1998. Т. 34, № 12. С. 1675 — 1685

УДК 519.63

РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА. I

А. А. Самарский, П. Н. Вабищевич

Введение. При численном решении многомерных нестационарных задач механики сплошной среды, задач газовой динамики в качестве базового выступает нестационарное уравнение переноса [1 — 3], например, обычное уравнение неразрывности. Проблемы построения дискретных аналогов для соответствующих краевых задач хорошо известны. В настоящей работе рассмотрены основные разностные схемы для приближенного решения модельных краевых задач для многомерного нестационарного уравнения переноса.

Исследование начинается с рассмотрения задач для дифференциальных уравнений. Выделены три основные формы записи конвективных (переносных) слагаемых: дивергентная, недивергентная и симметричная (полусумма дивергентной и недивергентной). Приведены оценки устойчивости решения дифференциальной задачи в различных нормах, которые служат ориентиром при исследовании свойств разностных задач. Формулируется принцип максимума для уравнения переноса. Для дискретных аналогов с выполнением принципа максимума связывается свойство монотонности разностной схемы. Сформулированы интегральные тождества для решения дифференциальной задачи, с которыми ассоциируется свойство консервативности для разностной схемы.

В нашем исследовании максимально используются основные результаты теории разностных схем [4]. Основой нашего рассмотрения служит общая теория устойчивости операторно-разностных схем. В вычислительной механике сплошных сред свойства тех или иных разностных схем изучаются преимущественно экспериментально на базе численных расчетов по решению некоторых тестовых задач. Теоретическое исследование обычно [3, 5] проводится с привлечением метода Неймана. На этом пути удается рассмотреть разностные схемы лишь для простейших одномерных задач переноса с постоянными коэффициентами с достаточно идеализированными краевыми условиями. Перенос результатов на задачи с переменными коэффициентами не является строгим. Мы ориентируемся на более адекватный математический аппарат получения априорных оценок для разностного решения в соответствующем сеточном пространстве.

Дифференциальные задачи. Нестационарные задачи переноса будем записывать как эволюционные операторные уравнения в соответствующих пространствах. Выделим класс модельных нестационарных задач для уравнения переноса с переменными коэффициентами конвективного переноса. Имея в виду прикладные задачи, естественно считать их переменными как по пространственным переменным, так и по времени.

В прямоугольнике Ω рассматривается нестационарное уравнение переноса с конвективными слагаемыми в дивергентном виде

$$\partial u/\partial t + \sum_{\alpha=1}^{2} \partial(v_\alpha(\mathbf{x},t)u)/\partial x_\alpha = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad t > 0. \tag{1}$$

В таком виде записывается обычное уравнение неразрывности, когда под u понимается плотность, а вектор $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ определяет локальную скорость сплошной среды. Уравнение (1) дополняется начальным условием

$$u(\mathbf{x}, 0) = u_0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega. \tag{2}$$

В зависимости от поля скоростей для уравнения (1) ставятся соответствующие граничные условия. Они задаются на той части границы, на которой поток входит в область. Для того чтобы не отвлекаться на технические детали, порождаемые граничными условиями, будем рассматривать начально-краевые задачи с условиями непротекания для скорости:

$$(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega, \quad t > 0, \tag{3}$$

где $\mathbf{n}$ — нормаль к границе расчетной области. При ограничениях (3) на поле скоростей нет необходимости формулировать какие-либо граничные условия для однозначного определения решения задачи (1), (2).

Нестационарную задачу для уравнения переноса запишем в виде дифференциально-операторного уравнения

$$du/dt + \mathcal{C}u = 0, \quad \mathcal{C} = \mathcal{C}(t), \quad t > 0. \tag{4}$$

Рассматривается задача Коши для эволюционного уравнения (4), т.е. уравнение дополняется условием

$$u(0) = u_0. \tag{5}$$

Для оператора конвективного переноса в недивергентной форме в соответствии с (1) положим $\mathcal{C} = \mathcal{C}_2$, где

$$\mathcal{C}_2 u = \sum_{\alpha=1}^{2} \partial(v_\alpha(\mathbf{x}, t)u)/\partial x_\alpha. \tag{6}$$

Вторым важным примером является нестационарное уравнение переноса в недивергентной форме

$$\partial u/\partial t + \sum_{\alpha=1}^{2} v_\alpha(\mathbf{x}, t)\partial u/\partial x_\alpha = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad t > 0. \tag{7}$$

При записи задачи конвекции-диффузии (2), (7) в виде (4), (5) имеем $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1$, где теперь

$$\mathcal{C}_1 u = \sum_{\alpha=1}^{2} v_\alpha(\mathbf{x}, t)\partial u/\partial x_\alpha. \tag{8}$$

Исходное уравнение (1) может быть записано с оператором конвективного переноса в недивергентном виде

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{\alpha=1}^{2} v_\alpha(\mathbf{x}, t)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha} + u\sum_{\alpha=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_\alpha}(v_\alpha(\mathbf{x}, t)) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad t > 0.$$

Для несжимаемой среды ($\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$) имеем $\mathcal{C}_1 = \mathcal{C}_2$, и уравнение (1) совпадает с (7).

В ряде случаев удобнее использовать уравнение переноса

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{2}\left(v_\alpha(\mathbf{x}, t)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha}(v_\alpha(\mathbf{x}, t)u)\right) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad t > 0, \tag{9}$$

когда оператор конвективного переноса записан в симметричной форме — в виде полусуммы конвективного переноса в недивергентной и дивергентной формах. При записи в виде (4) получим $\mathcal{C} = \mathcal{C}_0$, где

$$\mathcal{C}_0 u = \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{2}\left(v_\alpha(\mathbf{x}, t)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha}(v_\alpha(\mathbf{x}, t)u)\right). \tag{10}$$

К такой записи уравнения переноса (1) можно прийти не только в случае несжимаемой среды. Введем новую неизвестную $w = \sqrt{u}$, для которой из (1) непосредственно получим уравнение

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{2}\left(v_\alpha(\mathbf{x}, t)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}w + \frac{\partial}{\partial x_\alpha}(v_\alpha(\mathbf{x}, t)w)\right) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad t > 0.$$

В частном случае уравнения неразрывности в качестве неизвестной теперь выступает корень квадратный из плотности.

На основе (6), (8), (10) получим следующие представления для операторов конвективного переноса в дивергентном и недивергентном формах через оператор конвективного переноса в симметричной форме:

$$\mathcal{C}_1 u = \mathcal{C}_0 u - (1/2)\operatorname{div}\mathbf{v}\, u, \quad \mathcal{C}_2 u = \mathcal{C}_0 u + (1/2)\operatorname{div}\mathbf{v}\, u. \tag{11}$$

Решение дискретной задачи должно наследовать основные свойства дифференциальной задачи. Этого можно достичь, в частности, когда сеточные операторы будут иметь те же основные свойства, что и дифференциальные операторы.

Пусть $\mathcal{H} = L_2(\Omega)$ — гильбертово пространство со скалярным произведением $(u, w) = \int_\Omega u(\mathbf{x})w(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}$ для произвольных функций $u(\mathbf{x})$ и $w(\mathbf{x})$ и нормой $\|u\| \equiv (u, u)^{1/2}$.

Операторы конвективного переноса в дивергентной и недивергентной формах при ограничениях (3) на поле скоростей сопряжены друг с другом с точностью до знака, а оператор конвективного переноса в симметричной форме является кососимметричным, т. е.

$$\mathcal{C}_1 = -\mathcal{C}_2^*, \quad \mathcal{C}_0 = 0{,}5(\mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_2) = -\mathcal{C}_0^*. \tag{12}$$

Из равенства $\int_\Omega (\mathcal{C}_1 uw + u\mathcal{C}_2 w)\,d\mathbf{x} = \int_\Omega \operatorname{div}(\mathbf{v}uw)\,d\mathbf{x} = 0$, которое следует из (3), получим доказываемое свойство $(\mathcal{C}_1 u, w) = (u, \mathcal{C}_1^* w) = -(u, \mathcal{C}_2 w)$.

В силу (11) из (12) имеет место оценка энергии оператора конвективного переноса

$$|(\mathcal{C}_\alpha u, u)| \le \mathcal{M}_\alpha \|u\|^2 \tag{13}$$

с постоянной

$$\mathcal{M}_\alpha = \begin{cases} 0, & \text{если } \alpha = 0, \\ (1/2)\max\limits_{\mathbf{x}\in\Omega}|\operatorname{div}\mathbf{v}|, & \text{если } \alpha = 1, 2. \end{cases} \tag{14}$$

Приведем основную априорную оценку для нестационарной задачи (4), (5), обеспечивающую устойчивость по начальным данным. С учетом (13), (14), домножая скалярно уравнение на u, получим $\|u\| d\|u\|/dt = -(\mathcal{C}u, u) \le \mathcal{M}_\alpha \|u\|^2$. Отсюда непосредственно вытекает оценка

$$\|u(\mathbf{x}, t)\| \le \exp(\mathcal{M}_\alpha t)\|u_0(\mathbf{x})\|, \quad \alpha = 0, 1, 2. \tag{15}$$

Тем самым рост нормы решения непосредственно связывается с масштабом сжимаемости среды (с постоянной $\mathcal{M}_\alpha$, $\alpha = 0, 1, 2$).

Отметим, что для уравнения переноса с конвективным слагаемым в симметричной форме (9) имеет место равенство

$$\int_\Omega u^2(\mathbf{x}, t)\,d\mathbf{x} = \int_\Omega u_0^2(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}. \tag{16}$$

Естественно стремиться к тому, чтобы аналогичный инвариант (закон сохранения) имел место и для дискретного аналога задачи (2), (9). О таких схемах говорят как о консервативных [2, 4].

Для уравнения переноса в дивергентной форме при ограничениях (3) на поле скоростей интегрированием по всей области Ω получим равенство

$$\int_\Omega u(\mathbf{x}, t)\,d\mathbf{x} = \int_\Omega u_0(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}. \tag{17}$$

Для несжимаемой среды выполнены два свойства консервативности: (16) и (17).

Для уравнений переноса в дивергентной и недивергентной формах (1), (7) часто не очень удобно ориентироваться на оценки устойчивости (15), так как рост нормы решения связывается со сжимаемостью среды. Прежде чем получать другие оценки, отметим важное свойство монотонности для уравнений переноса, которое связываем с выполнением принципа максимума.

Начнем с рассмотрения задачи Коши (1), (2) для уравнения переноса в дивергентной форме. Покажем прежде всего, что при неотрицательных начальных условиях неотрицательным будет решение на любой другой момент времени $t > 0$. Доказательство проведем от противного. Предположим, что начиная с момента времени $t = t^*$ в части области Ω функция $u(x,t) < 0$. Выберем достаточно малое θ и проинтегрируем уравнение (1) по подобласти $Q^* = \{(\mathbf{x},t) | \mathbf{x} \in \Omega,\ t^* \le t \le t^* + \theta,\ u(x,t) < 0\}$, что дает $\int\limits_{Q^*} \frac{\partial u}{\partial t}\,d\mathbf{x}\,dt + \int\limits_{Q^*} \sum\limits_{\alpha=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_\alpha}(v_\alpha(\mathbf{x},t)u)\,d\mathbf{x}\,dt = 0$. Такое равенство невозможно, так как второй интеграл равен нулю, а первый отрицателен ($u(\mathbf{x},t^*+\theta) < 0$ на соответствующей части границы области Q^*).

На основании установленного свойства монотонности (выполнимости принципа максимума) выводится оценка устойчивости решения задачи (1), (2) по начальным данным в пространстве $L_1(\Omega)$, норма в котором есть $\|g\|_1 = \int\limits_\Omega |g(\mathbf{x})|\,d\mathbf{x}$. Рассмотрим вспомогательную задачу

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \sum_{\alpha=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_\alpha}(v_\alpha(\mathbf{x},t)w) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad t > 0, \quad w(\mathbf{x},0) = |u_0(\mathbf{x})|, \quad \mathbf{x} \in \Omega.$$

В силу принципа максимума имеем $|u(\mathbf{x},t)| \le w(\mathbf{x},t)$, т.е. функция $w(\mathbf{x},t)$ является мажорирующей для решения задачи (1), (2). Принимая во внимание равенство (см. (17)) $\|w(\mathbf{x},t)\|_1 = \|u_0(\mathbf{x})\|_1$, получим

$$\|u(\mathbf{x},t)\|_1 \le \|u_0(\mathbf{x})\|_1. \tag{18}$$

Аналогичные свойства решения задачи Коши (2), (7) для уравнения переноса в недивергентном виде получим, опираясь на установленные свойства для задачи (1), (2). Применяемый методологический прием удобно использовать и при изучении сеточных задач.

Рассмотрим вспомогательную задачу для сопряженного к (7) уравнения

$$-\frac{\partial w}{\partial t} + \sum_{\alpha=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_\alpha}(v_\alpha(\mathbf{x},t)w) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad T > t > 0, \tag{19}$$

с начальным условием

$$w(\mathbf{x},T) = w_0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega. \tag{20}$$

Домножив уравнение (19) на решение задачи (2), (7) $u(\mathbf{x},t)$ и проинтегрировав по $\mathbf{x} \in \Omega$ и $0 < t < T$, получим равенство

$$\int\limits_\Omega u(\mathbf{x},T)w(\mathbf{x},T)\,d\mathbf{x} = \int\limits_\Omega u(\mathbf{x},0)w(\mathbf{x},0)\,d\mathbf{x}.$$

Конкретизируем начальное условие (20), положив $w_0(\mathbf{x}) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}^*)$, где $\delta(\mathbf{x})$ — δ-функция. Тем самым $w(\mathbf{x},t)$ есть функция источника для уравнения переноса в дивергентной форме (19). Решение задачи (2), (7) представим в виде

$$u(\mathbf{x}^*,T) = \int\limits_\Omega u(\mathbf{x},0)w(\mathbf{x},0)\,d\mathbf{x}. \tag{21}$$

На основании принципа максимума получим $w(\mathbf{x},0) \ge 0$, $\int\limits_\Omega w(\mathbf{x},0)\,d\mathbf{x} = 1$ для решения задачи (19), (20). Используя (21), с учетом произвольности $T > 0$ можем сделать вывод о справедливости принципа максимума и для решения задачи (2), (7): $u(\mathbf{x},t) \ge 0$, если $u_0(\mathbf{x}) \ge 0$, кроме того, верна априорная оценка в $L_\infty(\Omega)$

$$\|u(\mathbf{x},t)\|_\infty \le \|u_0(\mathbf{x})\|_\infty, \tag{22}$$

где $\|g\|_\infty = \max\limits_{\mathbf{x}\in\Omega} |g(\mathbf{x})|$. Тем самым при исследовании устойчивости разностных схем для уравнения переноса в симметричной форме (9) естественно ориентироваться на безусловную оценку устойчивости по начальным данным (см. (15))

$$\|u(\mathbf{x},t)\| \le \|u_0(\mathbf{x})\| \tag{23}$$

в гильбертовом пространстве $L_2(\Omega)$. Для уравнения переноса в дивергентной форме (1) типичной является оценка (18) в банаховом пространстве $L_1(\Omega)$, а для уравнения переноса в недивергентной форме (7) — оценка (22) в $L_\infty(\Omega)$.

Среди важнейших качественных свойств рассматриваемых задач выделяем консервативность и монотонность. Для уравнения переноса в дивергентной форме имеет место свойство консервативности (17) — L_1-консервативность. Аналогичное свойство (L_2-консервативность) выполняется и для уравнения переноса в симметричной форме — равенство (16). Для уравнений в дивергентной и недивергентной формах справедлив принцип максимума.

Особое внимание должно быть уделено случаю несжимаемой ($\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$) среды, когда рассматриваемые формы уравнения переноса эквивалентны друг другу. Необходимо только учитывать, что эта эквивалентность имеет место на дифференциальном уровне. При переходе к дискретным аналогам проблема такой эквивалентности должна рассматриваться специально.

Разностные операторы конвективного переноса. В прямоугольнике Ω введем равномерную для простоты по обеим переменным разностную сетку с шагами h_α, $\alpha = 1,2$. Для сеток по отдельным направлениям x_α, $\alpha = 1,2$, используем обозначения $\bar{\omega}_\alpha = \{x_\alpha | x_\alpha = i_\alpha h_\alpha, i_\alpha = 0,1,\ldots,N_\alpha, N_\alpha h_\alpha = l_\alpha\}$, где $\omega_\alpha = \{x_\alpha | x_\alpha = i_\alpha h_\alpha, i_\alpha = 1,2,\ldots,N_\alpha - 1, N_\alpha h_\alpha = l_\alpha\}$ — множество внутренних узлов. Для сетки в Ω положим $\bar{\omega} = \bar{\omega}_1 \times \bar{\omega}_2 = \{\mathbf{x} | \mathbf{x} = (x_1, x_2), x_\alpha \in \bar{\omega}_\alpha, \alpha = 1,2\}$, $\omega = \omega_1 \times \omega_2$.

В стандартных безындексных обозначениях теории разностных схем [4] для правой и левой разностных производных имеем $w_{x_\alpha} = (w(x_\alpha + h_\alpha) - w(x_\alpha))/h_\alpha$, $w_{\bar{x}_\alpha} = (w(x_\alpha) - w(x_\alpha - h_\alpha))/h_\alpha$, а центральная разностная производная определяется выражением $w_{\overset{\circ}{x}_\alpha} = (1/2)(w_{x_\alpha} + w_{\bar{x}_\alpha}) = (w(x_\alpha + h_\alpha) - w(x_\alpha - h_\alpha))/(2h_\alpha)$, $\alpha = 1,2$.

На множестве сеточных функций, заданных на $\bar{\omega} = \omega \cup \partial\omega$, определим гильбертово пространство $H = L_2(\omega)$, в котором скалярное произведение и норма задаются следующим образом:

$$(y, w) = \sum_{\mathbf{x} \in \bar{\omega}} y(\mathbf{x}) w(\mathbf{x}) \hbar_1(x_1) \hbar_2(x_2), \qquad \|y\| = (y, y)^{1/2},$$

где $\hbar_\alpha(x_\alpha) = \begin{cases} h_\alpha, & h_\alpha \le x_\alpha \le l_\alpha - h_\alpha, \\ 0{,}5 h_\alpha, & x_\alpha = 0,\ x_\alpha = l_\alpha, \end{cases} \quad \alpha = 1,2.$

Рассмотрим теперь разностные аналоги дифференциальных операторов конвективного переноса, записанных в различных формах. Оператору в недивергентной форме (8) поставим с учетом ограничений (3) на поле скоростей в соответствие двумерный разностный оператор конвективного переноса

$$C_1 = \sum_{\alpha=1}^{2} C_1^{(\alpha)}, \quad C_1^{(\alpha)} y = \begin{cases} b^{(\alpha)} y_{\overset{\circ}{x}_\alpha}, & h_\alpha \le x_\alpha \le l_\alpha - h_\alpha, \\ 0, & x_\alpha = 0,\ x_\alpha = l_\alpha, \end{cases} \quad \alpha = 1,2. \tag{24}$$

В простейшем случае достаточно гладких коэффициентов конвективного переноса положим $b^{(\alpha)}(\mathbf{x}, t) = v_\alpha(\mathbf{x}, t)$, $\mathbf{x} \in \bar{\omega}$. Очевидно, что на классе функций $C^{(3)}(\Omega)$ разностный оператор C_1 аппроксимирует дифференциальный оператор конвективного переноса в недивергентной форме (8) со вторым порядком по пространственным переменным — погрешность аппроксимации есть $O(|h|^2)$, $|h|^2 = h_1^2 + h_2^2$.

Несколько сложнее обстоит дело с аппроксимацией оператора конвективного переноса в дивергентной форме (6). Во внутренних узлах можем использовать центрально-разностные аппроксимации: $C_2^{(\alpha)} y = (b^{(\alpha)} y)_{\overset{\circ}{x}_\alpha}$, $h_\alpha \le x_\alpha \le l_\alpha - h_\alpha$, $\alpha = 1,2$. Для граничных узлов приходится ограничиваться аппроксимациями направленными разностями, например, $C_2^{(\alpha)} y = (b^{(\alpha)} y)_{x_\alpha}$, $x_\alpha = 0$, $C_2^{(\alpha)} y = (b^{(\alpha)} y)_{\bar{x}_\alpha}$, $x_\alpha = l_\alpha$, $\alpha = 1,2$. В общем случае можем рассчитывать только на первый порядок погрешности аппроксимации. Ситуацию во многом спасает локальность потери второго порядка аппроксимаций, специальное дивергентное представление погрешности аппроксимации. Тем самым воспользуемся разностным оператором

$$C_2 = \sum_{\alpha=1}^{2} C_2^{(\alpha)}, \quad C_2^{(\alpha)} y = \begin{cases} (b^{(\alpha)} y)_{x_\alpha}, & x_\alpha = 0, \\ (b^{(\alpha)} y)_{\overset{\circ}{x}_\alpha}, & h_\alpha \le x_\alpha \le l_\alpha - h_\alpha, \\ (b^{(\alpha)} y)_{\bar{x}_\alpha}, & x_\alpha = l_\alpha, \end{cases} \quad \alpha = 1,2, \tag{25}$$

который аппроксимирует оператор конвективного переноса в дивергентной форме $\mathcal{C}_2$.

При аппроксимации двумерного оператора конвективного переноса в симметричной форме будем рассматривать представление $C_0 = 0{,}5(C_1 + C_2)$, так что

$$C_0 = \sum_{\alpha=1}^{2} C_0^{(\alpha)}, \quad C_0^{(\alpha)} y = \begin{cases} 0{,}5(b^{(\alpha)}y)_{x_\alpha}, & x_\alpha = 0, \\ 0{,}5\left(b^{(\alpha)}y_{\overset{\circ}{x}_\alpha} + (b^{(\alpha)}y)_{\overset{\circ}{x}_\alpha}\right), & h_\alpha \le x_\alpha \le l_\alpha - h_\alpha, \\ 0{,}5(b^{(\alpha)}y)_{\bar{x}_\alpha}, & x_\alpha = l_\alpha, \end{cases} \quad \alpha = 1,2. \tag{26}$$

Разностные операторы C_α, $\alpha = 0,1,2$, наследуют следующие основные свойства сопряженности дифференциальных операторов конвективного переноса (см. (12)):

$$C_1^* = -C_2, \quad C_0^* = -C_0 \tag{27}$$

в пространстве сеточных функций H. Доказательство проводится на основе рассмотрения соответствующих одномерных операторов. Прямыми выкладками убеждаемся, что на классе сеточных функций (см. условие (3)) $b^{(\alpha)}(\mathbf{x}) = 0$, $x_\alpha = 0$, $x_\alpha = l_\alpha$, $\alpha = 1,2$, имеют место свойства (27) и для одномерных операторов: $(C_1^{(\alpha)}y, w) = -(y, C_2^{(\alpha)}w)$, $(C_0^{(\alpha)}y, y) = 0$, $\alpha = 1,2$.

Рассмотрим сеточный аналог оценки (13) энергии оператора конвективного переноса. Для указанных операторов конвективного переноса справедливо неравенство

$$|(C_\alpha y, y)| \le M_\alpha \|y\|^2, \quad \alpha = 0,1,2, \tag{28}$$

с постоянными M_α, $\alpha = 0,1,2$, не зависящими от шагов сетки. В случае операторов (24), (25) получим постоянную, которая зависит от первых производных коэффициентов конвективного переноса.

Для дифференциальных операторов конвективного переноса с учетом (11) имеем $(\mathcal{C}_0 - \mathcal{C}_1)u = (\mathcal{C}_2 - \mathcal{C}_0)u = 0{,}5 \operatorname{div} \mathbf{v}\, u$. К сожалению, при выбранных аппроксимациях операторов конвективного переноса и при обычных аппроксимациях $\operatorname{div} \mathbf{v}$ на разностном уровне подобного соотношения нет. В силу этого для несжимаемой среды нет эквивалентности различных аппроксимаций операторов конвективного переноса. Постоянные M_α, $\alpha = 1,2$, в неравенстве (28) не согласованы с постоянными (14) в неравенстве (13). В частности, для внутренних узлов получим $(C_1 - C_0)y = 0{,}5 \sum\limits_{\alpha=1}^{2} b^{(\alpha)}_{\overset{\circ}{x}_\alpha} y + 0{,}5 \sum\limits_{\alpha=1}^{2} h_\alpha (y_{x_\alpha} b^{(\alpha)}_{x_\alpha} - y_{\bar{x}_\alpha} b^{(\alpha)}_{\bar{x}_\alpha})$. Последнее слагаемое в правой части и определяет меру рассогласованности используемых аппроксимаций.

В оценке (28) $M_0 = 0$, а для M_α, $\alpha = 1,2$, имеем

$$M_\alpha \le \frac{1}{2} \sum_{\beta=1}^{2} \max_{x_\beta \in \omega_\beta} \{|b^{(\alpha)}_{x_\beta}|, |b^{(\alpha)}_{\bar{x}_\beta}|\}, \quad \alpha = 1,2. \tag{29}$$

Тем самым, хотя эти постоянные и не зависят от сеточных параметров, но они существенно грубее (см. (14)), чем в оценке (13). И с этой точки зрения простейшие аппроксимации конвективного переноса (24) — (26) нельзя признать удачными.

Рассматриваемыми свойствами сопряженности обладают двумерные операторы конвективного переноса, которые основаны на использовании аппроксимаций с заданием коэффициентов $v_\alpha(\mathbf{x}, t)$, $\alpha = 1,2$, на сдвинутых на полшага сетках в соответствующих направлениях. Такие сетки традиционно широко используются в вычислительной гидродинамике.

Будем относить коэффициент $v_1(\mathbf{x}, t)$ конвективного переноса по переменной x_1 к узлам сетки, сдвинутой по этой переменной на полшага, сетка для коэффициента $v_2(\mathbf{x}, t)$ сдвигается по x_2 на $0{,}5h_2$ соответственно.

Разностный оператор конвективного переноса в недивергентной форме определим следующим образом:

$$C_1 = \sum_{\alpha=1}^{2} C_1^{(\alpha)}, \tag{30}$$

где

$$C_1^{(i)}y = \begin{cases} b^{(i)}(x_1+0{,}5(2-i)h_1, x_2+0{,}5(i-1)h_2)y_{x_i}, & x_i=0, \\ 0{,}5(b^{(i)}(x_1-0{,}5(2-i)h_1, x_2-0{,}5(i-1)h_2)y_{\bar{x}_i}+ & \\ \quad +b^{(i)}(x_1+0{,}5(2-i)h_1, x_2+0{,}5(i-1)h_2)y_{x_i}), & h_i \le x_i \le l_i-h_i, \\ b^{(i)}(x_1-0{,}5(2-i)h_1, x_2-0{,}5(i-1)h_2)y_{\bar{x}_i}, & x_i=l_i, \end{cases} \quad i=1,2.$$

Вблизи границы мы снова использовали (см. (25)) аппроксимации направленными разностями. С учетом условия непротекания (3) при этом сохраняется второй порядок аппроксимации.

Для дивергентного оператора конвективного переноса используем аппроксимацию

$$C_2 = \sum_{\alpha=1}^{2} C_2^{(\alpha)}, \tag{31}$$

где теперь

$$C_2^{(i)}y = \begin{cases} (h_i)^{-1}b^{(i)}(x_1+0{,}5(2-i)h_1, x_2+0{,}5(i-1)h_2)\times & \\ \quad \times(y(x_1+(2-i)h_1, x_2+(i-1)h_2)+y(x_1,x_2)), & x_i=0, \\ (2h_i)^{-1}b^{(i)}(x_1+0{,}5(2-i)h_1, x_2+0{,}5(i-1)h_2)\times & \\ \quad \times(y(x_1+(2-i)h_1, x_2+(i-1)h_2)+y(x_1,x_2))- & \\ \quad -(2h_i)^{-1}b^{(i)}(x_1-0{,}5(2-i)h_1, x_2-0{,}5(i-1)h_2)\times & \\ \quad \times(y(x_1-(2-i)h_1, x_2-(i-1)h_2)+y(x_1,x_2)), & h_i \le x_i \le l_i-h_i, \\ -(h_1)^{-1}b^{(i)}(x_1-0{,}5(2-i)h_1, x_2-0{,}5(i-1)h_2)\times & \\ \quad \times(y(x_1-(2-i)h_1, x_2-(i-1)h_2)+y(x_1,x_2)), & x_i=l_i, \end{cases} \quad i=1,2.$$

Непосредственными выкладками убеждаемся в важнейшем свойстве сопряженности с обратным знаком ($C_1^* = -C_2$) построенных операторов переноса. Для кососимметричного ($C_0^* = -C_0$) оператора в симметричной форме из (30), (31) получим

$$C_0 = \sum_{\alpha=1}^{2} C_0^{(\alpha)}, \tag{32}$$

где теперь

$$C_0^{(i)}y = \begin{cases} (h_1)^{-1}b^{(i)}(x_1+0{,}5(2-i)h_1, x_2+0{,}5(i-1)h_2)\times & \\ \quad \times y(x_1+(2-i)h_1, x_2+(i-1)h_2), & x_i=0, \\ (2h_i)^{-1}b^{(i)}(x_1+0{,}5(2-i)h_1, x_2+0{,}5(i-1)h_2)\times & \\ \quad \times y(x_1+(2-i)h_1, x_2+(i-1)h_2)- & \\ \quad -(2h_i)^{-1}b^{(i)}(x_1-0{,}5(2-i)h_1, x_2-0{,}5(i-1)h_2)\times & \\ \quad \times y(x_1-(2-i)h_1, x_2-(i-1)h_2), & h_i \le x_i \le l_i-h_i, \\ -(h_i)^{-1}b^{(i)}(x_1-0{,}5(2-i)h_1, x_2-0{,}5(i-1)h_2)\times & \\ \quad \times y(x_1-(2-i)h_1, x_2-(i-1)h_2), & x_i=l_i, \end{cases} \quad i=1,2.$$

На основании (30) — (32) получим сеточный аналог (11):

$$C_i y = C_0 y + 0{,}5(-1)^i \operatorname{div}_h \mathbf{b}\, y \tag{33}$$

при специальной аппроксимации $\operatorname{div} \mathbf{v}$ и учете ограничений (3), а именно

$$\operatorname{div}_h \mathbf{b} = \sum_{\alpha=1}^{2} \operatorname{div}_h \mathbf{b}_\alpha, \tag{34}$$

где

$$\operatorname{div}_h \mathbf{b}_i =$$

$$= \begin{cases} 2(h_i)^{-1}(b^{(i)}(x_1+0{,}5(2-i)h_1, x_2+0{,}5(i-1)h_2)-b^{(i)}(x_1,x_2)), & x_i=0, \\ (h_i)^{-1}(b^{(i)}(x_1+0{,}5(2-i)h_1, x_2+0{,}5(i-1)h_2)- & \\ \quad -b^{(i)}(x_1-0{,}5(2-i)h_1, x_2-0{,}5(i-1)h_2)), & h_i \le x_i \le l_i-h_i, \\ -2(h_i)^{-1}(b^{(i)}(x_1,x_2)-b^{(i)}(x_1-0{,}5(2-i)h_1, x_2-0{,}5(i-1)h_2)), & x_i=l_i, \end{cases} \quad i=1,2.$$

Следовательно, для несжимаемой среды, для которой условие несжимаемости на сеточном уровне задано в виде $\operatorname{div}_h \mathbf{b} = 0$, имеет место алгебраическая эквивалентность разностных операторов конвективного переноса (30) — (32), т.е. $C_1 = C_2 = C_0$.

В соответствии с (33) для постоянных в (28) получим

$$M_\alpha = 0{,}5 \max_{\mathbf{x}\in\bar{\omega}} |\operatorname{div}_h \mathbf{b}|, \quad \alpha = 1, 2, \tag{35}$$

что является прямым сеточным аналогом (14).

Свойство L_2-консервативности (16) является следствием кососимметричности оператора переноса в симметричной форме. На разностном уровне имеем $(C_0 y, y) = 0$. При исследовании L_1-консервативности (см. (17)) опираемся на свойство оператора дивергентного конвективного переноса $(C_2 y, 1) = 0$, которое для рассмотренных аппроксимаций (25), (31) при ограничениях (3) на поле скоростей устанавливается непосредственно.

Двухслойные разностные схемы. После дискретизации по пространственным переменным от (4) придем к дифференциально-операторному уравнению

$$dw/dt + Cw = 0, \quad C = C(t), \quad t > 0. \tag{36}$$

В соответствии с (5) положим

$$w(0) = u_0. \tag{37}$$

Исследуем на устойчивость стандартные двухслойные разностные схемы для задачи (36), (37), опираясь на установленные выше свойства разностных операторов конвективного переноса.

Наиболее естественно ориентироваться вначале на схемы с разностным оператором конвективного переноса в симметричной форме. Будем использовать равномерную сетку по времени с шагом $\tau > 0$, и пусть y_n — приближенное решение на момент времени $t_n = n\tau$, $n = 0, 1, \ldots$

Простейшей является двухслойная явная схема, когда дифференциально-разностной задаче (36), (37) при $C = C_0$ ставится в соответствие разностное уравнение

$$(y_{n+1} - y_n)/\tau + C_0(t_n) y_n = 0, \quad n = 0, 1, \ldots, \quad y_0 = u_0. \tag{38}$$

Хорошо известно [4, 6], что эта двухслойная явная схема является безусловно неустойчивой. Чтобы показать это, запишем уравнение (38) в виде $y_{n+1} = S_n y_n$, $n = 0, 1, \ldots$, где $S_n = E - \tau C_0(t_n)$ — оператор перехода с n временного слоя на $n+1$, E — тождественный оператор. Устойчивость по начальным данным в H $\|y_{n+1}\| \le \|y_n\|$, $n = 0, 1, \ldots$, эквивалентна операторному неравенству $S_n^* S_n \le E$, $n = 0, 1, \ldots$ Подстановка выражения для S_n с учетом кососимметричности оператора $C_0(t_n)$ приводит нас к условию $\tau C_0^*(t_n) C_0(t_n) \le 0$, $n = 0, 1, \ldots$ Таким образом, ни при каких шагах по времени схема (38) не является устойчивой.

Более предпочтительны классические двухслойные схемы с весами. В этом случае разностное уравнение

$$(y_{n+1} - y_n)/\tau + C_0(t_{n+1}^{(\sigma)})(\sigma y_{n+1} + (1-\sigma) y_n) = 0, \quad n = 0, 1, \ldots; \tag{39}$$

здесь $t_{n+1}^{(\sigma)} = \sigma t_{n+1} + (1-\sigma) t_n$, аппроксимирует уравнение переноса (9) во внутренних узлах с погрешностью $O(\tau^\nu + |h|^2)$, где ν равно двум при $\sigma = 0{,}5$ и равно единице при $\sigma \ne 0{,}5$. Принимая во внимание кососимметричность оператора переноса, домножим уравнение (39) скалярно на $2\tau(\sigma y_{n+1} + (1-\sigma) y_n) = \tau(y_{n+1} + y_n) + (2\sigma - 1)\tau^2 (y_{n+1} - y_n)/\tau$. Получим равенство

$$\|y_{n+1}\|^2 + (2\sigma - 1)\tau^2 \|(y_{n+1} - y_n)/\tau\|^2 = \|y_n\|^2. \tag{40}$$

Отсюда следует, что схема с весами (39) абсолютно устойчива при $\sigma \ge 0{,}5$. Заметим также, что из (40) непосредственно следует консервативность схемы второго порядка аппроксимации по времени ($\sigma = 0{,}5$) в смысле (см. (16)) выполнения равенства $\|y_{n+1}\|^2 = \|y_0\|^2$, $n = 0, 1, \ldots$

Установим теперь условия устойчивости для схем с весами для операторов конвективного переноса в недивергентной и дивергентной формах:

$$(y_{n+1} - y_n)/\tau + C_\alpha(t_{n+1}^{(\sigma)})(\sigma y_{n+1} + (1-\sigma) y_n) = 0, \quad n = 0, 1, \ldots, \quad \alpha = 1, 2. \tag{41}$$

Основой нашего рассмотрения является оценка (28) с постоянными, определяемыми согласно (29) или (35). Подобно (40) для разностного уравнения (41) получим неравенство

$$\|y_{n+1}\|^2 + (2\sigma - 1)\tau^2\|(y_{n+1} - y_n)/\tau\|^2 \le \|y_n\|^2 + 2\tau M_\alpha\|\sigma y_{n+1} + (1-\sigma)y_n\|^2, \quad \alpha = 1,2. \tag{42}$$

Для последнего слагаемого в правой части имеем оценку $\|\sigma y_{n+1} + (1-\sigma)y_n\|^2 \le 2\sigma^2\|y_{n+1}\|^2 + +2(1-\sigma)^2\|y_n\|^2$, подстановка которой в (42) при стандартных ограничениях $\sigma \ge 0{,}5$ дает неравенство $\|y_{n+1}\|^2 \le (1 + 4\tau M_\alpha(\sigma-1)^2)(1 - 4\tau M_\alpha\sigma^2)^{-1}\|y_n\|^2$, $\alpha = 1,2$. Воспользуемся неравенством $(1-\eta)^{-1} \le \exp(2\eta)$, верным при $\eta \le 0{,}75$, и получим оценку ρ-устойчивости

$$\|y_{n+1}\|^2 \le \rho\|y_n\|^2, \quad n = 0,1,\ldots, \tag{43}$$

при слабых ограничениях на шаг по времени $\tau \le 3/(16M_\alpha\sigma^2)$ с $\rho = \exp(4M_\alpha((\sigma-1)^2+2\sigma^2)\tau)$, $\alpha = 1,2$. Учитывая оценку (15), для решения дифференциальной задачи более оптимальной была бы оценка (43) с меньшим ρ: $\rho = \exp(M_\alpha\tau)$, $\alpha = 1,2$. Еще раз подчеркнем, что при использовании согласованных аппроксимаций конвективного переноса и дивергенции поля скоростей (30) — (32), (34) обеспечивается ограниченный рост нормы решения, обусловленный сжимаемостью среды (постоянные M_α, $\alpha = 1,2$, в оценке (43) согласованы с дифференциальной задачей).

На основе свойства $(C_2y, 1) = 0$ устанавливается L_1-консервативность разностной схемы с весами (41) при $\alpha = 2$ для дивергентного уравнения переноса (1): $(y_{n+1}, 1) = (y_0, 1)$, $n = 0,1,\ldots$, которая для несжимаемой среды (при выполнении условия $\operatorname{div}_h \mathbf{b} = 0$) имеет место и для разностных схем с операторами конвективного переноса в недивергентной (30) и симметричной (32) формах.

На основе полученных априорных оценок устойчивости стандартным образом (см. работы [4, 6, 7]) находим оценки скорости сходимости разностных схем в сеточном пространстве H, предполагая соответствующую гладкость коэффициентов уравнения и начальных данных.

Трехслойные разностные схемы. При использовании трехслойных разностных схем мы можем рассчитывать на второй порядок аппроксимации по времени. Для приближенного решения задачи (2), (9) будем использовать явную трехслойную схему

$$(y_{n+1} - y_{n-1})/(2\tau) + C_0(t_n)y_n = 0, \quad n = 1,2,\ldots, \tag{44}$$

с начальными условиями

$$y_0 = u_0, \quad y_1 = u_1. \tag{45}$$

Для задания второго начального условия (u_1 в (45)) со вторым порядком в простейшем случае привлекается двухслойная схема, так что $(y_1 - y_0)/\tau + 0{,}5C_0(0{,}5(t_1+t_0))(y_1+y_0) = 0$. Разностная схема (44), (45) аппроксимирует исходную задачу переноса (1), (2) со вторым порядком по пространственным переменным и по времени.

Во избежание загромождения изложения техническими деталями проведем исследование условий устойчивости в предположениях, что оператор конвективного переноса постоянен (не зависит от n, т.е. $C_0(t_{n+1}) = C_0(t_n) = C_0$). Чтобы получить необходимую априорную оценку для разностной схемы (44), (45) в таких предположениях, запишем [6] ее в виде $y_{n+1} + \tau C_0 y_n = y_{n-1} - C_0 y_n$. Квадраты норм левой и правой частей этого равенства дают $\|y_{n+1}\|^2 + 2\tau(y_{n+1}, C_0y_n) = \|y_{n-1}\|^2 - 2\tau(y_{n-1}, C_0y_n)$. Добавляя к обеим частям $\|y_n\|^2$, с учетом кососимметричности оператора C_0 получим

$$\|y_{n+1}\|^2 + 2\tau(y_{n+1}, C_0y_n) + \|y_n\|^2 = \|y_n\|^2 + 2\tau(y_{n-1}, C_0y_n) + \|y_{n+1}\|^2.$$

Тем самым для разностной схемы (44) при переходе на новый временной слой сохраняется $D(y_{n+1}, y_n) \equiv \|y_{n+1}\|^2 + 2\tau(y_{n+1}, C_0y_n) + \|y_n\|^2$. Сеточный закон сохранения

$$D(y_{n+1}, y_n) = D(y_n, y_{n-1}) = \cdots = D(y_1, y_0) \tag{46}$$

необходимо связать с законом сохранения (16) для дифференциальной задачи.

Рассмотрим случай, когда на шаг по времени наложены ограничения

$$\tau^2\|C_0\|^2 \le 1-\varepsilon, \quad 0<\varepsilon<1, \quad n=1,2,\ldots \tag{47}$$

Тогда $\|y_{n+1}\|^2+2\tau(y_{n+1},C_0y_n)+\|y_n\|^2 \ge \|y_{n+1}\|^2-2\tau\|y_{n+1}\|\,\|C_0y_n\|+\|y_n\|^2 \ge \varepsilon\|y_{n+1}\|^2$ и поэтому имеет место априорная оценка

$$\|y_{n+1}\|^2 \le (\varepsilon)^{-1}D(y_1,y_0), \tag{48}$$

которая сопоставляется с оценкой (15), где $\mathcal{M}_0=0$.

Для конкретизации ограничений на шаг явной схемы воспользуемся неравенством $\|C_0\| \le \sum\limits_{\alpha=1}^{2}\|C_0^{(\alpha)}\|$. Для операторов в гильбертовом пространстве имеем $\|C_0^{(\alpha)}\|^2 = \sup[(C_0^{(\alpha)}y,C_0^{(\alpha)}y)/(y,y)]$, $\alpha=1,2$. Прямые вычисления дают $\|C_0\| \le \sum\limits_{\alpha=1}^{2}\max\limits_{\mathbf{x}\in\bar\omega}\dfrac{|b^{(\alpha)}|}{h_\alpha}$ и поэтому (47) есть стандартные ограничения (условие Куранта) на шаг по времени.

Для того чтобы снять эти ограничения и получить оценку, которая в отличие от (48) более согласуется с априорной оценкой для дифференциальной задачи, вместо явной схемы (44) рассмотрим схемы с весами

$$(y_{n+1}-y_{n-1})/(2\tau)+C_0(t_n)(\sigma_1y_{n+1}+(1-\sigma_1-\sigma_2)y_n+\sigma_2y_{n-1})=0, \quad n=1,2,\ldots \tag{49}$$

В общем случае (49) аппроксимирует уравнение переноса (9) с погрешностью $O(\tau)$. Среди схем второго порядка по времени выделим симметричные схемы, для которых $\sigma_1=\sigma_2$.

Подобные трехслойные разностные схемы с весами широко используются при решении задач для уравнения переноса (см., например, [3, 8]). Здесь анализ их устойчивости проводится в максимально общих условиях для задач с переменными во времени и пространстве коэффициентами.

С учетом кососимметричности оператора переноса домножим скалярно в H уравнение (49) на $2\tau w$, где $w=\sigma_1y_{n+1}+(1-\sigma_1-\sigma_2)y_n+\sigma_2y_{n-1}=((y_{n+1}+y_n)+(y_n+y_{n-1}))/4+\tau(\sigma_1-\sigma_2)(y_{n+1}-y_{n-1})/(2\tau)+0{,}5\tau(\sigma_1+\sigma_2-0{,}5)((y_{n+1}-y_n)/\tau-(y_n-y_{n-1})/\tau)$. Получим равенство

$$0{,}25(\|y_{n+1}+y_n\|^2-\|y_n+y_{n-1}\|^2)+2\tau^2(\sigma_1-\sigma_2)\|(y_{n+1}-y_{n-1})/(2\tau)\|^2+$$
$$+0{,}5\tau^2(\sigma_1+\sigma_2-0{,}5)(\|(y_{n+1}-y_n)/\tau\|^2-\|(y_n-y_{n-1})/\tau\|^2)=0. \tag{50}$$

Определим теперь $D(y_{n+1},y_n)\equiv\|(y_{n+1}+y_n)/2\|^2+0{,}5\tau^2(\sigma_1+\sigma_2-0{,}5)\|(y_{n+1}-y_n)/\tau\|^2$, что позволяет от (50) перейти к равенству

$$D(y_{n+1},y_n)+2\tau^2(\sigma_1-\sigma_2)\|(y_{n+1}-y_{n-1})/(2\tau)\|^2=D(y_n,y_{n-1}). \tag{51}$$

Величина $D(y_{n+1},y_n)$ определяет норму сеточного решения при

$$\sigma_1+\sigma_2-0{,}5\ge 0, \tag{52}$$

если под разностным решением понимать $y_{n+1/2}=(y_{n+1}+y_n)/2$. Из (51) следует оценка устойчивости

$$D(y_{n+1},y_n)\le D(y_n,y_{n-1}), \tag{53}$$

если потребовать

$$\sigma_1-\sigma_2\ge 0. \tag{54}$$

Таким образом, показана безусловная устойчивость трехслойной схемы с весами (45), (49) при ограничениях (52), (54) на веса. При этом для разностного решения верна оценка (53).

В частности, симметричные схемы второго порядка точности по времени и пространству устойчивы при $\sigma\ge 0{,}25$, где $\sigma=\sigma_1=\sigma_2$. В этом случае схемы являются консервативными в смысле выполнения (46) [9].

Обратимся теперь к исследованию устойчивости трехслойных разностных схем для уравнения переноса в недивергентной и дивергентной формах. Ограничимся рассмотрением симметричных ($\sigma = \sigma_1 = \sigma_2$) схем с весами

$$(y_{n+1} - y_{n-1})/(2\tau) + C_\alpha(t_n)(\sigma y_{n+1} + (1-2\sigma)y_n + \sigma y_{n-1}) = 0, \quad n = 1, 2, \ldots, \quad \alpha = 1, 2. \tag{55}$$

Домножая уравнение (55) на $2\tau w$, где $w = ((y_{n+1} + y_n) + (y_n + y_{n-1}))/4 + 0{,}5\tau(2\sigma - 0{,}5)((y_{n+1} - -y_n)/\tau - (y_n - y_{n-1})/\tau)$, с учетом (28) подобно (51) получим

$$D(y_{n+1}, y_n) \le D(y_n, y_{n-1}) + 2\tau M_\alpha \|w\|^2, \quad \alpha = 1, 2. \tag{56}$$

Имеем $\|w\|^2 \le \|(y_{n+1} + y_n)/2\|^2 + \tau^2(2\sigma - 0{,}5)^2\|(y_{n+1} - y_n)/\tau\|^2 + \|(y_n + y_{n-1})/2\|^2 + \tau^2(2\sigma - -0{,}5)^2\|(y_n - y_{n-1})/\tau\|^2 \le \chi(D(y_{n+1}, y_n) + D(y_n, y_{n-1}))$, где $\chi = \max\{1, 4\sigma - 1\}$. Подстановка в (56) приводит нас (см. (43)) к оценке ρ-устойчивости

$$D(y_{n+1}, y_n) \le \rho D(y_n, y_{n-1}) \tag{57}$$

с $\rho = \exp(6\tau\chi M_\alpha)$, $\alpha = 1, 2$, при слабых ограничениях на временной шаг: $\tau \le 3/(\chi M_\alpha)$.

Трехслойные схемы (55) для уравнения переноса в дивергентной форме (1) ($\alpha = 1$) являются L_1-консервативными в смысле выполнения равенства $(y^{n+1}, 1) = (y_0, 1)$, $n = 0, 1, \ldots$, если схема консервативна при расчете решения на первом временном слое, т.е. при $(y_1, 1) = (y_0, 1)$. Этого мы достигаем при использовании обычной симметричной двухслойной схемы для нахождения y_1.

Для уравнения переноса в дивергентной (1) и недивергентной (7) формах имеют место безусловные (при любом поле скоростей) оценки устойчивости (18) в $L_1(\Omega)$ и (22) в $L_\infty(\Omega)$ соответственно, кроме того, для их решений справедлив принцип максимума. Поэтому естественно ориентироваться на построение разностных схем, для которых аналогичные свойства имеют место.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 96 — 01 — 00657).

Литература

1. *Roache P. J.* Computational Fluid Dynamics. Albuquerque, 1982.
2. *Самарский А. А., Попов Ю. П.* Разностные методы решения задач газовой динамики. М., 1992.
3. *Hirsch C.* Numerical Computational of Internal and External Flows. Chichester, 1988.
4. *Самарский А.А.* Теория разностных схем. М., 1989.
5. *Richtmyer R. D., Morton K. W.* Difference Methods for Initial-Value Problems. New York, 1967.
6. *Самарский А. А., Гулин А. В.* Устойчивость разностных схем. М., 1973.
7. *Samarskii A. A., Vabishchevich P. N.* Computational Heat Transfer. Chichester, 1995.
8. *Beam R. W., Warming R. F.* // J. Computer. Phys. 1976. Vol. 22. P. 87 — 109.
9. *Самарский А. А., Мажукин В. И., Матус П. П., Михайлюк И. А.* // Докл. РАН. 1997. Т. 357, №4. С. 458 — 461.

Институт математического моделирования РАН

Поступила в редакцию 19 февраля 1998 г.