

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ АЛГОРИТМЫ И МЕТОДЫ

РАЗНОСТНАЯ СХЕМА ВТОРОГО ПОРЯДКА ТОЧНОСТИ ДЛЯ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ В ОБЛАСТИ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ФОРМЫ

© А.А.Самарский¹, П.Н.Вабищевич¹, А.Н.Зыль², П.П.Матус²

¹ Институт математического моделирования РАН

² Институт математики НАН Беларуси

Работа профинансирована Институтом математики НАН Беларуси в рамках Государственной программы фундаментальных исследований "Алгоритм" при частичной поддержке Фонда фундаментальных исследований Республики Беларусь (проект Ф96-173).

Для двумерного уравнения Пуассона в произвольной области на стандартных шаблонах рассматриваются разностные схемы, имеющие второй порядок локальной аппроксимации и в приграничных узлах. При помощи принципа максимума устанавливается монотонность этих схем для некоторых типов областей. Используя метод энергетических неравенств, удалось доказать устойчивость данных разностных схем в сеточной норме W_2^1 для произвольной расчетной области.

DIFFERENCE SCHEME OF THE SECOND ORDER OF ACCURACY FOR DIRICHLET PROBLEM IN ARBITRARY AREA

A.A.Samarskii¹, P.N.Vabishchevich¹, A.N.Zyl², P.P.Matus²

¹ Institute of Mathematical Modeling of RAS, Moscow, Russia,

² Institute of Mathematics of NASB, Minsk, Belarus

Difference schemes for two-dimensional Poisson equation in arbitrary domain on standard templates are considered. These schemes also have the second order of local approximation in the nodes near the boundary. The monotonicity of these schemes are proved for a wide class of areas by means of a principle of maximum. Stability of the schemes is proved in the grid norm W_2^1 in arbitrary computational domain by the method of energy inequalities.

1. Введение

При численном решении краевых задач в расчетной области сложной формы используются [1,2] различные разностные схемы. Широко применяются схемы, записанные в приграничных узлах на существенно неравномерном шаблоне. В этом случае локальная погрешность аппроксимации обычно имеет первый порядок, или даже схема не аппроксимирует дифференциальную задачу вблизи границы [1], однако сохраняется второй порядок точности для разностного решения в равномерной норме. Повышенный порядок аппроксимации вблизи границы важен при решении многих задач.

В [3-6] были построены схемы второго порядка точности на неравномерных по пространству сетках. Такие алгоритмы строятся на основе аппроксимации

уравнения не в узле, а в специально выделенной точке, которая является центром масс системы материальных точек, входящих в шаблон схемы. В [7] на основе этих методов была построена разностная схема повышенного порядка аппроксимации в произвольной расчетной области. В [8] при помощи принципа максимума устанавливается монотонность этой схемы для некоторых типов областей.

В данной работе методом энергетических неравенств получена оценка устойчивости для произвольной расчетной области. Приводятся результаты численных экспериментов и их анализ.

2. Модельная задача

Рассмотрим задачу Дирихле для двумерного уравнения Пуассона в произвольной области Ω :

$$\Delta u \equiv \sum_{k=1}^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} = -f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \Omega, \quad (2.1)$$

$$u(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega. \quad (2.2)$$

Расчетная область Ω целиком покрывается равномерной прямоугольной сеткой ω_0 с шагами h_k по переменным x_k , $k = 1, 2$. Для простоты изложения ограничимся рассмотрением выпуклой расчетной области с введенной на ней связной сеткой.

Пусть γ — множество граничных узлов, которое образовано точками пересечения линий $x_k = \text{const}$, $k = 1, 2$, с границей $\partial\Omega$. Здесь ω — множество внутренних узлов: $\omega = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in \Omega \cap \omega_0\}$. Выделим также подмножество приграничных узлов $\tilde{\omega}$, т.е. те узлы, для которых при аппроксимации оператора Лапласа участвуют граничные узлы, и множество чисто внутренних узлов $\hat{\omega}$. Узлы, приграничные по направлению x_k , будем обозначать как $\tilde{\omega}_k$. Через γ_k^+ и γ_k^- обозначим множество правых и левых граничных узлов по направлению x_k . Через $\tilde{\omega}_{k\pm}$ обозначим соответственно множества правых и левых приграничных узлов по направлению x_k .

В дальнейшем будем использовать следующие стандартные безындексные обозначения теории разностных схем:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_{i_1, i_2} = (x_1^{i_1}, x_2^{i_2}), \quad x_k^{i_k} = x_k^{i_k-1} + h_k^{i_k},$$

$$h_k = h_k^{i_k}, \quad h_{k+} = h_k^{i_k+1}, \quad \tilde{h}_k = \frac{1}{2}(h_{k+} + h_k),$$

$$y = y(\mathbf{x}), \quad y^{+1_1} = y(x_1 + h_{1+}, x_2), \quad y^{-1_1} = y(x_1 - h_{1-}, x_2),$$

$$y^{+1_2} = y(x_1, x_2 + h_{2+}), \quad y^{-1_2} = y(x_1, x_2 - h_{2-}),$$

$$y_{x_k} = \frac{y^{+1_k} - y}{h_{k+}}, \quad y_{\bar{x}_k} = \frac{y - y^{-1_k}}{h_k},$$

$$y_{\tilde{x}_k \tilde{x}_k} = \frac{y_{x_k} - y_{\bar{x}_k}}{\tilde{h}_k}, \quad k = 1, 2.$$

Для приближенного решения дифференциальной задачи (2.1), (2.2) на рассматриваемой почти равномерной сетке строится схема второго порядка локальной аппроксимации в приграничных узлах. При этом разностная сетка предполагается

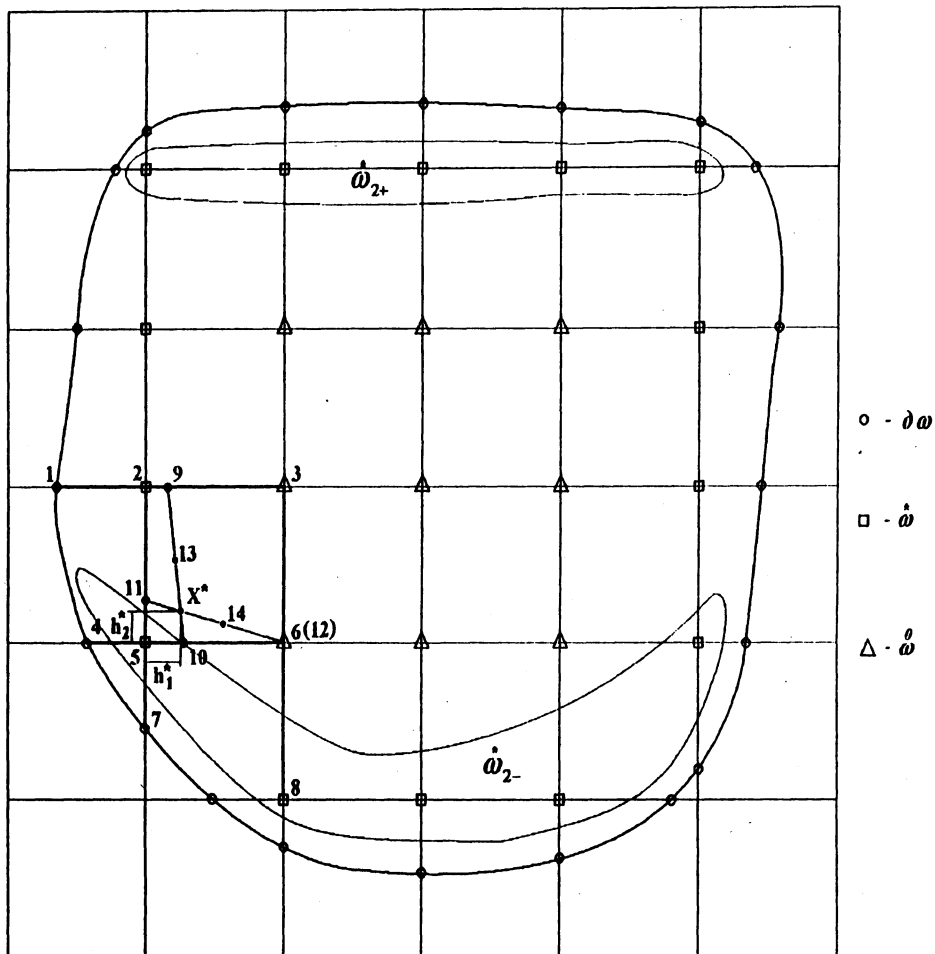


Рис. 1.

достаточно подробной, так что для любого $x \in \dot{\omega}$ при каждом $k = 1, 2$ либо x^{+1k} , либо x^{-1k} не является узлом, расположенным на γ , т. е. $\dot{\omega}_{k+} \cap \dot{\omega}_{k-} = \emptyset, k = 1, 2$.

Для определения шаблона разностной схемы в приграничных узлах задается разностный оператор

$$A(\delta)y = y_{x_1\bar{x}_1} + \delta_2^+(y_{x_2})_{x_1\bar{x}_1} + \delta_2^-(y_{x_2})_{x_1\bar{x}_1} + y_{x_2\bar{x}_2} + \delta_1^+(y_{x_1})_{x_2\bar{x}_2} + \delta_1^-(y_{x_1})_{x_2\bar{x}_2}, \quad (2.3)$$

где

$$\delta_k^\pm = \frac{1}{2}(\tilde{h}_k \pm |\tilde{h}_k|), \quad \tilde{h}_k = \frac{1}{3}(h_{k+} - h_k), \quad \bar{x}_k = x_k + \tilde{h}_k, \quad k = 1, 2. \quad (2.4)$$

На основе этого оператора строится разностная схема на неравномерной прямоугольной сетке, которая имеет второй порядок аппроксимации в точке (\bar{x}_1, \bar{x}_2) . Такой оператор называется шаблонным, так как его область определения задает шаблон разностной схемы в приграничных узлах.

Например, если $h_{1+} > h_1$, $h_{2+} > h_2$, то соответствующий 8-точечный шаблон следует из (2.3), (2.4) и изображен на рис. 1. На основе простой геометрической интерпретации легко показать, что существует такая точка $\mathbf{x}^* = (x_1^*, x_2^*)$, относительно которой на этом шаблоне оператор Лапласа Δ можно аппроксимировать со вторым порядком. Для этого вводятся точки

$$\mathbf{x}^{(9)} = (\bar{x}_1^2, x_2^2), \quad \mathbf{x}^{(10)} = (\bar{x}_1^5, x_2^5), \quad \mathbf{x}^{(11)} = (x_1^5, \bar{x}_2^5), \quad \mathbf{x}^{(12)} = (x_1^6, \bar{x}_2^6),$$

где по-прежнему $\bar{x}_k^{i_k} = x_k^{i_k} + \tilde{h}_k^{i_k}$. Отметим также, что для данного случая $\mathbf{x}^{(12)} = \mathbf{x}^{(6)}$. Аналогично [5] нетрудно показать, что

$$u_{\bar{x}_1 \hat{x}_1, 2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}(\mathbf{x}^{(9)}) = O(\tilde{h}_1^2), \quad u_{\bar{x}_1 \hat{x}_1, 5} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}(\mathbf{x}^{(10)}) = O(\tilde{h}_1^2),$$

$$u_{x_2 \hat{x}_2, 5} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}(\mathbf{x}^{(11)}) = O(\tilde{h}_2^2), \quad u_{x_2 \hat{x}_2, 6} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}(\mathbf{x}^{(12)}) = O(\tilde{h}_2^2).$$

Выберем на отрезке $[\mathbf{x}^{(9)}, \mathbf{x}^{(10)}]$ произвольную точку $\mathbf{x}^{(13)}$. Применяя линейную интерполяцию по точкам $\mathbf{x}^{(9)}$, $\mathbf{x}^{(10)}$, находим, что

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}(\mathbf{x}^{(13)}) = u_{\bar{x}_1 \hat{x}_1, 5} + \frac{\rho(\mathbf{x}^{(10)}, \mathbf{x}^{(13)})}{\rho(\mathbf{x}^{(10)}, \mathbf{x}^{(9)})} (u_{\bar{x}_1 \hat{x}_1, 2} - u_{\bar{x}_1 \hat{x}_1, 5}) + O(\tilde{h}_1^2 + \tilde{h}_2^2). \quad (2.5)$$

Здесь $\rho(\mathbf{x}^{(i_1)}, \mathbf{x}^{(i_2)}) = \sqrt{(x_1^{(i_1)} - x_1^{(i_2)})^2 + (x_2^{(i_1)} - x_2^{(i_2)})^2}$ — расстояние между двумя точками.

Таким образом, на отрезке $[\mathbf{x}^{(9)}, \mathbf{x}^{(10)}]$ мы можем аппроксимировать производную $\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}$ со вторым порядком. Аналогично на $[\mathbf{x}^{(11)}, \mathbf{x}^{(12)}]$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}(\mathbf{x}^{(14)}) = u_{x_2 \hat{x}_2, 5} + \frac{\rho(\mathbf{x}^{(11)}, \mathbf{x}^{(14)})}{\rho(\mathbf{x}^{(11)}, \mathbf{x}^{(12)})} (u_{x_2 \hat{x}_2, 6} - u_{x_2 \hat{x}_2, 5}) + O(\tilde{h}_1^2 + \tilde{h}_2^2). \quad (2.6)$$

Искомая точка \mathbf{x}^* является пересечением этих отрезков.

Заменяя в Δu производные $\frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2}$ согласно (2.5), (2.6), приходим к разностной схеме вида

$$A(\delta)y = -f(\bar{x}_1, \bar{x}_2), \quad \mathbf{x} \in \bar{\omega}, \quad (2.7)$$

в которой (см. обозначения на рис.1) уже

$$\delta_k^\pm = \frac{1}{2}(h_k^* \pm |h_k^*|), \quad \bar{x}_k = x_k^* = x_k + h_k^*, \quad k = 1, 2. \quad (2.8)$$

В случае прямоугольной неравномерной сетки она совпадает со схемой второго порядка точности, а на равномерной сетке вырождается в обычную схему "крест", заданную на пятиточечном шаблоне.

3. Принцип максимума

Запишем схему (2.7) в каноническом виде [1]:

$$\alpha(\mathbf{x})y(\mathbf{x}) = \sum_{\xi \in \mathcal{M}'(\mathbf{x})} \beta(\mathbf{x}, \xi)y(\xi) + \varphi(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \omega.$$

Для выполнения принципа максимума необходимо проверить условия положительности коэффициентов:

$$\alpha(\mathbf{x}) > 0, \quad \beta(\mathbf{x}, \xi) > 0, \quad \alpha(\mathbf{x}) - \sum_{\xi \in \mathcal{M}'(\mathbf{x})} \beta(\mathbf{x}, \xi) \geq 0, \quad \mathbf{x} \in \omega, \quad (3.1)$$

где $\mathcal{M}'(\mathbf{x}) = \mathcal{M}(\mathbf{x}) \setminus \{\mathbf{x}\}$, $\mathcal{M}(\mathbf{x})$ – шаблон схемы.

Сформулируем следующее утверждение.

Лемма 1. Пусть при всех $\mathbf{x} \in \omega$ выполнены условия положительности коэффициентов (3.1). Тогда разностная схема (2.7), (2.8) устойчива по правой части, граничным условиям, и имеет место оценка

$$\|y\|_{C(\omega)} \leq c_0 \|\varphi\|_{C(\omega)} + \|\mu\|_{C(\gamma)}, \quad c_0 = \text{const} > 0.$$

Доказательство леммы проводится аналогично [5, 9]. Запишем задачу (2.7), (2.8) в виде

$$Ly(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \omega, \quad y(\mathbf{x}) = \mu(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \gamma,$$

и представим ее решение $y(\mathbf{x})$ в виде суммы $y(\mathbf{x}) = \tilde{y}(\mathbf{x}) + \bar{y}(\mathbf{x})$, где $\tilde{y}(\mathbf{x})$ – решение однородного уравнения с неоднородным граничным условием:

$$L\tilde{y}(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \omega, \quad \tilde{y}(\mathbf{x}) = \mu, \quad \mathbf{x} \in \gamma, \quad (3.2)$$

и $\bar{y}(\mathbf{x})$ – решение неоднородного уравнения с однородным граничным условием

$$L\bar{y}(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \omega, \quad \bar{y}(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \gamma. \quad (3.3)$$

Для задачи (3.2) выполняются все условия принципа максимума, и в силу следствия 3 [9, с.299] для ее решения справедлива оценка $\|\tilde{y}\|_{C(\omega)} \leq \|\mu\|_{C(\gamma)}$.

Пусть начало координат $(0, 0)$ находится внутри области Ω , R – радиус наименьшего круга с центром в $(0, 0)$, целиком содержащего область Ω . Тогда для оценки решения неоднородного уравнения (3.3) строится мажорантная функция [2]:

$$Y(\mathbf{x}) = K(R^2 - x_1^2 - x_2^2), \quad K = \frac{1}{4} \|\varphi\|_{C(\omega)},$$

удовлетворяющая краевой задаче

$$LY(\mathbf{x}) = 4K, \quad \mathbf{x} \in \omega; \quad Y(\mathbf{x}) = \bar{\mu}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \gamma. \quad (3.4)$$

Применяя теорему сравнения в случае первой краевой задачи [9, с.299] для схем (3.3), (3.4), приходим к оценке

$$\|\tilde{y}\|_{C(\omega)} \leq \max_{\mathbf{x} \in \omega} Y(\mathbf{x}) \leq KR^2 \leq \frac{R^2}{4} \|\varphi\|_{C(\omega)}.$$

Из неравенства треугольника $\|y\|_C \leq \|\tilde{y}\|_C + \|\bar{y}\|_C$ следует требуемая оценка устойчивости. Лемма доказана.

Для исследования сходимости обозначим $z_{i_1 i_2} = y_{i_1 i_2} - u(x_1^{i_1}, x_2^{i_2})$, где y – решение разностной задачи (2.7), (2.8), и $u(x_1, x_2)$ – решение дифференциальной задачи (2.1), (2.2). Подставляя $y = z + u$ в уравнение (2.7), получим, что погрешность удовлетворяет уравнению

$$A(\delta)z = -\psi, \quad x \in \omega, \quad z(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \gamma. \quad (3.5)$$

Здесь $\psi(\mathbf{x}) = A(\delta)u + f(\mathbf{x}^*)$ – невязка схемы. Заметим, что задача (3.5) отличается от разностной схемы (2.7), (2.8) только правыми частями в основном уравнении и в граничных условиях. Поэтому на основании априорной оценки устойчивости по правой части и граничным условиям, оценки погрешности аппроксимации и при выполнении условий леммы 1 для погрешности z справедливо неравенство

$$\|z\|_{C(\omega)} \leq M(h_1^2 + h_2^2), \quad (3.6)$$

где M – постоянная, не зависящая от h_1, h_2 . Отсюда следует

Теорема 1. Пусть при всех $\mathbf{x} \in \omega$ выполнены условия леммы 1. Тогда решение разностной схемы (2.7), (2.8) сходится к решению дифференциальной задачи, и имеет место оценка (3.6).

Для простоты исследований предполагаем, что область покрыта квадратной сеткой: $h_1 = h_2 = H$, и в дальнейшем будем рассматривать только такие приграничные узлы, для которых

$$h_{k+} = H, \quad k = 1, 2. \quad (3.7)$$

В нашем случае шаблон схемы 8-точечный и состоит из узлов, изображенных на рис. 1.

Узлы шаблона пронумеруем согласно рисунку. Тогда для схемы (2.7) в расчетной точке $x^{(5)}$

$$\sum_{\xi \in M'(\bullet)} \beta(\mathbf{x}, \xi) = \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq 5}}^8 \beta_n.$$

Для того, чтобы выписать коэффициенты α, β, φ , необходимо записать схему (2.7) в индексной форме. После элементарных преобразований находим

$$\alpha(\mathbf{x}) = \left(\frac{1}{\hat{h}_1 H} + \frac{1}{\hat{h}_1 h_1} \right) \left(1 - \frac{h_2^*}{H} \right) + \left(\frac{1}{\hat{h}_2 H} + \frac{1}{\hat{h}_2 h_2} \right) \left(1 - \frac{h_1^*}{H} \right) > 0,$$

$$\beta_1 = \frac{h_2^*}{\hat{h}_1 \hat{h}_1 H} > 0, \quad \beta_2 = \left(1 - \frac{h_1^*}{H} \right) \frac{1}{\hat{h}_2 H} - \frac{h_2^*}{H} \left(\frac{1}{\hat{h}_1 H} + \frac{1}{\hat{h}_1 h_1} \right),$$

$$\beta_3 = \frac{h_2^*}{\hat{h}_1 H^2} + \frac{h_1^*}{\hat{h}_2 H^2} > 0, \quad \beta_4 = \left(1 - \frac{h_2^*}{H} \right) \frac{1}{\hat{h}_1 h_1} > 0,$$

$$\beta_6 = \left(1 - \frac{h_2^*}{H} \right) \frac{1}{\hat{h}_1 H} - \frac{h_1^*}{H} \left(\frac{1}{\hat{h}_2 H} + \frac{1}{\hat{h}_2 h_2} \right), \quad \beta_7 = \left(1 - \frac{h_1^*}{H} \right) \frac{1}{\hat{h}_2 h_2} > 0,$$

$$\beta_8 = \frac{h_1^*}{\hat{h}_2 \hat{h}_2 H} > 0, \quad \varphi(\mathbf{x}) = f(x_1^*, x_2^*), \quad \alpha(\mathbf{x}) - \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq 5}}^8 \beta_n = 0.$$

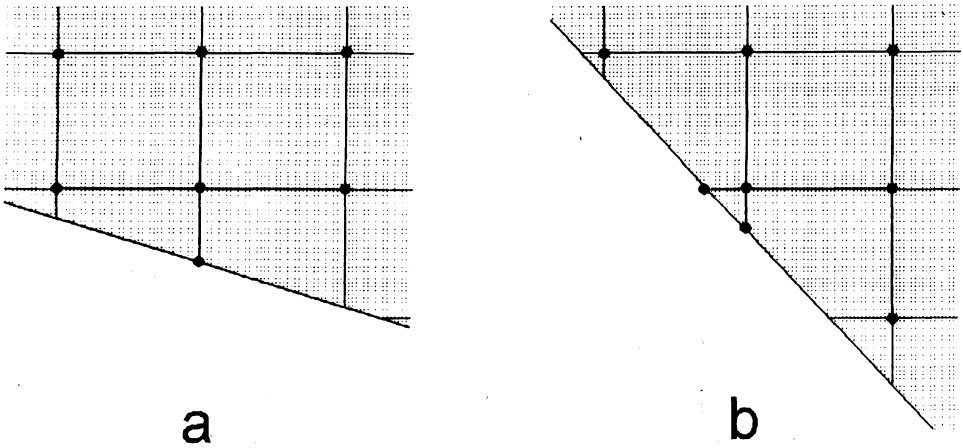


Рис. 2.

Отметим, что условие (3.1) выполняется для всех внутренних узлов. Для приграничных узлов, удовлетворяющих (3.7), условие (3.1) примет вид

$$\beta_2 > 0, \quad \beta_6 > 0.$$

Аналогичные условия легко выписать и для других приграничных узлов.

Отметим, что так как $h_k^* \leq \tilde{h}_k < H/3$, $k = 1, 2$, условия (3.1) всегда выполняются для 7-точечных шаблонов (например, $h_1 = h_{1+} = H$; рис.2а), а также для некоторых 8-точечных шаблонов (в нашем случае при $h_1^{+1_2} = H$ и $h_2^{+1_1} = H$; рис.2б).

Легко также показать, что для некоторых типов многоугольников условия (3.1) выполняются без ограничений на шаги сетки. За исключением некоторых тривиальных случаев (сторона многоугольника параллельна линии сетки), эти условия всегда выполняются для многоугольников, удовлетворяющих условию

$$2/3 < \operatorname{tg} \theta_n < 3/2, \quad n = 1, 2, \dots, N, \quad (3.8)$$

где N — число сторон многоугольника, θ_n — угол наклона n -й стороны относительно линии сетки.

4. Метод энергетических неравенств

Отметим, что принцип максимума позволяет устанавливать оценки точности метода только для достаточно ограниченного класса областей (условная сходимости). В данном параграфе на основе техники метода энергетических неравенств будут установлены безусловные оценки точности метода для области произвольной формы.

Будем использовать следующие стандартные обозначения [1,10]:

$$(v, y) = \sum_{x \in \omega} \tilde{h}_1 \tilde{h}_2 v y, \quad \|y\|^2 = (y, y),$$

$$A = A_1 + A_2, \quad A_k y = -y_{x_k \hat{x}_k}, \quad k = 1, 2,$$

$$\|y_{\bar{x}_1}\|^2 = \sum_{x \in \omega_1^+} h_1 h_2 y_{\bar{x}_1}^2, \quad \|y_{\bar{x}_2}\|^2 = \sum_{x \in \omega_2^+} h_1 h_2 y_{\bar{x}_2}^2,$$

где $\omega_k^\pm = \omega \cup \gamma_k^\pm$.

Исследуемую разностную схему (2.7), (2.8) запишем в виде

$$\tilde{A}y = \varphi(x), \quad (4.1)$$

$$y(x) = 0, \quad x \in \gamma, \quad (4.2)$$

где $\varphi(x) = f(x_1^+, x_2^+)$, $\tilde{A} = A + A_0$, $A_0 y = \delta_2^+ A_1 y_{x_2} + \delta_2^- A_1 y_{\bar{x}_2} + \delta_1^+ A_2 y_{x_1} + \delta_1^- A_2 y_{\bar{x}_1}$.

Исследования проводятся в предположении однородности граничных условий: $\mu(x) = 0$ при $x \in \gamma$.

При использовании метода энергетических неравенств нам понадобится следующая

Лемма 2. Для произвольной сеточной функции $y(x)$, заданной на сетке $\hat{\omega}$ в произвольной области и обращающейся в нуль на границе γ , справедливы соотношения

$$(A_1 y, y) = \|y_{\bar{x}_1}\|^2, \quad (4.3)$$

$$(A_2 y, y) = \|y_{\bar{x}_2}\|^2, \quad (4.4)$$

$$(A y, y) = \|y_{\bar{x}_1}\|^2 + \|y_{\bar{x}_2}\|^2. \quad (4.5)$$

Доказательства аналогичных утверждений приведены в [5, 10].

Получим теперь априорную оценку устойчивости разностной схемы (2.7), (2.8).

Теорема 2. Разностная схема (2.7), (2.8) устойчива по правой части, и для произвольной расчетной области имеет место оценка

$$\|y\|_A \leq 6 \|\varphi\|_{A^{-1}}. \quad (4.6)$$

Доказательство. Умножим уравнение (4.1) скалярно на y и воспользуемся тождеством (4.5). Получим

$$\|y\|_A^2 + (A_0 y, y) = (\varphi, y). \quad (4.7)$$

Рассмотрим скалярное произведение

$$(A_0 y, y) = (\delta_2^+ A_1 y_{x_2} + \delta_2^- A_1 y_{\bar{x}_2} + \delta_1^+ A_2 y_{x_1} + \delta_1^- A_2 y_{\bar{x}_1}, y).$$

В дальнейшем, в силу выбора шаблонного оператора, будем учитывать, что

$$\delta_k^+ \geq 0, \quad \delta_k^- \leq 0,$$

$$\delta_k^+ \neq 0, \quad x \in \hat{\omega}_{k-}, \quad \delta_k^- \neq 0, \quad x \in \hat{\omega}_{k+},$$

$$\delta_k^\pm = 0, \quad x \in \gamma \cup \hat{\omega}, \quad k = 1, 2.$$

Положим также

$$\sigma_{k+} = \frac{\delta_k^+}{h_{k+}}, \quad \sigma_{k-} = \frac{\delta_k^-}{h_k}, \quad k = 1, 2.$$

Тогда

$$\begin{aligned}
 (\delta_2^+ A_1 y_{x_2} + \delta_2^- A_1 y_{\bar{x}_2}, y) &= \sum_{\omega_1^+} h_1 \hbar_2 \sigma_{2+} (y_{\bar{x}_1}^{(+1_2)} - y_{\bar{x}_1}) y_{\bar{x}_1} - \\
 &- \sum_{\omega_1^+} h_1 \hbar_2 \sigma_{2-} (y_{\bar{x}_1}^{(-1_2)} - y_{\bar{x}_1}) y_{\bar{x}_1} = \sum_{\dot{\omega}_{2-}} h_1 \hbar_2 \sigma_{2+} (y_{\bar{x}_1}^{(+1_2)} - y_{\bar{x}_1}) y_{\bar{x}_1} - \\
 &- \sum_{\dot{\omega}_{2+}} h_1 \hbar_2 \sigma_{2-} (y_{\bar{x}_1}^{(-1_2)} - y_{\bar{x}_1}) y_{\bar{x}_1} \geq - \sum_{\dot{\omega}_{2-}} h_1 \hbar_2 \sigma_{2+} \left(\frac{1}{2} (y_{\bar{x}_1}^{(+1_2)})^2 + \frac{3}{2} y_{\bar{x}_1}^2 \right) + \\
 &+ \sum_{\dot{\omega}_{2+}} h_1 \hbar_2 \sigma_{2-} \left(\frac{1}{2} (y_{\bar{x}_1}^{(-1_2)})^2 + \frac{3}{2} y_{\bar{x}_1}^2 \right) = - \sum_{\dot{\omega}_2} h_1 \hbar_2 (\sigma_{2+} - \sigma_{2-}) \frac{3}{2} y_{\bar{x}_1}^2 - \\
 &- \sum_{\dot{\omega}_{2+}^{(+1_2)}} h_1 \hbar_2 \frac{\hbar_{2-}}{2\hbar_2} \sigma_{2+}^{(-1_2)} y_{\bar{x}_1}^2 + \sum_{\dot{\omega}_{2+}^{(-1_2)}} h_1 \hbar_2 \frac{\hbar_{2+}}{2\hbar_2} \sigma_{2-}^{(+1_2)} y_{\bar{x}_1}^2 \geq \\
 &\geq - \sum_{\omega_1^+} h_1 \hbar_2 \left(\frac{3}{2} \sigma_{2+} - \frac{3}{2} \sigma_{2-} + \frac{\hbar_{2-}}{2\hbar_2} \sigma_{2+}^{(-1_2)} - \frac{\hbar_{2+}}{2\hbar_2} \sigma_{2-}^{(+1_2)} \right) y_{\bar{x}_1}^2.
 \end{aligned}$$

Так как

$$\frac{3}{2} \sigma_{2+} - \frac{3}{2} \sigma_{2-} \leq \frac{1}{2}, \quad \frac{\hbar_{2-}}{2\hbar_2} \sigma_{2+}^{(-1_2)} \leq \frac{1}{6}, \quad \frac{\hbar_{2+}}{2\hbar_2} \sigma_{2-}^{(+1_2)} \leq \frac{1}{6},$$

то

$$(\delta_2^+ A_1 y_{x_2} + \delta_2^- A_1 y_{\bar{x}_2}, y) \geq -\frac{5}{6} \|y\|_{A_1}^2.$$

Аналогично

$$(\delta_1^+ A_2 y_{x_1} + \delta_1^- A_2 y_{\bar{x}_1}, y) \geq -\frac{5}{6} \|y\|_{A_2}^2.$$

Объединяя два последних неравенства, находим

$$(A_0 y, y) \geq -\frac{5}{6} \|y\|_A^2. \tag{4.8}$$

В силу обобщенного неравенства Коши [1]

$$(x, y)_A \leq \|x\|_A \|y\|_A \tag{4.9}$$

скалярное произведение (φ, y) можно оценить следующим образом:

$$(\varphi, y) = (A^{-1} \varphi, Ay) = (y, A^{-1} \varphi)_A \leq \|y\|_A \|\varphi\|_{A^{-1}}. \tag{4.10}$$

Подставляя полученные неравенства (4.8), (4.10) в (4.7), приходим к требуемой оценке (4.6). Теорема доказана.

5. Результаты численных экспериментов

Возможности предложенной схемы проверялись на многочисленных тестах, проводилось сравнение с классическими схемами, используемыми при приближенном решении дифференциальной задачи (2.1), (2.2) на рассматриваемой почти равномерной сетке. Обычно используется разностная схема

$$\sum_{\alpha=1}^2 y_{\bar{x}_\alpha \bar{x}_\alpha} = -f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \omega, \quad (5.1)$$

$$y(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \partial\omega. \quad (5.2)$$

Разностное уравнение (5.1) аппроксимирует уравнение (2.1) с первым порядком в приграничных узлах ($\mathbf{x} \in \omega^*$) и со вторым — в других внутренних узлах [1]. Иногда используют еще более простую аппроксимацию уравнения (2.1) в приграничных узлах:

$$\sum_{\alpha=1}^2 \frac{y_{x_\alpha} - y_{\bar{x}_\alpha}}{h_\alpha^0} = -f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \omega. \quad (5.3)$$

В этом случае разностное уравнение (5.3) не аппроксимирует дифференциальное уравнение в приграничных узлах, но разностная схема (5.3), (5.2) все равно сходится со вторым порядком [1].

Для численного эксперимента была выбрана простейшая двусвязная расчетная область

$$\Omega = \{x_1^2 + x_2^2 \leq 1\} \cap \{(x_1 - 0.35)^2 + x_2^2 \leq 0.5\}.$$

В качестве точного решения была взята функция

$$u(\mathbf{x}) = \ln \frac{1}{\rho(x, x_1)} + \ln \frac{1}{\rho(x, x_2)}, \quad x_1 = (0, 0), \quad x_2 = (0.2, 0.2).$$

Для сравнения использовались результаты, полученные на последовательности сгущающихся сеток. Критерием для сравнения алгоритмов служили значения относительной погрешности решения

$$\varepsilon = \frac{\max_{\mathbf{x} \in \omega} |y(\mathbf{x}) - u(\mathbf{x})|}{\max_{\mathbf{x} \in \omega} |u(\mathbf{x})|}$$

и нормальной производной, восстановленной на границе расчетной области

$$\varepsilon_n = \frac{\max_{\mathbf{x} \in \gamma} |\partial y(\mathbf{x}) / \partial n - \partial u(\mathbf{x}) / \partial n|}{\max_{\mathbf{x} \in \gamma} |\partial u(\mathbf{x}) / \partial n|}.$$

На рис.3 приведены расчетные сетки для такой области с числом узлов 25x25 и 50x50 (в квадрате, содержащем расчетную область).

В таблице приведены результаты эксперимента, полученные на стандартном ПК с процессором Pentium-133 МГц (время счета на самой подробной из рассматриваемых сеток не превысило 15 минут).

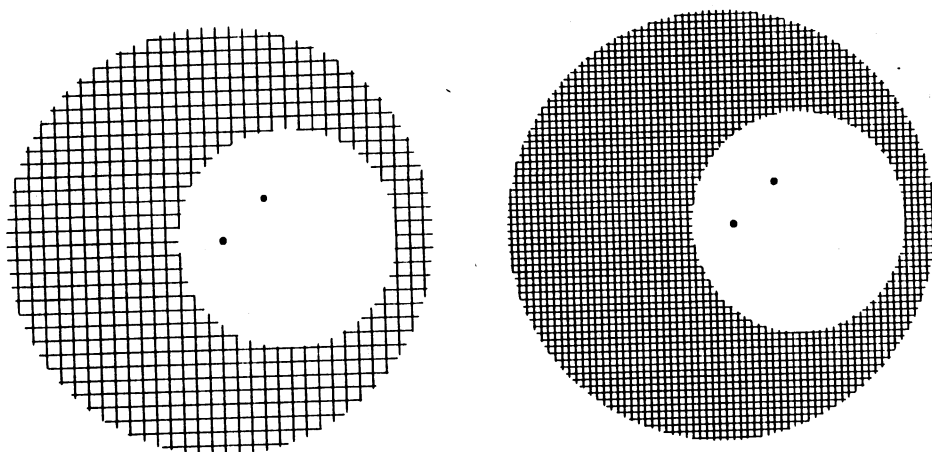


Рис. 3.

N	ϵ			ϵ_n		
	$O(1)$	$O(h)$	$O(h^2)$	$O(1)$	$O(h)$	$O(h^2)$
12x12	0,00618586	0,00729587	0,00713226	2,243234	2,265072	0,124927
25x25	0,00308309	0,00322046	0,00211538	1,562794	0,344720	0,046445
50x50	0,00124992	0,00141157	0,00054340	0,726184	0,194737	0,022210
100x100	0,00065963	0,00067801	0,00015384	0,153670	0,168321	0,013526
200x200	0,00010103	0,00013576	0,00003939	0,185899	0,200453	0,006717
400x400	0,00003427	0,00003504	0,00000499	0,101917	0,120243	0,003584

Новая схема позволяет получить решение с существенно большей точностью, причем с хорошей точностью находится решение и вблизи границы. Асимптотически второй порядок точности наблюдается на достаточно грубых сетках. Примечательно то, что локальная погрешность является максимальной внутри области, а не в приграничных узлах.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. А.А.Самарский. Теория разностных схем. - М.: Наука, 1989.
2. А.А.Самарский, В.Б.Андреев. Разностные методы для эллиптических уравнений. - М.: Наука, 1976.
3. А.А.Самарский, П.Н.Вабищевич, П.П.Матус. Разностные схемы повышенного порядка точности на неравномерных сетках // Дифференц. уравнения, 1996, т.32, с.265-274.
4. А.А.Самарский, П.Н.Вабищевич, П.П.Матус. Разностные схемы повышенного порядка аппроксимации на неравномерных сетках для эллиптических уравнений // Докл. АН Беларуси, 1996, т.40, с.9-14.
5. А.А.Самарский, П.Н.Вабищевич, П.П.Матус. Разностные схемы второго порядка аппроксимации на неравномерных сетках // ЖВМ и МФ, 1998, т.38, с.413-424.

6. А.А.Самарский, П.Н.Вабищевич, П.П.Матус. Разностные схемы с операторными множителями. – Мн.: 1998.
7. А.А.Самарский, П.Н.Вабищевич, П.П.Матус, А.Н.Зыль. Разностная схема повышенного порядка аппроксимации для задачи Дирихле в произвольной области // Докл. АН Беларуси, 1998, т.42, с.13–17.
8. A.N.Zyl. Construction of Difference Scheme of High Order of Approximation for Dirihlet Problem in an Arbitrary Area // Book of Proceedings of the Second International Conference: "Finite-Difference Methods: Theory and Applications", Minsk, July 6–9. p. 147–151.
9. А.А.Самарский, А.В.Гулин. Численные методы. – М.: Наука, 1989.
10. А.А.Самарский, Р.Д.Лазаров, В.Л.Макаров. Разностные схемы для дифференциальных уравнений с обобщенными решениями. – М.: Высш. шк., 1987.

Поступила в редакцию 12.01.99.