_j, v)\right| + \left|w_1^{(2)j}(x_j, u) - w_1^{(2)j}(x_j, v)\right|] +$$

$$+ c_4[\left|l_2^{(1)j}(x_j, u) - l_2^{(1)j}(x_j, v)\right| + \left|l_1^{(1)j}(x_j, u) - l_1^{(1)j}(x_j, v)\right|] \le$$

$$\le 2c_3\|u_{\bar x} - v_{\bar x}\|_{0,\infty,\omega_h^+} + \frac{Lc_3h}{c_1}\|u - v\|_{0,\infty,\omega_h} + 2Lc_4h\|u - v\|_{0,\infty,\omega_h} \le B_1\|u - v\|_{1,\infty,\omega_h}.$$

Используя формулу конечных приращений и предыдущее неравенство, получаем

$$\frac{h^3}{3!}\left|\frac{d^3 w_\alpha^j(x_{j+(-1)^\alpha}, u, b_\alpha^{(1)j}(u))}{dx^3} - \frac{d^3 w_\alpha^j(x_{j+(-1)^\alpha}, v, b_\alpha^{(1)j}(v))}{dx^3}\right| \le$$

$$\le \frac{h^3}{3!}\left\{\left|\frac{\partial}{\partial u}\left[\frac{d^3 w_\alpha^j(x_{j+(-1)^\alpha}, \tilde u, b_\alpha^{(1)j}(u))}{dx^3}\right]\right|\|u - v\|_{0,\infty,\omega_h} +\right.$$

$$\left. + \left|\frac{\partial}{\partial b_\alpha^{(1)j}(u)}\left[\frac{d^3 w_\alpha^j(x_{j+(-1)^\alpha}, v, b_\alpha^{(1)j}(\tilde u))}{dx^3}\right]\right|\left|b_\alpha^{(1)j}(u) - b_\alpha^{(1)j}(v)\right|\right\} \le M_3h^3\|u - v\|_{1,\infty,\omega_h},$$

где $\tilde u = \tilde u_{j+(-1)^\alpha} = \theta u_{j+(-1)^\alpha} + (1-\theta)v_{j+(-1)^\alpha}$, $0 < \theta < 1$. Аналогично, с учетом

$$\left|b_\alpha^{(0)j}(u) - b_\alpha^{(0)j}(v)\right| \le 2c_3\|u_{\bar x} - v_{\bar x}\|_{0,\infty,\omega_h^+} \le B_0\|u - v\|_{1,\infty,\omega_h}$$

будем иметь

$$\frac{h^2}{2!}\left|\frac{d^2 l_\alpha^j(x_{j+(-1)^\alpha}, u, b_\alpha^{(0)j}(u))}{dx^2} - \frac{d^2 l_\alpha^j(x_{j+(-1)^\alpha}, v, b_\alpha^{(0)j}(v))}{dx^2}\right| \le$$

$$\le \frac{h^2}{2!}\left\{\left|\frac{\partial}{\partial u}\left[\frac{d^2 l_\alpha^j(x_{j+(-1)^\alpha}, \bar u, b_\alpha^{(0)j}(u))}{dx^2}\right]\right|\|u - v\|_{0,\infty,\omega_h} +\right.$$

$$\left. + \left|\frac{\partial}{\partial b_\alpha^{(0)j}(u)}\left[\frac{d^2 l_\alpha^j(x_{j+(-1)^\alpha}, v, b_\alpha^{(0)j}(\bar u))}{dx^2}\right]\right|\left|b_\alpha^{(0)j}(u) - b_\alpha^{(0)j}(v)\right|\right\} \le L_2h^2\|u - v\|_{1,\infty,\omega_h},$$

где

$$\bar u = \bar u_{j+(-1)^\alpha} = \theta u_{j+(-1)^\alpha} + (1-\theta)v_{j+(-1)^\alpha}, \quad 0 < \theta < 1.$$

Пусть неравенства (3.19) имеют место для всех $m < s$. Так как

$$\left|w_\alpha^{(s)j}(x_j, u) - w_\alpha^{(s)j}(x_j, v)\right| \le \frac{h^2}{2c_1}\left|f(x_{j+(-1)^\alpha}, u) - f(x_{j+(-1)^\alpha}, v)\right| +$$

$$+ \sum_{p=3}^{s} \frac{h^p}{p!}\left|\frac{d^p w_\alpha^j(x_{j+(-1)^\alpha}, u, b_\alpha^{(s+1-p)j}(u))}{dx^p} - \frac{d^p w_\alpha^j(x_{j+(-1)^\alpha}, v, b_\alpha^{(s+1-p)j}(v))}{dx^p}\right| \le$$

$$\le \frac{Lh^2}{2c_1}\|u - v\|_{0,\infty,\omega_h} + M_s h^3 \|u - v\|_{1,\infty,\omega_h},$$

$$\left|l_\alpha^{(s-1)j}(x_j, u) - l_\alpha^{(s-1)j}(x_j, v)\right| \le h\left|f(x_{j+(-1)^\alpha}, u) - f(x_{j+(-1)^\alpha}, v)\right| +$$

$$+ \sum_{p=2}^{s-1} \frac{h^p}{p!}\left|\frac{d^p l_\alpha^j(x_{j+(-1)^\alpha}, u, b_\alpha^{(s-1-p)j}(u))}{dx^p} - \frac{d^p l_\alpha^j(x_{j+(-1)^\alpha}, v, b_\alpha^{(s-1-p)j}(v))}{dx^p}\right| \le$$

$$\le Lh\|u - v\|_{0,\infty,\omega_h} + L_{s-1}h^2\|u - v\|_{1,\infty,\omega_h},$$

то

$$\left|b_\alpha^{(s-1)j}(u) - b_\alpha^{(s-1)j}(v)\right| \le \frac{c_3}{h}[2h\|u_{\bar x} - v_{\bar x}\|_{0,\infty,\omega_h^+} + \left|w_2^{(s)j}(x_j, u) - w_2^{(s)j}(x_j, v)\right| + \left|w_1^{(s)j}(x_j, u) - w_1^{(s)j}(x_j, v)\right|] +$$

$$+ c_4[\left|l_2^{(s-1)j}(x_j, u) - l_2^{(s-1)j}(x_j, v)\right| + \left|l_1^{(s-1)j}(x_j, u) - l_1^{(s-1)j}(x_j, v)\right|] \le 2c_3\|u_{\bar x} - v_{\bar x}\|_{0,\infty,\omega_h^+} +$$

$$+ \frac{Lc_3 h}{c_1}\|u - v\|_{0,\infty,\omega_h} + 2M_s c_3 h^2\|u - v\|_{1,\infty,\omega_h} + 2Lc_4 h\|u - v\|_{0,\infty,\omega_h} + 2L_{s-1}c_4 h^2\|u - v\|_{1,\infty,\omega_h} \le$$

$$\le B_{s-1}\|u - v\|_{1,\infty,\omega_h}.$$

Тогда, по формуле конечных приращений, найдутся $\tilde u$, $\bar u$ такие, что

$$\sum_{p=3}^{s+1} \frac{h^p}{p!}\left|\frac{d^p w_\alpha^j(x_{j+(-1)^\alpha}, u, b_\alpha^{(s+2-p)j}(u))}{dx^p} - \frac{d^p w_\alpha^j(x_{j+(-1)^\alpha}, v, b_\alpha^{(s+2-p)j}(v))}{dx^p}\right| \le$$

$$\le \sum_{p=3}^{s+1} \frac{h^p}{p!}\left\{\left|\frac{\partial}{\partial u}\left[\frac{d^p w_\alpha^j(x_{j+(-1)^\alpha}, \tilde u, b_\alpha^{(s+2-p)j}(u))}{dx^p}\right]\right|\|u - v\|_{0,\infty,\omega_h} +\right.$$

$$\left. + \left|\frac{\partial}{\partial b_\alpha^{(s+2-p)j}(u)}\left[\frac{d^p w_\alpha^j(x_{j+(-1)^\alpha}, v, b_\alpha^{(s+2-p)j}(\tilde u))}{dx^p}\right]\right|\left|b_\alpha^{(s+2-p)j}(u) - b_\alpha^{(s+2-p)j}(v)\right|\right\} \le M_{s+1}h^3\|u - v\|_{1,\infty,\omega_h},$$

$$\sum_{p=2}^{s} \frac{h^p}{p!}\left|\frac{d^p l_\alpha^j(x_{j+(-1)^\alpha}, u, b_\alpha^{(s-p)j}(u))}{dx^p} - \frac{d^p l_\alpha^j(x_{j+(-1)^\alpha}, v, b_\alpha^{(s-p)j}(v))}{dx^p}\right| \le$$

$$\le \sum_{p=2}^{s} \frac{h^p}{p!}\left\{\left|\frac{\partial}{\partial u}\left[\frac{d^p l_\alpha^j(x_{j+(-1)^\alpha}, \bar u, b_\alpha^{(s-p)j}(u))}{dx^p}\right]\right|\|u - v\|_{0,\infty,\omega_h} +\right.$$

$$\left. + \left|\frac{\partial}{\partial b_\alpha^{(s-p)j}(u)}\left[\frac{d^p l_\alpha^j(x_{j+(-1)^\alpha}, v, b_\alpha^{(s-p)j}(\bar u))}{dx^p}\right]\right|\left|b_\alpha^{(s-p)j}(u) - b_\alpha^{(s-p)j}(v)\right|\right\} \le L_s h^2\|u - v\|_{1,\infty,\omega_h}.$$

Неравенства (3.19) доказаны.

Из (3.18), (3.19) следует

$$\left|\varphi^{(m)}(x_j, u) - \varphi^{(m)}(x_j, v)\right| \le (L + Kh^m + Kh)\|u - v\|_{0,\infty,\omega_h} + L_m h\|u - v\|_{1,\infty,\omega_h} + c_2 M_{\bar m} h\|u - v\|_{1,\infty,\omega_h} \le$$

$$\le (L + Mh)\|u - v\|_{1,\infty,\omega_h}.$$

Оценка (3.14) следует из (3.19). Действительно,

$$\left|b_1^{(m-1)j}(u) + l_1^{(m)j}(x_j, u) - b_1^{(m-1)j}(v) - l_1^{(m)j}(x_j, v)\right| \le$$

$$\le \left|b_1^{(m-1)j}(u) - b_1^{(m-1)j}(v)\right| + \left|l_1^{(m)j}(x_j, u) - l_1^{(m)j}(x_j, v)\right| \le$$

$$\le B_{m-1}\|u - v\|_{1,\infty,\omega_h} + Lh\|u - v\|_{0,\infty,\omega_h} + L_m h^2\|u - v\|_{1,\infty,\omega_h} \le M\|u - v\|_{1,\infty,\omega_h}.$$

На основании предыдущих утверждений доказывается

Теорема 2. *Пусть выполнены условия лемм* 1, 3, (2.11) и $d\varphi^{(m)}(x, u)/du \le 0$ $\forall x \in [0, 1]$, $u \in \Omega_u$, *тогда т. р. с.* (3.9), (3.2), (3.3) *имеет единственное решение, точность которого характеризуется оценкой*

$$\|y^{(m)} - u\|^*_{1,\infty,\omega_h} = \max\left\{\|y^{(m)} - u\|_{0,\infty,\omega_h}, \left\|k\frac{dy^{(m)}}{dx} - k\frac{du}{dx}\right\|_{0,\infty,\omega_h}\right\} \le Mh^m,$$

где

$$k(x_j)\frac{dy^{(m)}(x_j)}{dx} = b_1^{(m-1)j}(y^{(m)}) + l_1^{(m)j}(x_j, y^{(m)}).$$

Доказательство. Пусть $u(x)$ – решение задачи (2.9), а $y^{(m)}(x)$ – решение задачи (3.9). Для погрешности $z(x) = y^{(m)}(x) - u(x)$ $(x \in \omega_h)$ приходим к задаче

$$[a^{(m)}(x)z_{\bar{x}}(x)]_x + \frac{\partial\varphi^{(m)}(x, \tilde{u})}{\partial u}z = -\varphi^{(m)}(x, u) + \varphi(x, u) + [(a(x) - a^{(m)}(x))u_{\bar{x}}(x)]_x,$$

$$z(0) = z(1) = 0,$$

где $\tilde{u} = \theta y^{(m)} + (1 - \theta)u$ $(0 < \theta < 1)$. Решение этой задачи с помощью разностной функции Грина $\tilde{G}(x, \xi)$ (см., например, [5]) можно представить в виде

$$z(x) = \sum_{\xi \in \omega_h} h\tilde{G}(x, \xi)\{-\varphi^{(m)}(\xi, u) + \varphi(\xi, u) + [(a(\xi) - a^{(m)}(\xi))u_{\bar{\xi}}(\xi)]_{\bar{\xi}}\} =$$

$$= -\sum_{\xi \in \omega_h^+} h\tilde{G}_{\bar{\xi}}(x, \xi)[a(\xi) - a^{(m)}(\xi)]u_{\bar{\xi}}(\xi) + \sum_{\xi \in \omega_h} h\tilde{G}(x, \xi)[-\varphi^{(m)}(\xi, u) + \varphi(\xi, u)].$$

Для нечетного m с учетом (3.11) из последнего равенства следует, что $z(x) = O(h^m)$. Если m четное, то, используя (3.12), получаем

$$z(x) = -\sum_{\xi \in \omega_h^+} h\tilde{G}_{\bar{\xi}}(x, \xi)\left\{[a(\xi) - a^{(m)}(\xi)]u_{\bar{\xi}}(\xi) - h^m\frac{k(\xi - 0)}{(m+1)!}\frac{d^m}{dx^m}\left[\frac{l_2^{j-1}(x, u)}{k(x)}\right]_{\xi-0}\right\} + O(h^m) = O(h^m).$$

Аналогично,

$$z_{\bar{x}} = \sum_{\xi \in \omega_h^+} h\tilde{G}_{\bar{x}\bar{\xi}}(x, \xi)[a(\xi) - a^{(m)}(\xi)]u_{\bar{\xi}}(\xi) + \frac{1}{a^{(m)}(x)}[a(x) - a^{(m)}(x)]u_{\bar{x}}(x) +$$

$$+ \sum_{\xi \in \omega_h} h\tilde{G}_{\bar{x}}(x, \xi)[-\varphi^{(m)}(\xi, u) + \varphi(\xi, u)] = O(h^m),$$

где учтены оценки для $G_{\bar{x}\bar{\xi}}(x, \xi)$ (см. [2]). Так как, с учетом (3.14),

$$\left|k(x)\frac{dz}{dx}\right| = \left|b_1^{(m-1)j}(y^{(m)}) + l_1^{(m)j}(x, y^{(m)}) - b_1^j(u) - l_1^j(x, u)\right| =$$

$$= \left|b_1^{(m-1)j}(y^{(m)}) + l_1^{(m)j}(x, y^{(m)}) - b_1^{(m-1)j}(u) - l_1^{(m)j}(x, u)\right| +$$

$$+\left|b_1^{(m-1)j}(u)-b_1^j(u)\right|+\left|l_1^{(m)j}(x,u)-l_1^j(x,u)\right|\le$$

$$\le M\|z\|_{1,\infty,\omega_h}+\left|b_1^{(m-1)j}(u)-b_1^j(u)\right|+\left|l_1^{(m)j}(x,u)-l_1^j(x,u)\right|,$$

то, используя (3.6), (3.7) и то, что $z(x)=O(h^m)$, $z_{\bar x}(x)=O(h^m)$, получаем $\|z\|^*_{1,\infty,\omega_h}\le Mh^m$.

Решение нелинейной т. р. с. m-го порядка точности (3.9), (3.2), (3.3) может быть найдено методом последовательных приближений.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия теоремы* 2, *тогда* $\exists h_1\in(0,h_0)$ *такое, что* $\forall h\in(0,h_1]$ *метод последовательных приближений*

$$(a^{(m)}y^{(m,n)}_{\bar x})_x=-\varphi^{(m)}(x,y^{(m,n-1)}),\quad x\in\omega_h,\quad y^{(m,n)}(0)=A,$$

$$y^{(m,n)}(1)=B,\quad n=1,2,\ldots,\quad y^{(m,0)}(x)=A(1-x)+Bx$$

сходится и имеет место оценка

$$\|y^{(m,n)}-u\|^*_{1,\infty,\omega_h}\le M(h^m+q^n),\tag{3.20}$$

где постоянная M не зависит от h, m, n, а величина $q<1$.

Доказательство. В силу теоремы 2 имеем

$$\begin{aligned}\|y^{(m,n)}-u\|^*_{1,\infty,\omega_h}&\le\|y^{(m)}-u\|^*_{1,\infty,\omega_h}+\|y^{(m,n)}-y^{(m)}\|^*_{1,\infty,\omega_h}\le\\&\le Mh^m+\|y^{(m,n)}-y^{(m)}\|^*_{1,\infty,\omega_h}\le Mh^m+\|y^{(m,n)}-y^{(m)}\|^*_{1,\infty,\omega_h}.\end{aligned}\tag{3.21}$$

Используем принцип сжимающих отображений. Рассмотрим операторное уравнение

$$y^{(m)}(x)=\mathfrak{B}_h(x,y(\cdot))=\sum_{\xi\in\omega_h}hG^{(m)}(x,\xi)\varphi^{(m)}(\xi,y^{(m)}(\xi))+A\frac{V_2(x)}{V_2(0)}+B\frac{V_1(x)}{V_1(1)},$$

где $G^{(m)}(x,\xi)$ – функция Грина задачи (3.9). Учитывая

$$G^{(m)}(x,\xi)\le 1/c_1+ch,\quad \left|G^{(m)}_{\bar x}(x,\xi)\right|\le 1/c_1+ch,\quad ch<1/c_1,$$

и неравенство (3.13), имеем

$$\begin{aligned}\|\mathfrak{B}_h(x,y^{(m)}(\cdot))-\mathfrak{B}_h(x,\tilde y^{(m)}(\cdot))\|_{1,\infty,\omega_h}&\le(1/c_1+ch)\max_{\xi\in\omega_h}\left|\varphi^{(m)}(\xi,y^{(m)})-\varphi^{(m)}(\xi,\tilde y^{(m)})\right|\le\\&\le(1/c_1+ch)(L+Mh)\|y^{(m)}-\tilde y^{(m)}\|_{1,\infty,\omega_h}.\end{aligned}$$

Если выбрать h_1 таким, что $q=(1/c_1+ch)(L+Mh)<1$, то отображение $\mathfrak{B}_h$ сжимающее.

Таким образом, последовательность приближений

$$y^{(m,n)}(x)=\mathfrak{B}_h(x,y^{(m,n-1)}),\quad n=1,2,\ldots,$$

сходится и имеет место оценка скорости сходимости

$$\|y^{(m;n)}-y^{(m)}\|_{1,\infty,\omega_h}\le\frac{q^n}{1-q}\|y^{(m,1)}-y^{(m,0)}\|_{1,\infty,\omega_h}.$$

Тогда с учетом (3.14) получаем

$$\begin{aligned}\left|k(x)\frac{dy^{(m,n)}}{dx}-k(x)\frac{dy^{(m)}}{dx}\right|&=\left|b_1^{(m-1)j}(y^{(m,n)})+l_1^{(m)j}(x_j,y^{(m,n)})-b_1^{(m-1)j}(y^{(m)})-l_1^{(m)j}(x_j,y^{(m)})\right|\le\\&\le M\|y^{(m,n)}-y^{(m)}\|_{1,\infty,\omega_h}\le\frac{Mq^n}{1-q}\|y^{(m,1)}-y^{(m,0)}\|_{1,\infty,\omega_h}.\end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\|y^{(m,n)}-y^{(m)}\|^*_{1,\infty,\omega_h}\le Mq^n.\tag{3.22}$$

Из неравенства (3.21), (3.22) следует оценка (3.20).

Таблица 1

N	er	p
2^3	0.1702(–4)	
2^4	0.1347(–5)	3.7
2^5	0.9375(–7)	3.8
2^6	0.6166(–8)	3.9
2^7	0.3932(–9)	4.0
2^8	0.2431(–10)	4.0
2^9	0.1329(–11)	4.2

4. ЧИСЛЕННЫЙ ПРИМЕР

Используем схему четвертого порядка точности для вычисления приближенного решения модельной краевой задачи

$$\frac{d^2u}{dx^2} = e^u, \quad u(0) = 0, \quad u(1) = -\ln\cos^2(1/\sqrt{2})$$

с точнвым решением $u(x) = -\ln\cos^2(x/\sqrt{2})$.

Для практической оценки скорости сходимости введены величины

$$\mathrm{er} = \left\|z^{(4)}\right\|^*_{1,\infty,\omega_h} = \left\|y^{(4)} - u\right\|^*_{1,\infty,\omega_h} \quad p = \log_2\left(\left\|z^{(4)}\right\|^*_{1,\infty,\omega_h} / \left\|z^{(4)}\right\|^*_{1,\infty,\omega_{h/2}}\right).$$

Результаты расчетов приведены в табл. 1. Видно, что результаты теоретических исследований для метода 4-го порядка точности подтверждает численный эксперимент.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Макаров В.Л., Самарский А.А.* О реализации точных трехточечных разностных схем для обыкновенных дифференциальных уравнений 2-го порядка с кусочно-гладкими коэффициентами // Докл. АН СССР. 1990. Т. 312. № 3. С. 538–543.
2. *Самарский А.А., Макаров В.Л.* О реализации точных трехточечных разностных схем для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с кусочно-гладкими коэффициентами // Дифференц. ур-ния. 1990. Т. 26. № 7. С. 1254–1265.
3. *Макаров В.Л., Самарский А.А.* Точные трехточечные разностные схемы для нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений 2-го порядка и их реализация // Докл. АН СССР. 1990. Т. 312. № 4. С. 795–800.
4. *Iyengar S.R.K., Pillai A.C.R.* Difference schemes of polynomial and exponential orders // Appl. Math. Modelling. 1989. V. 13. № 1. P. 58–62.
5. *Самарский А.А., Лазаров Р.Д., Макаров В.Л.* Разностные схемы для дифференциальных уравнений с обобщенными решениями. М.: Наука, 1987.