ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 1998, том 361, № 6, с. 746–748

МАТЕМАТИКА

УДК 519.63

УСТОЙЧИВОСТЬ ВЕКТОРНЫХ АДДИТИВНЫХ СХЕМ

© 1998 г. Академик А. А. Самарский, П. Н. Вабищевич, П. П. Матус

Поступило 07.05.98 г.

Для приближенного решения многомерных нестационарных задач математической физики широко используются различные классы аддитивных схем (схем расщепления) [1, 2]. Наиболее просто строятся аддитивные схемы при расщеплении оператора задачи на сумму двух операторов более простой структуры – схемы переменных направлений, факторизованные схемы, схемы предиктора–корректора и т.д. В более общем случае многокомпонентного расщепления классы безусловно устойчивых операторно-разностных схем строятся на основе понятия суммарной аппроксимации [3, 4]. На этом пути строятся классические локально-одномерные схемы (схемы покомпонентного расщепления) [1, 2], аддитивно-усредненные локально-одномерные схемы [5, 6].

В ряде работ (см., например, [7, 8]) рассматриваются векторные аддитивные схемы (многокомпонентные схемы переменных направлений). В отличие от схем покомпонентного расщепления в данном случае каждое уравнение аппроксимирует исходную задачу, т.е. эти аддитивные схемы являются схемами полной аппроксимации. В настоящее время [9] на основе принципа регуляризации построены новые аддитивные операторно-разностные схемы полной аппроксимации.

Наиболее законченные результаты получены при исследовании разностных схем в сеточных гильбертовых пространствах [1, 10]. Это относится и к устойчивости и сходимости аддитивных операторно-разностных схем полной аппроксимации. Во многих задачах принципиальной является проблема исследования корректности схемы в равномерной норме (в сеточном банаховом пространстве L_∞). В качестве примера отметим задачи с неограниченной нелинейностью. Для классических схем переменных направлений устойчивость доказывается только при выборе специальных норм в гильбертовом пространстве. В данной работе исследуется устойчивость в произвольных нормах простейшей векторной аддитивной схемы [7]. Показано, что устойчивость имеет место при условии, что устойчивыми являются чисто неявные схемы для отдельных компонент. Хорошо известно [1, 10], что таким свойством обладают классические аддитивные схемы суммарной аппроксимации.

1. Будем рассматривать задачу Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка

$$\frac{dw_i}{dt} + \sum_{j=1}^{M} a_{ij}(t) w_j = \varphi_i(t), \quad i = 1, 2, \ldots, M. \qquad (1)$$

К (1) мы приходим после дискретизации по пространству, например для начально-краевых задач для параболических уравнений.

Полагая $w = w(t) = \{w_1, w_2, \ldots, w_M\}$, $A = [a_{ij}]$, запишем (1) в матричном (операторном) виде:

$$\frac{dw}{dt} + A(t)w = \varphi(t). \qquad (2)$$

Будем строить разностные схемы для приближенного решения задачи Коши, когда (2) рассматривается при $t > 0$ и начальных условиях

$$w(0) = w_0. \qquad (3)$$

Аддитивные схемы для приближенного решения задачи (2), (3) строятся на основе представления

$$A = \sum_{\alpha=1}^{p} A_\alpha, \quad \alpha = 1, 2, \ldots, p. \qquad (4)$$

Здесь для простоты ограничимся проблемами, в которых каждое из операторных слагаемых является стационарным оператором, т.е. $A_\alpha \neq A_\alpha(t)$, $\alpha = 1, 2, \ldots, p$.

Определим класс аддитивных разностных схем следующим образом. Зададим равномерную сетку по времени с шагом $\tau > 0$, и пусть y_n – приближенное решение на момент времени $t_n = n\tau$, $n = 0, 1, \ldots$ Будем считать, что полностью неявные разностные схемы

$$\frac{y_{n+1}^{(\alpha)} - y_n^{(\alpha)}}{\tau} + A_\alpha y_{n+1}^{(\alpha)} = \varphi_{n+1}^{(\alpha)}, \qquad (5)$$
$$n = 0, 1, \ldots, \quad \alpha = 1, 2, \ldots, p,$$

безусловно устойчивы в некотором банаховом пространстве с нормой $\|\cdot\|$. Более точно, будем

Институт математического моделирования Российской Академии наук, Москва

считать выполненными следующие послойные оценки для разностных схем (5):

$$\left\|y_{n+1}^{(\alpha)}\right\| \le \left\|y_n^{(\alpha)}\right\| + \tau\left\|\varphi_{n+1}^{(\alpha)}\right\|, \qquad (6)$$
$$n = 0, 1, \ldots, \quad \alpha = 1, 2, \ldots, p.$$

К выделенному классу аддитивных схем относятся схемы с неотрицательно-определенными операторами ($A_\alpha \ge 0$, $\alpha = 1, 2, \ldots, p$, в сеточном гильбертовом пространстве L_2). Вторым важным примером служат разностные схемы для задач с нестрогим диагональным преобладанием по строкам для каждого операторного слагаемого:

$$a_{ii} \ge \sum_{i \ne i = 1}^{M} |a_{ij}|, \quad i = 1, 2, \ldots, M.$$

В этом случае имеем устойчивость схем (5) в L_∞.

2. Для приближенного решения задачи (2)–(4) будем использовать двухслойную векторную аддитивную схему

$$\frac{y_{n+1}^{(\alpha)} - y_n^{(\alpha)}}{\tau} + \sum_{\beta=1}^{\alpha} A_\beta y_{n+1}^{(\beta)} + \sum_{\beta=\alpha+1}^{p} A_\beta y_n^{(\beta)} = \varphi_{n+1}, \qquad (7)$$
$$n = 0, 1, \ldots, \quad \alpha = 1, 2, \ldots, p.$$

Начальные условия в соответствии с (3) зададим в виде

$$y_0^{(\alpha)} = w_0, \quad \alpha = 1, 2, \ldots, p. \qquad (8)$$

Рассматривая уравнение для определения $y_{n+1}^{(1)}$ и $y_n^{(p)}$, из (7) непосредственно получим равенство

$$(E + \tau A_1)\frac{y_{n+1}^{(1)} - y_n^{(1)}}{\tau} =$$
$$= \frac{y_n^{(p)} - y_{n-1}^{(p)}}{\tau} + \tau\frac{\varphi_{n+1} - \varphi_n}{\tau}, \quad n = 1, 2, \ldots \qquad (9)$$

Вычитая из уравнения для нахождения $y_{n+1}^{(\alpha+1)}$ уравнение для $y_{n+1}^{(\alpha)}$, приходим ко второму полезному соотношению:

$$(E + \tau A_{\alpha+1})\frac{y_{n+1}^{(\alpha+1)} - y_n^{(\alpha+1)}}{\tau} = \frac{y_{n+1}^{(\alpha)} - y_n^{(\alpha)}}{\tau}, \qquad (10)$$
$$n = 0, 1, \ldots, \quad \alpha = 1, 2, \ldots, p-1.$$

Из (10) с учетом (5), (6) непосредственно следуют оценки

$$\left\|\frac{y_{n+1}^{(\alpha+1)} - y_n^{(\alpha+1)}}{\tau}\right\| \le \left\|\frac{y_{n+1}^{(\alpha)} - y_n^{(\alpha)}}{\tau}\right\|, \qquad (11)$$
$$n = 0, 1, \ldots, \quad \alpha = 1, 2, \ldots, p-1.$$

Аналогично из (9) получим

$$\left\|\frac{y_{n+1}^{(1)} - y_n^{(1)}}{\tau}\right\| \le \left\|\frac{y_n^{(p)} - y_{n-1}^{(p)}}{\tau}\right\| + \tau\left\|\frac{\varphi_{n+1} - \varphi_n}{\tau}\right\|, \qquad (12)$$
$$n = 1, 2, \ldots$$

С учетом (11) из (12) следует послойная оценка для производной разностного решения по времени:

$$\left\|\frac{y_{n+1}^{(\alpha)} - y_n^{(\alpha)}}{\tau}\right\| \le \left\|\frac{y_n^{(\alpha)} - y_{n-1}^{(\alpha)}}{\tau}\right\| + \tau\left\|\frac{\varphi_{n+1} - \varphi_n}{\tau}\right\|, \qquad (13)$$
$$n = 1, 2, \ldots, \quad \alpha = 1, 2, \ldots, p.$$

Из (13) вытекает неравенство

$$\left\|\frac{y_{n+1}^{(\alpha)} - y_n^{(\alpha)}}{\tau}\right\| \le \left\|\frac{y_1^{(\alpha)} - y_0^{(\alpha)}}{\tau}\right\| + \sum_{k=1}^{n}\tau\left\|\frac{\varphi_{k+1} - \varphi_k}{\tau}\right\|, \qquad (14)$$
$$n = 1, 2, \ldots, \quad \alpha = 1, 2, \ldots, p.$$

Из (7) при $\alpha = 1$ с учетом (4) и (8) получаем неравенство

$$\left\|\frac{y_1^{(1)} - y_0^{(1)}}{\tau}\right\| \le \|\varphi_1 - Aw_0\|.$$

В силу (11) неравенство (14) теперь можно переписать в виде

$$\left\|\frac{y_{n+1}^{(\alpha)} - y_n^{(\alpha)}}{\tau}\right\| \le \|\varphi_1 - Aw_0\| + \sum_{k=1}^{n}\tau\left\|\frac{\varphi_{k+1} - \varphi_k}{\tau}\right\|, \qquad (15)$$
$$n = 1, 2, \ldots, \quad \alpha = 1, 2, \ldots, p.$$

Принимая во внимание очевидное неравенство

$$\left\|y_{n+1}^{(\alpha)}\right\| \le \left\|y_n^{(\alpha)}\right\| + \tau\left\|\frac{y_{n+1}^{(\alpha)} - y_n^{(\alpha)}}{\tau}\right\|,$$

из (15) получим искомую оценку для каждой отдельной компоненты векторной аддитивной схемы (7), (8):

$$\left\|y_{n+1}^{(\alpha)}\right\| \le \left\|y_n^{(\alpha)}\right\| + \tau\|\varphi_1 - Aw_0\| +$$
$$+ \tau\sum_{k=1}^{n}\tau\left\|\frac{\varphi_{k+1} - \varphi_k}{\tau}\right\|, \qquad (16)$$
$$n = 1, 2, \ldots, \quad \alpha = 1, 2, \ldots, p.$$

Это дает возможность сформулировать следующий основной результат.

Теорема. *Пусть для неявных разностных схем* (5) *выполнены априорные оценки* (6). *Тогда векторная аддитивная схема* (4), (7), (8) *устойчива по начальным данным и правой части и для разностных решений верны оценки* (16).

Специально подчеркнем, что выше мы получили оценки устойчивости для каждой отдельной компоненты $y_n^{(\alpha)}$, $\alpha = 1, 2, \ldots, p$. Тем самым в качестве приближенного решения задачи (1), (2) можно взять любую компоненту или же их линейную комбинацию

$$y_n = \sum_{\alpha=1}^{p} c_\alpha y_n^{(\alpha)}, \quad \sum_{\alpha=1}^{p} c_\alpha = 1,$$
$$c_\alpha \ge 0, \quad \alpha = 1, 2, \ldots, p.$$

На основе оценок типа (16) стандартным образом [1, 10] исследуется сходимость векторных аддитивных схем. В этой связи отметим близость полученной оценки (16) к основным априорным оценкам для двухслойных разностных схем, которые базируются на производных правой части по времени.

3. Полученная оценка устойчивости по начальным данным и правой части для векторной разностной схемы базируется на аналогичных оценках для разностных схем (5), в которые входят лишь отдельные операторные слагаемые расщепления (4). Такие задачи хорошо исследованы в теории устойчивости операторно-разностных схем [1, 10]. В частности, получены совпадающие необходимые и достаточные условия, исследована сходимость в различных нормах при минимальных требованиях на операторы задачи и т.д.

Из возможных обобщений полученного результата отметим следующие. Выше мы ограничились случаем постоянных (не зависящих от времени) операторов A_α, $\alpha = 1, 2, \ldots, p$. Рассмотрение проблемы в более общих условиях проводится аналогично с привлечением дополнительной информации о липшиц-непрерывности по времени этих операторов. Аналогично также рассматривается устойчивость векторных аддитивных схем при более общих предположениях о ρ-устойчивости схем (5). Большего внимания заслуживают проблемы исследования устойчивости других типов векторных аддитивных схем [7, 8], которые выступают, в частности, аналогами схем с весами.

Выражаем глубокую благодарность В.Н. Абрашину за внимание к работе и заинтересованное обсуждение результатов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Самарский А.А.* Теория разностных схем. М.: Наука, 1989.
2. *Марчук Г.И.* Методы расщепления. М.: Наука, 1989.
3. *Самарский А.А.* // ЖВМиМФ. 1962. Т. 2. № 5. С. 787–811.
4. *Яненко Н.Н.* Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. Новосибирск: Наука, 1967.
5. *Гордезиани Д.Г., Меладзе Г.В.* // ЖВМиМФ. 1974. Т. 14. № 1. С. 246–250.
6. *Samarskii A.A., Vabishchevich P.N.* Computational Heat Transfer. Chichester: Wiley, 1995.
7. *Абрашин В.Н.* // Дифференц. уравнения. 1990. Т. 26. № 2. С. 314–323.
8. *Вабищевич П.Н.* // ЖВМиМФ. 1996. Т. 36. № 3. С. 44–51.
9. *Самарский А.А., Вабищевич П.Н.* Computational Modelling and Computing in Physics. Dubna: JINR, 1997. P. 363–371.
10. *Самарский А.А., Гулин А.В.* Устойчивость разностных схем. М.: Наука, 1973.