Сибирский математический журнал
Июль—август, 1998. Том 39, № 4

УДК 519.63

РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ ДЛЯ ЗАДАЧИ О СОПРЯЖЕНИИ УРАВНЕНИЙ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО И ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПОВ*)

А. А. Самарский, П. Н. Вабищевич,
С. В. Лемешевский, П. П. Матус

1. Введение. При математическом моделировании физико-химических процессов в составных (композитных) телах часто приходится использовать математические модели, которые основаны на различных типах уравнений в отдельных частях расчетной области. Особое внимание при этом уделяется условиям сопряжения на границах подобластей. Вопросы однозначной разрешимости краевых задач для уравнений смешанного типа активно рассматриваются в литературе (см., например, [1]).

Среди отмеченного класса задач выделим краевые задачи для гиперболо-параболических уравнений, однозначная разрешимость которых в классе обобщенных решений рассмотрена в [2, 3]. В данной работе на примере простейшей одномерной краевой задачи рассмотрены вопросы численного решения таких задач. Строится однородная разностная схема [4], которая относится к классу схем с переменными (разрывными) весовыми множителями [5–7]. Выделены классы безусловно устойчивых схем, проведено исследование скорости сходимости приближенного решения к точному.

2. Постановка задачи. В прямоугольнике $\overline{Q} = \overline{Q}_1 \cup \overline{Q}_2$, $\quad Q_1 = \{(x,t) : 0 < x < \xi,\ 0 < t \leqslant T\}$, $Q_2 = \{(x,t) : \xi < x < l,\ 0 < t \leqslant T\}$, рассмотрим начально-краевую задачу о сопряжении уравнений гиперболического и параболического типов

$$\rho_1(x)\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k_1(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + f_1(x,t), \quad (x,t) \in Q_1, \tag{2.1}$$

$$\rho_2(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k_2(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + f_2(x,t), \quad (x,t) \in Q_2, \tag{2.2}$$

где $\rho_m(x)$ — строго положительные функции в $\overline{Q}_m$, $0 < c_1 \leqslant k_m(x) \leqslant c_2$ $(m = 1, 2)$. Дополним эти уравнения граничными и начальными условиями:

$$u(0,t) = u(l,t) = 0, \quad t > 0, \tag{2.3}$$

*) Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 96-01-00657) и Белорусского фонда фундаментальных исследований (код проекта Ф96-173).

$$u(x,0)=u_0(x),\ 0\leqslant x\leqslant l;\quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=u_1(x),\ \xi\leqslant x\leqslant l. \tag{2.4}$$

На границе раздела двух областей $x=\xi$ выполняются следующие условия сопряжения:

$$[u]=0,\quad \left[k\frac{\partial u}{\partial x}\right]=0 \quad \text{при}\quad x=\xi,\quad t\geqslant 0, \tag{2.5}$$

где

$$[u]=u(\xi+0,t)-u(\xi-0,t),\quad k(x)=\begin{cases} k_1(x), & 0<x<\xi,\\ k_2(x), & \xi<x<l.\end{cases}$$

Построение и исследование разностных схем для поставленной задачи сопряжения будем проводить в предположении, что коэффициенты $\rho_m(x)$, $k_m(x)$, $f_m(x,t)$ $(m=1,2)$ имеют разрыв первого рода на прямой $x=\xi$, а вне линии разрыва эти функции являются достаточно гладкими. При таких предположениях о свойствах входных данных вопросы существования и единственности сильного решения исследовались в работах [2, 3]. В дальнейшем будем предполагать, что решение $u(x,t)$ задачи (2.1)–(2.5) является кусочно-гладким: вне линии $x=\xi$ обладает всеми необходимыми по ходу изложения непрерывными и ограниченными производными, а на прямой $x=\xi$ удовлетворяет условиям сопряжения (2.5). Отметим, что зависимость коэффициентов ρ_m, k_m от одной переменной x, а также однородность граничных условий (2.3) рассматривается лишь для простоты рассуждений.

3. Разностные схемы. Введем в рассмотрение равномерные сетки узлов:

$$\bar\omega_h=\{x_i=ih,\ i=0,1,\dots,N;\ hN=l\},$$
$$\omega_\tau=\{t_n=n\tau,\ n=0,1,\dots,N_0-1;\ \tau N_0=T\}.$$

Будем предполагать, что точка разрыва коэффициентов $\xi=x_p=ph\in\omega_h$, $2\leqslant p\leqslant N-2$, является узлом равномерной пространственной сетки. Кроме того, в областях Q_1, Q_2 будем рассматривать сетки

$$\omega_1=\omega_{1h}\times\omega_\tau,\quad \omega_2=\omega_{2h}\times\omega_\tau,$$

где $\omega_{1h}=\{x_i=ih,\ i=1,2,\dots,p-1\}$, $\omega_{2h}=\{x_i=ih,\ i=p+1,p+2,\dots,N-1\}$.

Дифференциальную задачу аппроксимируем трехслойной разностной схемой

$$\rho_1 y_t=((ay_{\bar x})^{(\sigma_1,\sigma_2)})_x+\varphi,\quad (x,t)\in\omega_1, \tag{3.1}$$

$$\rho_2 y_{\bar t t}=((ay_{\bar x})^{(\sigma_1,\sigma_2)})_x+\varphi,\quad (x,t)\in\omega_2, \tag{3.2}$$

$$\hat y_0=\hat y_N=0, \tag{3.3}$$

$$y(x,0)=u_0(x),\quad y_t(x,0)=\tilde u_0(x),\quad x\in\omega_{1h}^-,\qquad \omega_{1h}^-=\omega_{1h}\cup\{0\}, \tag{3.4}$$

$$y(x,0)=u_0(x),\quad y_t(x,0)=\tilde u_1(x),\quad x\in\bar\omega_{2h}, \tag{3.5}$$

с постоянными весами σ_α, $\alpha=1,2$.

Условия сопряжения (2.5), как и в случае третьей краевой задачи для одномерного уравнения теплопроводности [4, с. 95], аппроксимируем с учетом требования второго порядка аппроксимации по пространственной переменной:

$$(ay_{\bar x})^{(\sigma_1,\sigma_2)}+\frac{h}{2}(\rho_1 y_t+\varphi)=(ay_x)^{(\sigma_1,\sigma_2)}-\frac{h}{2}(\rho_2 y_{\bar t t}+\varphi),\quad x=\xi. \tag{3.6}$$

Здесь

$$\rho_k=\rho_k(x_i),\quad a=k(x_{i-0,5}),\quad \varphi=0{,}5(f_{i-0,5}+f_{i+0,5}), \tag{3.7}$$

$$\bar{u}_0 = \rho_1^{-1}(x)(Lu_0(x) + f(x,0)), \tag{3.8}$$

$$\bar{u}_1 = u_1(x) + 0,5\tau\rho_2^{-1}(x)(Lu_0(x) + f(x,0)),$$

$$Lu = \frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial u}{\partial x}\right), \quad f(x,t) = \begin{cases} f_1(x,t), & (x,t) \in Q_1, \\ f_2(x,t), & (x,t) \in Q_2. \end{cases}$$

Аппроксимацию условий сопряжения (3.6) удобно записать в виде

$$0{,}5(\rho_1 y_t + \rho_2 y_{\bar{t}t}) = ((ay_{\bar{x}})^{(\sigma_1,\sigma_2)})_x + \varphi, \quad x = \xi. \tag{3.9}$$

Отметим также, что второе начальное условие $y_t(x,0) = \bar{u}_0$ для параболического уравнения получено из следующих соображений. Так как для применения трехслойной схемы требуется задать еще одно начальное условие, например $y(x,\tau)$, то естественно аппроксимировать его со вторым порядком $O(h^2 + \tau^2)$. Идея (см. [4, с. 97]) состоит в том, что мы ищем значение $y(x,\tau)$ в виде

$$y(x,\tau) = u_0(x) + \tau\mu(x)$$

и подбираем μ так, чтобы погрешность $y(x,\tau) - u(x,\tau)$ была порядка $O(\tau^2 + h^2)$. Подставим в формулу

$$u(x,\tau) - u_0(x) = \tau\frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0} + \frac{\tau^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\bigg|_{t=0} + O(\tau^3)$$

значение $\frac{\partial u}{\partial t}\big|_{t=0}$, исходя из дифференциального уравнения

$$\rho_1\frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0} = Lu_0 + f_1(x,0), \quad 0 < x < \xi.$$

Тогда получим

$$\mu = (Lu_0 + f_1(x,0))/\rho_1(x).$$

Отсюда и следует аппроксимация (3.4).

Укажем также второй возможный способ задания $y(x,\tau)$ с точностью $O(h^2 + \tau^2)$. Первый шаг в области $(x,t) \in \omega_1$ делаем по двухслойной схеме

$$\rho_1\frac{y^1 - y^0}{\tau} = ((ay_{\bar{x}})^{(1/2,0)})_x + \varphi^0, \quad 0 < x < \xi, \tag{3.10}$$

$$y(x,0) = u_0(x), \quad y(0,\tau) = 0, \quad y(x_p,\tau) = u_0(x_p) + \tau\bar{u}_1(x_p). \tag{3.11}$$

Отметим, что для нахождения второго граничного условия $y(x_p,\tau)$ в точке сопряжения двух типов задач мы использовали заданное начальное условие для волнового уравнения $y_t(x,0) = \bar{u}_1$ из (3.5) при $\xi = x_p$.

При используемой аппроксимации для параболического уравнения в области ω_1 схема (3.1), (3.10), (3.11) приводится к схеме с переменными весовыми множителями [5, 6]. Более подробно этот вопрос будет обсуждаться ниже. Реализация предложенных выше разностных схем проводится при $\sigma_1 \neq 0$ стандартным образом с использованием метода прогонки (как и в случае неоднородных краевых условий).

4. Устойчивость разностных схем с постоянными весами. При исследовании вопросов устойчивости будем использовать каноническую форму трехслойных операторно-разностных схем вида [4]

$$Dy_{\bar{t}t} + By_{\overset{\circ}{t}} + Ay = \varphi, \quad 0 < t \in \omega_\tau, \tag{4.1}$$

$$y(0) = y_0, \quad y_t(0) = \bar{y}_0, \tag{4.2}$$

где $y \in H$, а H — вещественное конечномерное гильбертово пространство, A, B, $D : H \to H$ — линейные операторы в H.

Пусть $\overset{\circ}{\Omega}{}_h^n$ — множество сеточных функций $y_i^n = y(x_i, t^n)$, заданных на $\bar{\omega}_h$ и равных нулю на границе. Для таких функций определим оператор A следующим образом:

$$(Ay)_i^n = -(ay_{\bar{x}})_{x,i}, \quad i = 1, 2, \ldots, N-1, \quad y_0^n = y_N^n = 0. \tag{4.3}$$

Введем вектор $y_n = \left(y_1^n, y_2^n, \ldots, y_{N-1}^n\right)^T$. Определим пространство H как множество таких векторов со скалярным произведением и нормой

$$(y, v) = (y_n, v_n) = \sum_{i=1}^{N-1} y_i^n v_i^n h, \quad \|y\| = \sqrt{(y, y)}. \tag{4.4}$$

Тогда оператор A действует из H в H. Через H_D, где $D = D^* > 0$, обозначим гильбертово пространство с $(y, v)_D = (Dy, v)$ и нормой $\|y\|_D^2 = (y, y)_D$.

Отметим, что на основании [4, с. 392, теорема 6; 4, с. 399, лемма 3] при

$$A^* = A > 0, \quad D^* = D \geqslant \frac{(1+\varepsilon)\tau^2}{4} A, \quad B \geqslant 0, \quad \varepsilon > 0, \tag{4.5}$$

для решения разностной схемы (4.1), (4.2) имеет место априорная оценка

$$\|y_{n+1}\|_A \leqslant \sqrt{\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}} (\|y(0)\|_A + \|y_t(0)\|_D + \max_{0 \leqslant k \leqslant n} (\|\varphi_k\|_{A^{-1}} + \|\varphi_{t,k}\|_{A^{-1}})). \tag{4.6}$$

Для того чтобы привести схему (3.1)–(3.5), (3.9) к канонической форме (4.1), (4.2), оператор A определим формулой (4.3), а операторы B, D так:

$$D = S + \frac{\tau^2}{2}(\sigma_1 + \sigma_2)A, \quad S = \operatorname{diag}\{s_1, s_2, \ldots, s_{N-1}\}, \tag{4.7}$$

$$s(x) = \begin{cases} 0{,}5\tau\rho_1(x), & x \in \omega_{1h}, \\ 0{,}25\tau\rho_1(x) + 0{,}5\rho_2(x), & x = \xi, \\ \rho_2(x), & x \in \omega_{2h}; \end{cases} \tag{4.8}$$

$$B = G + (\sigma_1 - \sigma_2)\tau A, \quad G = \operatorname{diag}\{g_1, g_2, \ldots, g_{N-1}\}, \tag{4.9}$$

$$g(x) = \begin{cases} \rho_1(x), & x \in \omega_{1h}, \\ 0{,}5\rho_1(x), & x = \xi, \\ 0, & x \in \omega_{2h}. \end{cases}$$

Определим также начальные условия

$$y_0(x) = u_0(x), \quad x \in \omega_h, \tag{4.10}$$

$$y_t(0) = \bar{y}_0, \quad \bar{y}_0(x) = \begin{cases} \bar{u}_0(x), & x \in \omega_{1h}, \\ \bar{u}_1(x), & x \in \omega_{2h}^+, \end{cases} \quad \omega_{2h}^+ = \omega_{2h} \cup \{\xi\}. \tag{4.11}$$

Тогда на основании тождества

$$v^{(\sigma_1, \sigma_2)} = v + \tau(\sigma_1 - \sigma_2)v_{\overset{\circ}{t}} + \frac{\tau^2}{2}(\sigma_1 + \sigma_2)v_{\bar{t}t} \tag{4.12}$$

разностная схема (3.1)–(3.5), (3.9) приводится к каноническому виду трехслойных операторно-разностных схем с операторами A, B, D, правой частью φ и начальными условиями y_0, $\bar{y}_0$, определенными соответствующими формулами (4.3)–(4.11).

Теорема 1. *Пусть в разностной схеме* (4.1), (4.2), (4.7)–(4.11) *выполнены условия*

$$\sigma_1 \geqslant \sigma_2, \quad \sigma_1 + \sigma_2 \geqslant \frac{1+\varepsilon}{2}. \tag{4.13}$$

Тогда схема (4.1), (4.2), (4.7)–(4.11) *устойчива по начальным данным и по правой части, а для решения задачи имеет место оценка* (4.6).

Доказательство. Так как $A = A^* > 0$, $D = D^* > 0$, а $B \geqslant 0$ при выполнении условия теоремы $\sigma_1 \geqslant \sigma_2$, то для утверждения теоремы достаточно убедиться в справедливости неравенства

$$D - \frac{1+\varepsilon}{4}\tau^2 A = S + \left(\frac{\sigma_1+\sigma_2}{2} - \frac{1+\varepsilon}{4}\right)\tau^2 A \geqslant 0. \tag{4.14}$$

Очевидно, оно имеет место в предположении (4.13). Теорема доказана.

5. Разностные схемы с переменными весовыми множителями. Выше мы уже отмечали, что разностные схемы с непостоянными весами для рассматриваемой задачи о сопряжении уравнений различных типов возникают в случае трехслойной схемы (3.1) для параболического уравнения с начальными условиями (3.10), (3.11). Кроме того, при аппроксимации параболического уравнения в вычислительной практике обычно используется двухслойная разностная схема (в этом случае $\sigma_2 = 0$), а при аппроксимации гиперболического — трехслойная.

Определим переменные веса σ_1, σ_2 формулами

$$\sigma_1(x) = \begin{cases} \sigma, & x \in \omega_{1h}, \\ 0{,}5(\sigma + \sigma_1^*), & x = \xi, \\ \sigma_1^*, & x \in \omega_{2h}, \end{cases} \qquad \sigma_2(x) = \begin{cases} 0, & x \in \omega_{1h}, \\ 0{,}5\sigma_2^*, & x = \xi, \\ \sigma_2^*, & x \in \omega_{2h}. \end{cases}$$

Здесь σ, σ_1^*, σ_2^* — постоянные. Тогда задача (3.1)–(3.5), (4.10) может быть записана в виде

$$\tilde\rho_1 y_t + \tilde\rho_2 y_{\bar t t} = ((a y_{\bar x})^{(\sigma_1(x),\sigma_2(x))})_x + \varphi, \quad (x,t) \in \omega, \tag{5.1}$$

$$y(0,t) = y(l,t) = 0, \quad t \in \omega_\tau, \tag{5.2}$$

$$y(x,0) = u_0(x), \quad x \in \omega_h, \quad y_t(x,0) = \bar u_1(x), \quad x \in \omega_{2h}^+, \tag{5.3}$$

где $\omega = \omega_h \times \omega_\tau$, а коэффициенты $\tilde\rho_k$ определены формулами

$$\tilde\rho_1(x) = \begin{cases} \rho_1(x), & x \in \omega_{1h}, \\ 0{,}5\rho_1(\xi), & x = \xi, \\ 0, & x \in \omega_{2h}, \end{cases} \tag{5.4}$$

$$\tilde\rho_2(x) = \begin{cases} 0, & x \in \omega_{1h}, \\ 0{,}5\rho_2(\xi), & x = \xi, \\ \rho_2(x), & x \in \omega_{2h}. \end{cases} \tag{5.5}$$

Исследование устойчивости схемы проведем в соответствии с работой [6]. Пусть $\overset{1}{\Omega}_h$ — множество сеточных функций $v_i = v(x_i)$, заданных на сетке $\bar\omega_h$ и удовлетворяющих условию $v_0 = 0$. Наряду с гильбертовым пространством H введем в рассмотрение пространство H_1 как множество векторов вида $v_n = (v_1^n, v_2^n, \ldots, v_N^n)^T$. В H_1 зададим скалярное произведение

$$(v_n, w_n] = \sum_{i=1}^{N} v_i^n w_i^n h. \tag{5.6}$$

Покажем, что оператор $A : H \to H$, определенный формулой (4.3), допускает преставление в виде $A = T^*T$. Линейные операторы $T : H \to H_1$, $T^* : H_1 \to H$ определим соответственно формулами

$$(Ty)_i = \sqrt{a_i} y_{\bar{x},i}, \quad i = 1, 2, \ldots, N, \quad y_0 = y_N = 0, \tag{5.7}$$

$$(T^*v)_i = -(\sqrt{a}v)_{x,i}, \quad i = 1, 2, \ldots, N-1. \tag{5.8}$$

Покажем теперь, что операторы T и T^* сопряжены друг другу в смысле скалярного произведения (5.6). Действительно, согласно формуле суммирования по частям для любых $y \in H$, $v \in H_1$ имеем

$$(v, Ty) = \sum_{i=1}^{N} v_i \sqrt{a_i} y_{\bar{x},i} h = \sum_{i=1}^{N-1} -(\sqrt{a}v)_{x,i} y_i h = (T^*v, y). \tag{5.9}$$

Определим теперь операторы B и D следующим образом:

$$B = G + \tau T^*(\Sigma_1 - \Sigma_2)T, \tag{5.10}$$

$$G = \mathrm{diag}\{\tilde{\rho}_{11}, \tilde{\rho}_{12}, \ldots, \tilde{\rho}_{1N-1}\}, \tag{5.11}$$

$$D = C + 0{,}5\tau^2 T^*(\Sigma_1 + \Sigma_2)T, \tag{5.12}$$

$$C = \mathrm{diag}\{c_1, c_2, \ldots, c_{N-1}\}, \quad c_i = 0{,}5\tilde{\rho}_{1i}\tau + \tilde{\rho}_{2i}.$$

$$\Sigma_k : H_1 \to H_1, \quad \Sigma_k = \mathrm{diag}\{\sigma_{k1}, \sigma_{k2}, \ldots, \sigma_{kN-1}\}. \tag{5.13}$$

Очевидно, что разностная схема с переменными весовыми множителями (5.1)–(5.3) приводится к канонической форме (4.1), (4.2) с операторами $A = T^*T$, B, D, определенными формулами (5.7)–(5.13), и

$$y_t(0) = \bar{y}_0, \quad \bar{y}_0 = \begin{cases} \rho_1^{-1}(Ay^{(\sigma)} + \varphi), & x \in \omega_{1h}, \\ \bar{u}_1(x), & x \in \omega_{2h}^+. \end{cases} \tag{5.14}$$

Очевидно, что оператор A является положительным и самосопряженным. Так как σ, σ_1^*, σ_2^* — положительные постоянные, то операторы Σ_1, Σ_2 неотрицательны и $D = D^* > 0$. По построению $B \geqslant 0$ при $\Sigma_1 \geqslant \Sigma_2$. Для того чтобы воспользоваться априорной оценкой (4.6), проверим выполнение достаточного условия устойчивости (4.5). Заметим, что

$$D - \frac{1+\varepsilon}{4}\tau^2 A = C + \frac{\tau^2}{2} T^* \left(\Sigma_1 + \Sigma_2 - \frac{1+\varepsilon}{2}E\right) T \geqslant 0$$

при $\Sigma_1 + \Sigma_2 \geqslant \frac{1+\varepsilon}{2}E$. Последнее неравенство, а также условие $\Sigma_1 \geqslant \Sigma_2$ выполнены при $\sigma_1(x) + \sigma_2(x) \geqslant 0,5(1+\varepsilon)$ и $\sigma_1(x) \geqslant \sigma_2(x)$ соответственно.

Теорема 2. *Пусть в разностной схеме* (5.1)–(5.3) *выполнены условия*

$$\sigma_1(x) \geqslant \sigma_2(x), \quad \sigma_1(x) + \sigma_2(x) \geqslant \frac{1+\varepsilon}{2}, \quad x \in \omega_h.$$

Тогда схема устойчива по начальным данным и по правой части, а для решения задачи имеет место оценка (4.6).

На основании вложений [4]

$$\|y_{\bar{x}}]| \leqslant \frac{1}{\sqrt{c_1}}\|y\|_A, \quad \|y\|_C \leqslant \frac{\sqrt{l}}{2\sqrt{c_1}}\|y\|_A, \tag{5.15}$$

где $\|y_{\bar{x}}]| = \sqrt{(y_{\bar{x}}, y_{\bar{x}}]}$, $\|y\|_C = \max\limits_{x \in \omega_h} |y(x)|$, из (4.6) следуют соответствующие априорные оценки в полунорме W_2^1 и в равномерной метрике.

6. Погрешность аппроксимации и сходимость. Рассмотрим вопрос о сходимости разностной схемы с переменными весовыми множителями (5.1). По аналогии с [8] сформулируем используемые ниже условия.

Условие А. Функции k'_m, k''_m, ρ'_m, f'_m, u''_m, $(k_m u')''$ $(m = 1, 2,\ v' = \partial v/\partial x)$ удовлетворяют условию Липшица по x в каждой из подобластей Q_m, а $\frac{\partial u}{\partial t}$ — условию Липшица по t в Q_1, $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ — условию Липшица по t в Q_2.

Условие Б. Предельные значения слева и справа функций f_m, f'_m, f''_m $(m = 1, 2)$, u', u'', u''' удовлетворяют вдоль линии $x = \xi$ условию Липшица по t для $0 \leqslant t \leqslant T$.

Пусть $y \in H$ — решение задачи (4.1), (4.2), (5.7)–(5.13), $u(x,t)$ — решение дифференциальной задачи (2.1)–(2.5). Напишем уравнение для погрешности $z = y - u$, где $u_n = \left(u_1^n, u_2^n, \dots, u_{N-1}^n\right)^T$. Подставляя $y = z + u$ в (4.1), (4.2), получаем

$$Dz_{\bar t t} + Bz_{\overset{\circ}{t}} + Az = \psi, \quad z(0) = 0, \quad z_t(0) = \nu(x). \tag{6.1}$$

Здесь z, ψ, $\nu \in H$,

$$\psi_i = -\tilde\rho_1 u_{t,i} - \tilde\rho_2 u_{\bar t t,i} + ((a u_{\bar x})^{(\sigma_1,\sigma_2)})_{x,i} + \varphi_i, \quad i = 1, 2, \dots, N-1, \tag{6.2}$$

— погрешность аппроксимации уравнений (2.1), (2.2) и условий сопряжения (2.5),

$$\nu = \begin{cases} -\rho_1 u_t + (a u_{\bar x})_x^{(\sigma_1,\sigma_2)} + \varphi, & x \in \omega_{1h}, \\ \bar u_1(x) - u_t(x,0), & x \in \omega_{2h}^{+}, \end{cases}$$

определяет погрешность аппроксимации второго начального условия.

По аналогии с [4, с. 421] преобразуем выражение для невязки. Для этого возьмем уравнения (2.1), (2.2) в момент времени $t = t_j$ и проинтегрируем их по x в пределах от $x_{i-0,5}$ до $x_{i+0,5}$:

$$W_{i+0,5} - W_{i-0,5} + \int\limits_{x_{i-0,5}}^{x_{i+0,5}} \left(f_1(x,t) - \rho_1(x) \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \right) dx = 0, \quad (x,t) \in \omega_1,$$

$$\begin{aligned} W_{p+0,5} - W_{p-0,5} &+ \int\limits_{x_{p-0,5}}^{\xi} \left(f_1(x,t) - \rho_1(x) \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \right) dx \\ &+ \int\limits_{\xi}^{x_{p+0,5}} \left(f_2(x,t) - \rho_2(x) \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} \right) dx = 0, \quad x = \xi, \end{aligned} \tag{6.4}$$

$$W_{i+0,5} - W_{i-0,5} + \int\limits_{x_{i-0,5}}^{x_{i+0,5}} \left(f_2(x,t) - \rho_2(x) \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} \right) dx = 0, \quad (x,t) \in \omega_2.$$

Здесь $W = ku'$.

Разделим каждое из тождеств (6.4) на h и вычтем их из (6.2). Тогда получим

$$\psi = \eta_{1x} + \psi_1, \quad \eta_1 = (a u_{\bar x})^{(\sigma_1,\sigma_2)} - \overline{W} = O(h^2 + \tau).$$

Здесь $\bar{v} = v(x_{i-0,5}, t)$,

$$\psi_1 = \begin{cases} -\rho_1 u_t + \varphi - \dfrac{1}{h} \displaystyle\int\limits_{x_{i-0,5}}^{x_{i+0,5}} \left(f_1(x,t) - \rho_1 \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \right) dx, & (x,t) \in \omega_1, \\ -0{,}5\,(\rho_1 u_t + \rho_2 u_{\bar{t}t}) + \varphi - \dfrac{1}{h} \displaystyle\int\limits_{x_{n-0,5}}^{\xi} \left(f_1(x,t) - \rho_1 \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \right) dx \\ \qquad - \dfrac{1}{h} \displaystyle\int\limits_{\xi}^{x_{n+0,5}} \left(f_2(x,t) - \rho_2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} \right) dx, & x = \xi, \\ -\rho_2 u_{\bar{t}t} + \varphi - \dfrac{1}{h} \displaystyle\int\limits_{x_{i-0,5}}^{x_{i+0,5}} \left(f_2(x,t) - \rho_2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} \right) dx, & (x,t) \in \omega_2. \end{cases}$$

В силу условий гладкости

$$\frac{1}{h} \int\limits_{x_{i-0,5}}^{x_{i+0,5}} f(x,t)\,dx = \varphi + \frac{h^2}{8} \bar{f}'_{x,i} + O(h^2), \qquad x \in \omega_h,$$

$$\frac{1}{h} \int\limits_{x_{i-0,5}}^{\xi} \rho_1 \frac{\partial u}{\partial t}\,dx + \frac{1}{h} \int\limits_{\xi}^{x_{i+0,5}} \rho_2 \frac{\partial u}{\partial t}\,dx$$

$$= 0,5 \left(\rho_1 \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + \rho_2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right)_{x=\xi} + \frac{h^2}{8} \bar{p}'_{x,p} + O(h^2),$$

$$p(x,t) = \begin{cases} \rho_1(x) \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}, & (x,t) \in Q_1, \\ \rho_2(x) \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}, & (x,t) \in Q_2. \end{cases}$$

Следовательно, погрешность аппроксимации можно переписать в виде

$$\psi = \eta_x + \psi^*, \qquad \eta = \eta_1 + \frac{h^2}{8}(\bar{p}' - \bar{f}'), \qquad \psi^*,\, \psi^*_t = O(h^2 + \tau).$$

Перейдем к выяснению порядка точности схемы. Для решения задачи (6.1) на основании (4.6) имеет место оценка

$$\|z_{n+1}\|_A \leqslant \sqrt{\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}} (\|z_t(0)\|_D + \max_{0 \leqslant k \leqslant n} (\|\psi_k\|_{A^{-1}} + \|\psi_{t,k}\|_{A^{-1}})). \qquad (6.5)$$

Непосредственные выкладки дают

$$\|z_t(0)\|_D^2 = \|\nu(x)\|_D^2 = (C\nu, \nu) + 0,5\tau^2((\Sigma_1 + \Sigma_2)T\nu, T\nu).$$

Так как C, Σ_1, Σ_2 — ограниченные операторы, то

$$\|\nu(x)\|_D \leqslant c_0(\|\nu\|^2 + \tau^2 \|\nu_{\bar{x}}]|^2)^{1/2} \leqslant c\,(h^2 + \tau), \qquad (6.6)$$

где c_0, c — постоянные, не зависящие от h, τ.

Аналогично (см., например, [4, с. 442]) имеем

$$\|\psi\|_{A^{-1}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{c_1}} \left(\|\eta]| + \frac{l}{2\sqrt{2}} \|\psi^*\| \right) \leqslant c\,(h^2 + \tau), \qquad \|\psi_t\|_{A^{-1}} \leqslant c\,(h^2 + \tau).$$

Теорема 3. *Пусть в каждой из подобластей* Q_m $(m = 1, 2)$ *выполнены условия* А, Б. *Тогда при*

$$\sigma_1(x) \geqslant \sigma_2(x), \quad \sigma_1(x) + \sigma_2(x) \geqslant \frac{1+\varepsilon}{2}, \quad x \in \omega_h,$$

решение разностной схемы (5.1)–(5.3) *сходится к решению дифференциальной задачи* (2.1)–(2.5), *так что имеет место оценка*

$$\max_{t \in \omega_\tau} \|z(t)\|_C \leqslant c\,(h^2 + \tau).$$

Доказательство теоремы следует из (6.5)–(6.7) и вложения (5.15).

Аналогично рассматриваются и некоторые более общие задачи. Отдельного внимания заслуживают разностные схемы для многомерных задач с криволинейной линией сопряжения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бицадзе А. В.* Некоторые классы уравнений в частных производных. М.: Наука, 1981.
2. *Корзюк В. И.* Задача о сопряжении уравнений гиперболического и параболического типов // Дифференц. уравнения. 1968. Т. 4, № 10. С. 1855–1866.
3. *Корзюк В. И.* Смешанная задача для некоторых нестационарных уравнений с разрывными коэффициентами // Дифференц. уравнения. 1970. Т. 6, № 2. С. 343–357.
4. *Самарский А. А.* Теория разностных схем. М.: Наука, 1977.
5. *Самарский А. А., Гулин В. А.* Критерий устойчивости семейства разностных схем // Докл. РАН. 1993. Т. 330, № 6. С. 694–695.
6. *Самарский А. А., Гулин В. А.* Об устойчивости одного класса разностных схем // Дифференц. уравнения. 1993. Т. 29, № 7. С. 1163–1174.
7. *Вабищевич П. Н., Матус П. П., Щеглик В. С.* Операторно-разностные уравнения дивергентного типа // Дифференц. уравнения. 1994. Т. 30, № 7. С. 1175–1186.
8. *Самарский А. А., Фрязинов И. В.* О сходимости однородных разностных схем для уравнения теплопроводности с разрывными коэффициентами // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1962. Т. 1, № 5. С. 806–824.

г. Москва, г. Минск *Статья поступила 25 февраля 1997 г.*