ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 1998, том 361, № 1, с. 21–23

МАТЕМАТИКА

УДК 519.63

НЕЛИНЕЙНЫЕ МОНОТОННЫЕ СХЕМЫ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА

© 1998 г. Академик А. А. Самарский, П. Н. Вабищевич

Поступило 11.03.98 г.

При численном решении многомерных нестационарных задач механики сплошной среды, задач газовой динамики в качестве базового выступает линейное уравнение переноса [1, 2]. Среди основных свойств решений начально-краевых задач для уравнения переноса выделяют выполнимость принципа максимума. Разностные схемы, которые удовлетворяют принципу максимума, называют *монотонными*.

Для уравнения переноса легко строятся безусловно монотонные разностные схемы первого порядка по пространству с использованием направленных разностных производных [3, 4]. Хорошо известно (см. [5]), что в классе однородных линейных схем отсутствуют схемы с порядком аппроксимации по пространству выше первого. При численном решении задач механики сплошной среды широко используются более точные нелинейные монотонные схемы. Среди первых исследований в этом направлении выделим работу [6].

В настоящее время в литературе особое внимание уделяется разностным схемам TVD. Безусловная монотонность достигается за счет нелинейного ограничения потоков в исходной схеме с направленными разностями второго порядка. Эти исследования инициированы в работах [7, 8], среди многих других работ в этом направлении отметим [9–13].

В данной работе строятся монотонные однородные нелинейные разностные схемы для уравнения переноса на основе регуляризации (возмущения) схемы второго порядка аппроксимации. В качестве производящей выбираются схемы со стандартными аппроксимациями первой производной второго порядка – центральными разностями и направленными разностями второго порядка, их комбинациями. Построение проведено для модельной одномерной задачи Коши для уравнения переноса. Отмечены возможные обобщения на более общие задачи.

Институт математического моделирования Российской Академии наук, Москва

1. Рассматривается одномерное уравнение переноса в недивергентной форме

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a(x,t)\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0, \qquad (1)$$

дополненное начальным условием

$$u(x,0) = u_0(x), \quad -\infty < x < \infty. \qquad (2)$$

Будем считать, что по переменной x введена равномерная сетка с шагом h, через $x_i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ обозначим узлы сетки и пусть $v = v_i = v(x_i)$. Используются безындексные обозначения теории разностных схем [3]

$$y_x = \frac{y_{i+1} - y_i}{h}, \quad y_{\bar{x}} = \frac{y_i - y_{i-1}}{h},$$

$$y_{\overset{\circ}{x}} = \frac{1}{2}(y_x + y_{\bar{x}}).$$

При переходе с одного временного слоя $t^n = n\tau$, $n = 0, 1, \ldots$, $\tau > 0$, на другой временной слой t^{n+1} будем использовать явные разностные схемы. В силу нелинейности рассматриваемых разностных схем проблемы использования неявных разностных схем заслуживают отдельного исследования.

2. Простейшей условно устойчивой явной схемой является схема с направленными разностями [3, 14]. Ограничимся для простоты случаем $a(x,t) \ge 0$ в (1) и используем разностную схему

$$\frac{y^{n+1} - y^n}{\tau} + a^n y^n_{\bar{x}} = 0, \quad n = 0, 1, \ldots, \qquad (3)$$

при начальном условии $y^0 = u_0$. Эта схема аппроксимирует исходную задачу (1), (2) с первым порядком по времени и пространству.

Для разностной схемы (3) выполнен принцип максимума (схема монотонна) при стандартных ограничениях на сеточные параметры:

$$\max_i a_i^n \frac{\tau}{h} \le 1, \quad n = 0, 1, \ldots \qquad (4)$$

При этом для разностного решения имеет место послойная оценка устойчивости

$$\|y^{n+1}\| \le \|y^n\|, \quad n = 0, 1, \ldots,$$
$$\|v\| \equiv \max_i |v|.$$

Монотонность схемы обеспечивается, с одной стороны, условием неотрицательности коэффициента a^n, а с другой – условием (4). Имея эти обстоятельства в виду, будем строить монотонные разностные схемы на основе принципа регуляризации разностных схем [3, 15] – за счет возмущения коэффициентов схемы, которые не относятся к классу монотонных.

3. В качестве производящей возьмем абсолютно неустойчивую схему с центральными разностями

$$\frac{y^{n+1} - y^n}{\tau} + a^n y^n_{\overset{\circ}{x}} = 0, \quad n = 0, 1, \ldots \tag{5}$$

Эта схема имеет, однако, и существенное преимущество перед схемой (3) – она аппроксимирует (1) со вторым порядком по пространству. Поэтому хотелось бы сохранить в каком-то виде это достоинство, сочетая его с условной монотонностью явной схемы (3) с направленными разностями.

Запишем схему (5) как схему с направленными разностями

$$\frac{y^{n+1} - y^n}{\tau} + \tilde{a}^n y^n_{\bar{x}} = 0, \quad n = 0, 1, \ldots, \tag{6}$$

с нелинейным коэффициентом

$$\tilde{a}^n = a^n\left(1 + \frac{h}{2}\frac{y^n_{\bar{x}x}}{y^n_{\bar{x}}}\right). \tag{7}$$

Нелинейная разностная схема (6) будет монотонной, если

$$\tilde{a}^n \ge 0, \tag{8}$$

$$\max_i \tilde{a}^n_i \frac{\tau}{h} \le 1, \quad n = 0, 1, \ldots \tag{9}$$

Из (7)–(9) следует, что нарушение монотонности наблюдается в окрестности экстремумов разностного решения.

Принцип регуляризации разностных схем является общим и конструктивным подходом к построению схем заданного качества. Применительно к рассматриваемой задаче необходимо от исходной (производящей) немонотонной разностной схемы перейти к новой уже монотонной схеме (6). За счет малого возмущения коэффициентов (с сохранением хороших свойств производящей схемы – второго порядка аппроксимации) нужно получить схему (6), для которой достаточные условия монотонности и устойчивости (8), (9) будут выполнены.

В разностной схеме (6) перепишем коэффициент в более удобном виде

$$\tilde{a}^n = a^n \chi^n \tag{10}$$

с множителем

$$\chi^n = \left(1 + \frac{h}{2}\frac{y^n_{\bar{x}x} y^n_{\bar{x}}}{|y^n_{\bar{x}}|^2}\right).$$

Будем возмущать коэффициент χ^n, положив

$$\chi^n = \left(1 + \frac{h}{2}\frac{y^n_{\bar{x}x} y^n_{\bar{x}}}{|y^n_{\bar{x}}|^2 + \gamma^2 h^2 |y^n_{\bar{x}x}|^2}\right) \tag{11}$$

с параметром γ. Дополнительные (регуляризирующие) слагаемые в χ^n имеют, как это видно из (11), третий порядок по h. Тем самым регуляризованная схема (6), (10), (11) аппроксимирует исходное уравнение (1), как и схема (5) (схема (6), (7)) со вторым порядком по пространству.

Сформулируем условия монотонности схемы (6), (10), (11). Коэффициент $\tilde{a}^n$ (условие (8)) будет неотрицательным при $\gamma \ge 0.25$. Шаги сетки должны удовлетворять условию (9), которое с учетом (10), (11) эквивалентно неравенству

$$\max_i a^n_i \frac{\tau}{h}\left(1 + \frac{1}{4\gamma}\right) \le 1, \quad n = 0, 1, \ldots \tag{12}$$

Тем самым для регуляризованной схемы (6), (10), (11) при минимально допустимом значении параметра $\gamma = 0.25$ максимально допустимый шаг по времени в соответствии с (4), (12) падает вдвое по сравнению со схемой (3).

4. В качестве производящей мы взяли простейшую явную схему с центральными разностными производными. Можно применять и другие схемы второго порядка аппроксимации. При построении монотонных схем типа TVD обычно ориентируются на схемы с аппроксимацией направленными разностями второго порядка с использованием расширенного, в общем случае, шаблона. Вместо (5) в качестве производящей разностной схемы будем брать схему

$$\frac{y^{n+1}_i - y^n_i}{\tau} + a^n\frac{3y^n_i - 4y^n_{i-1} + y^n_{i-2}}{2h} = 0, \tag{13}$$
$$x_i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \quad n = 0, 1, \ldots$$

Принимая во внимание, что

$$\frac{3y^n_i - 4y^n_{i-1} + y^n_{i-2}}{2h} = y^n_{\bar{x}} + \frac{h}{2}y^n_{\bar{x}\bar{x}},$$

запишем схему с направленными разностями второго порядка (13) в виде (6) при

$$\tilde{a}^n = a^n\left(1 + \frac{h}{2}\frac{y^n_{\bar{x}\bar{x}}}{y^n_{\bar{x}}}\right). \tag{14}$$

По аналогии со схемой (5) регуляризованная схема для (6), (14) имеет вид (6), (10), в котором

$$\chi^n = \left(1 + \frac{h}{2}\frac{y^n_{\bar{x}\bar{x}}y^n_{\bar{x}}}{|y^n_{\bar{x}}|^2 + \gamma^2 h^2 |y^n_{\bar{x}\bar{x}}|^2}\right). \tag{15}$$

Условия монотонности схемы (6), (14), (15) формулируются точно так же, как и для схемы (6), (10), (11).

Комбинируя схему с центральноразностной аппроксимацией и схему с направленными разностями, получим следующее однопараметрическое семейство схем второго порядка аппроксимации

$$\frac{y^{n+1} - y^n}{\tau} + a^n\left(y^n_{\bar{x}} + \frac{h}{2}(\theta y^n_{\bar{x}x} + (1-\theta)y^n_{\bar{x}\bar{x}})\right) = 0, \tag{16}$$

$$n = 0, 1, \ldots$$

При такой записи значение $\theta = 1$ соответствует использованию схемы (5), а $\theta = 0$ – схемы (13). Среди схем (16) заслуживают отдельного упоминания схема с $\theta = 0.5$ и схема третьего порядка аппроксимации с $\theta = 2/3$. Регуляризованная схема для (16) имеет вид (6), (10) при

$$\chi^n = \left(1 + \frac{h}{2}\frac{(\theta y^n_{\bar{x}x} + (1-\theta)y^n_{\bar{x}\bar{x}})y^n_{\bar{x}}}{|y^n_{\bar{x}}|^2 + \gamma^2 h^2 |\theta y^n_{\bar{x}x} + (1-\theta)y^n_{\bar{x}\bar{x}}|^2}\right).$$

Она монотонна при $\gamma \geq 0.25$ и ограничениях (12), причем норма разностного решения не растет со временем.

В силу того что выбранный регуляризатор имеет третий порядок по h, разностная схема (16) имеет формально третий порядок на гладких решениях при $\theta = 2/3$.

5. Подобным образом строятся монотонные разностные схемы в более общих условиях. Отметим наиболее важные обобщения в этом направлении:

1) аналогично рассматриваются регуляризованные схемы на неравномерных сетках;

2) обобщение на случай двумерных прямоугольных и трехмерных сеток носит редакционный характер;

3) определенные особенности с учетом нелинейности имеют неявные разностные схемы;

4) мы ограничились задачей Коши для уравнения переноса в недивергентном виде. Имея в виду запросы практики, аналогично рассматриваются схемы для уравнений переноса в дивергентном (консервативном) виде.

Выражаем благодарность А.Г. Чурбанову и В.В. Чуданову за плодотворные обсуждения проблем численного решения задач механики сплошной среды.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 96–01–00657).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Самарский А.А., Попов Ю.П.* Разностные методы решения задач газовой динамики. М.: Наука, 1992. 424 с.
2. *Hirsch C.* Numerical Computation of Internal and External Flows. V. 2. Computational Methods for Inviscid and Viscous Flows. Chichester: Wiley, 1988. 691 p.
3. *Самарский А.А.* Введение в теорию разностных схем. М.: Наука, 1971. 562 с.
4. *Роуч П.* Вычислительная гидродинамика. М.: Мир, 1980. 616 с.
5. *Годунов С.К.* // Мат. сб. 1959. Т. 47(89). № 3. С. 271–306.
6. *Гольдин В.Я., Калиткин Н.Н., Шишова Т.В.* // ЖВМиМФ. 1965. Т. 5. № 5. С. 938–944.
7. *Колган В.П.* // Учен. зап. ЦАГИ. 1972. Т. 3. № 6. С. 68–77.
8. *Harten A.* // J. Comput. Phys. 1983. V. 49. № 3. P. 357–393.
9. *Osher S., Chakravarthy S.* // SIAM J. Numer. Anal. 1984. V. 21. № 5. P. 955–984.
10. *Sweby P.K.* // Ibid. P. 995–1011.
11. *Harten A., Osher S.* // Ibid. 1987. V. 24. № 2. P. 279–309.
12. *Yee H.C.* // J. Comput. Phys. 1987. V. 68. P. 151–179.
13. *Вязников К.В., Тишкин В.Ф., Фаворский А.П.* // Мат. моделирование. 1989. Т. 1. № 5. С. 95–120.
14. *Самарский А.А., Гулин А.В.* Устойчивость разностных схем. М.: Наука, 1973. 416 с.
15. *Самарский А.А.* // ЖВМиМФ. 1967. Т. 7. № 1. С. 62–93.