ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 1998, том 358, № 4, с. 461–464

МАТЕМАТИКА

УДК 519.63

РЕГУЛЯРИЗОВАННЫЕ АДДИТИВНЫЕ СХЕМЫ ПОЛНОЙ АППРОКСИМАЦИИ

© 1998 г. Академик А. А. Самарский, П. Н. Вабищевич

Поступило 19.09.97 г.

Построение экономичных разностных схем для многомерных уравнений с частными производными позволило сформулировать понятие аддитивных разностных схем [1, 2], для которых характерно разбиение (расщепление) оператора задачи на сумму операторов более простой структуры. Класс аддитивных схем включает [2, 3] схемы расщепления по отдельным направлениям (локально-одномерные схемы), схемы расщепления по физическим процессам, регионально-аддитивные схемы декомпозиции области при построении параллельных алгоритмов. Аддитивные разностные схемы в общих условиях расщепления оператора задачи на сумму непереставовочных несамосопряженных операторов наиболее просто строятся для двухкомпонентного расщепления. Более сложная ситуация имеет место для случая многокомпонентного (на три и более операторов) расщепления. Для таких задач наиболее интересные результаты получены при использовании понятия суммарной аппроксимации [4, 5].

Исходная задача при переходе с одного временного слоя на другой разбивается на ряд подзадач, причем каждая из этих задач не аппроксимирует исходную задачу. На этом пути строятся безусловно устойчивые схемы покомпонентного расщепления (локально-одномерные схемы при расщеплении по пространственным переменным). При ориентации на современные параллельные компьютеры особого внимания заслуживают [6, 7] аддитивно-усредненные схемы покомпонентного расщепления. В последнее время (см., например, [8, 9]) развивается новый класс операторно-разностных схем расщепления – векторные аддитивные схемы полной аппроксимации при общем многокомпонентном расщеплении.

В данном сообщении строятся аддитивные разностные схемы для дифференциально-операторных уравнений первого и второго порядка для общего случая аддитивного расщепления с произвольным числом попарно некоммутируемых операторных слагаемых. Построение безусловно устойчивых схем основывается на регуляризации простейшей явной двух- или трехслойной схемы за счет малого мультипликативного возмущения каждого из операторов расщепления. Такой подход охватывает основные классы нестационарных задач математической физики.

Институт математического моделирования Российской Академии наук, Москва

1. Рассматриваются сеточные функции y из конечномерного вещественного гильбертова пространства H, для скалярного произведения и нормы в котором используем обозначения $(\cdot, \cdot)$, $\|y\| = \sqrt{(y, y)}$. Для $D = D^* > 0$ через H_D обозначим пространство H, снабженное скалярным произведением $(y, w)_D = (Dy, w)$ и нормой $\|y\|_D = \sqrt{(Dy, y)}$.

В задаче Коши для эволюционного уравнения первого порядка ищется функция $y(t) \in H$, удовлетворяющая уравнению

$$\frac{dy}{dt} + \Lambda y = f(t), \quad 0 < t \le T, \tag{1}$$

и начальному условию

$$y(0) = u_0. \tag{2}$$

Будем считать, что линейный оператор Λ, действующий из H в H (Λ: $H \to H$), положительный, самосопряженный и стационарный, т.е. $\Lambda \neq \Lambda(t) = \Lambda^* > 0$. Тогда для (1), (2) верна априорная оценка

$$\|y(t)\| \le \|u_0\| + \int_0^t \|f(s)\| ds, \tag{3}$$

выражающая устойчивость по начальным данным и правой части.

Будем считать, что для оператора Λ справедливо аддитивное представление

$$\Lambda = \sum_{\alpha=1}^{p} \Lambda_\alpha, \quad \Lambda_\alpha \neq \Lambda_\alpha(t) = \Lambda_\alpha^* > 0, \quad \alpha = 1, 2, \ldots, p. \tag{4}$$

Аддитивные разностные схемы строятся на основе представления (4), причем переход с одного временного слоя t^n на другой $t^{n+1} = t^n + \tau$ связан с решением задач для отдельных операторов Λ_α,

$\alpha = 1, 2, \ldots, p$, в аддитивном разложении (4), т.е. задача распадается на p подзадач.

2. Построение разностных схем заданного качества можно провести на основе общего методологического принципа – принципа регуляризации разностных схем [2, 10]. Для получения безусловно устойчивых разностных схем на основе принципа регуляризации используется следующая технологическая цепочка:

Выбирается какая-либо простейшая разностная схема (производящая разностная схема), которая не относится к необходимому классу безусловно устойчивых.

Данная схема записывается в канонической форме, для которой из общей теории устойчивости операторно-разностных схем уже известны критерии устойчивости.

Для введения в класс безусловно устойчивых разностных схем операторы производящей разностной схемы возмущаются в соответствии с критериями устойчивости.

Будем рассматривать вначале применение принципа регуляризации для построения устойчивых схем для задачи (1), (2). В качестве производящей естественно взять явную схему

$$\frac{y^{n+1}-y^n}{\tau} + \Lambda y^n = f^n, \quad n = 0, 1, \ldots, \tag{5}$$

при заданном $y^0 = u_0$. Схема (5) записывается в канонической форме

$$B\frac{y^{n+1}-y^n}{\tau} + Ay^n = f^n, \quad n = 0, 1, \ldots, \tag{6}$$

при

$$B = E, \quad A = \Lambda.$$

Необходимые и достаточные условия устойчивости для схемы (6) в H_A при $A \ne A(t)$, $A = A^* > 0$ формулируются [11] (см. также [2, 12]) в виде неравенства

$$B \ge \frac{\tau}{2}A. \tag{7}$$

При $B = B^*$ схема устойчива и в H_B. В соответствии с (7) для улучшения условий устойчивости можно ориентироваться на возмущение (увеличение) оператора B или же на возмущение (уменьшение) оператора A. Будем использовать вторую возможность.

Положим

$$B = E, \quad A = A^* = (E + \sigma\tau\Lambda)^{-1}\Lambda > 0,$$

что приводит нас к схеме нового типа:

$$\frac{y^{n+1}-y^n}{\tau} + (E + \sigma\tau\Lambda)^{-1}\Lambda y^n = f^n, \quad n = 0, 1, \ldots \tag{8}$$

Эта схема отличается от обычной схемы с весами

$$\frac{y^{n+1}-y^n}{\tau} + \Lambda(\sigma y^{n+1} + (1-\sigma)y^n) = f^n, \quad n = 0, 1, \ldots, \tag{9}$$

лишь правой частью. Для схем (8), (9) верна априорная оценка

$$\|y^{n+1}\| \le \|u_0\| + \sum_{k=0}^{n} \tau\|f^k\|, \tag{10}$$

обеспечивающая устойчивость в H и согласованная с оценкой (3) для исходной задачи (1), (2).

Принципиальная особенность схемы (8) связана с тем, что фактически она строится на основе явной схемы с мультипликативной регуляризацией оператора задачи. На этой новой методологической основе можно строить и аддитивные схемы.

3. В качестве производящей при конструировании безусловно устойчивых аддитивных схем для задачи (1), (2), (4) рассмотрим простейшую явную схему

$$\frac{y^{n+1}-y^n}{\tau} + \sum_{\alpha=1}^{p} \Lambda_\alpha y^n = f^n, \quad n = 0, 1, \ldots \tag{11}$$

По аналогии с (8) аддитивные схемы построим на основе возмущения каждого отдельного операторного слагаемого в схеме (11):

$$\frac{y^{n+1}-y^n}{\tau} + \sum_{\alpha=1}^{p} (E + \sigma\tau\Lambda_\alpha)^{-1}\Lambda_\alpha y^n = f^n, \quad n = 0, 1, \ldots \tag{12}$$

Теорема 1. *При $\sigma \ge p/2$, $\alpha = 1, 2, \ldots, p$ и любых $\tau > 0$ для* (12) *выполняется априорная оценка* (10).

На основе полученной априорной оценки (10) обычным образом исследуется точность аддитивной схемы (12). Легко доказывается сходимость с первым порядком по времени.

Рассматриваемая регуляризованная схема (12) имеет тесную связь с аддитивно-усредненной схемой суммарной аппроксимации. Для того чтобы продемонстрировать это, введем фиктивные сеточные величины y_α^{n+1}, $\alpha = 1, 2, \ldots, p$, которым теперь никакого самостоятельного значения не придается. Будем реализовывать схему (12) в форме

$$(E + \sigma\tau\Lambda_\alpha)\frac{y_\alpha^{n+1}-y^n}{p\tau} + \Lambda_\alpha y^n = \frac{1}{p}(E + \sigma\tau\Lambda_\alpha)f^n,$$
$$\alpha = 1, 2, \ldots, p, \quad n = 0, 1, \ldots,$$

$$y^{n+1} = \frac{1}{p}\sum_{\alpha=1}^{p} y_\alpha^{n+1}.$$

Тем самым мы приходим к аддитивно-усредненной схеме, построение которой проводится теперь без привлечения понятия суммарной аппроксимации. Отличие от стандартных аддитивно-усредненных схем покомпонентного расщепления [6, 7] связано с выбором правых частей.

4. Среди наиболее принципиальных обобщений предложенной аддитивной регуляризованной аддитивной схемы отметим возможность построения схем более высокого порядка. Для построения регуляризованной схемы второго порядка по времени будем исходить из явной трехслойной схемы

$$\frac{y^{n+1}-y^n}{\tau} + \Lambda\frac{3y^n - y^{n-1}}{2} = f^n, \quad n = 1, 2, \ldots \qquad (13)$$

При использовании канонической формы трехслойных разностных схем

$$B\frac{y^{n+1}-y^{n-1}}{2\tau} + R(y^{n+1} - 2y^n + y^{n-1}) + Ay^n = f^n, \qquad (14)$$
$$n = 1, 2, \ldots,$$

для схемы (13) получим

$$B = E + \frac{\tau}{2}\Lambda, \quad R = \frac{1}{2\tau}\left(E - \frac{\tau}{2}\Lambda\right), \quad A = \Lambda.$$

Необходимые и достаточные условия устойчивости трехслойной схемы (14) с самосопряженными операторами имеют [13] (более подробно в [2, 12]) вид

$$B \ge 0, \quad R \ge \frac{1}{4}A, \quad A > 0. \qquad (15)$$

В силу (15) явная разностная схема (13) является условно устойчивой. Для построения безусловно устойчивых схем снова можно ориентироваться на мультипликативную регуляризацию оператора Λ.

Оставаясь в классе схем второго порядка аппроксимации, вместо (13) используем регуляризованную схему

$$\frac{y^{n+1}-y^n}{\tau} + (E + \sigma\tau^2\Lambda^2)^{-1}\Lambda\frac{3y^n - y^{n-1}}{2} = f^n, \qquad (16)$$
$$n = 1, 2, \ldots$$

Проверка условий (15) приводит нас к выводу, что схема (16) является безусловно устойчивой при $\sigma \ge 0.25$.

По аналогии с (16) (путем замены операторов Λ_α на $(E + \sigma\tau^2\Lambda_\alpha^2)^{-1}\Lambda_\alpha$) строим регуляризованную аддитивную разностную схему для задачи (1), (2), (4):

$$\frac{y^{n+1}-y^n}{\tau} + \sum_{\alpha=1}^{p}(E + \sigma\tau^2\Lambda_\alpha^2)^{-1}\Lambda_\alpha\frac{3y^n - y^{n-1}}{2} = f^n, \qquad (17)$$
$$n = 1, 2, \ldots$$

Теорема 2. *При $\sigma \ge p/4$, $\alpha = 1, 2, \ldots, p$ и любых $\tau > 0$ аддитивная разностная схема второго порядка аппроксимации* (17) *устойчива.*

5. Аналогично строятся регуляризованные многокомпонентные схемы полной аппроксимации для эволюционных уравнений второго порядка. Рассматривается задача Коши для уравнения (ср. с (1))

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \Lambda y = f(t), \quad 0 < t \le T, \qquad (18)$$

при начальных условиях

$$y(0) = u_0, \quad \frac{dy}{dt}(0) = u_1. \qquad (19)$$

В качестве производящей естественно взять явную схему

$$\frac{y^{n+1} - 2y^n + y^{n-1}}{\tau^2} + \Lambda y^n = f^n, \quad n = 1, 2, \ldots, \qquad (20)$$

которая записывается в канонической форме (14) при

$$B = 0, \quad R = \frac{1}{\tau^2}E, \quad A = \Lambda.$$

Регуляризация (20) приводит к схеме

$$\frac{y^{n+1} - 2y^n + y^{n-1}}{\tau^2} + (E + \sigma\tau^2\Lambda)^{-1}\Lambda y^n = f^n, \qquad (21)$$
$$n = 1, 2, \ldots,$$

которая является аналогом обычной схемы с весами для эволюционного уравнения второго порядка. Проверка условий (15) приводит к выводу о том, что при $\sigma > 0.25$ схема (21) устойчива.

Многокомпонентным аналогом схемы (21) является аддитивная схема

$$\frac{y^{n+1} - 2y^n + y^{n-1}}{\tau^2} + \sum_{\alpha=1}^{p}(E + \sigma\tau^2\Lambda_\alpha)^{-1}\Lambda_\alpha y^n = f^n, \qquad (22)$$
$$n = 1, 2, \ldots$$

Теорема 3. *При $\sigma \ge p/4$, $\alpha = 1, 2, \ldots, p$ аддитивная разностная схема* (22) *для задачи* (18), (19) *безусловно устойчива.*

Реализация схемы (22) может снова проводиться в виде аддитивно-усредненной схемы

$$(E + \sigma\tau^2\Lambda_\alpha)\frac{y_\alpha^{n+1} - 2y^n + y^{n-1}}{p\tau^2} + \Lambda_\alpha y^n =$$

$$= \frac{1}{p}(E + \sigma\tau^2\Lambda_\alpha)f^n,$$

$$\alpha = 1, 2, \ldots, p, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

$$y^{n+1} = \frac{1}{p}\sum_{\alpha=1}^{p} y_\alpha^{n+1}.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 96–01–00657).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Самарский А.А.* // Aplikace Mat. 1965. V. 10. № 2. P. 146–164.
2. *Самарский А.А.* Теория разностных схем. М.: Наука, 1989.
3. *Марчук Г.И.* Методы расщепления. М.: Наука, 1989.
4. *Самарский А.А.* // ЖВМиМФ. 1962. Т. 2. № 5. С. 787–811.
5. *Яненко Н.Н.* Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. Новосибирск: Изд-во АН СССР, 1967.
6. *Гордезиани Д.Г., Меладзе Г.В.* // ЖВМиМФ. 1974. Т. 14. № 1. С. 246–250.
7. *Samarskii A.A., Vabishchevich P.N.* Computational Heat Transfer. Chichester: Wiley, 1995.
8. *Абрашин В.Н.* // Дифференц. уравнения. 1990. Т. 26. № 2. С. 314–323.
9. *Вабищевич П.Н.* // ЖВМиМФ. 1996. Т. 36. № 3. С. 44–51.
10. *Самарский А.А.* // Там же. 1967. Т. 7. № 1. С. 62–93.
11. *Самарский А.А.* // ДАН. 1968. Т. 181. № 4. С. 808–811.
12. *Самарский А.А., Гулин А.В.* Устойчивость разностных схем. М.: Наука, 1973.
13. *Самарский А.А.* // ДАН. 1970. Т. 192. № 5. С. 998–1001.