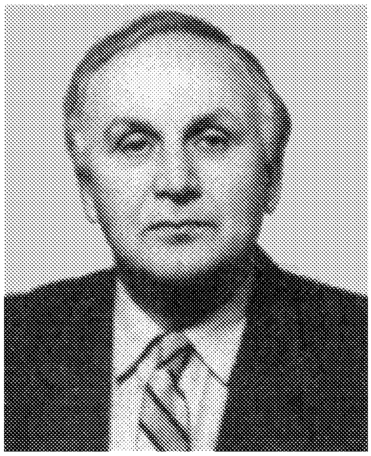
1998 г. ноябрь — декабрь *т. 53, вып. 6(324)*
УСПЕХИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЖИЗНЬ

ВЛАДИМИР АЛЕКСАНДРОВИЧ ИЛЬИН
(к семидесятилетию со дня рождения)



2 мая 1998 года исполнилось 70 лет действительному члену Российской Академии Наук Владимиру Александровичу Ильину.

В. А. Ильину принадлежат выдающиеся научные достижения по спектральной теории самосопряженных эллиптических операторов, по спектральной теории несамосопряженных дифференциальных операторов, по теории краевых и смешанных задач для уравнений математической физики в областях с "плохими" (негладкими) границами и с разрывными коэффициентами, по проблемам связи между классическими и обобщенными решениями задач математической физики, по математическому моделированию задач о дифракции и рефракции электромагнитных волн, по теории кратных рядов и интегралов Фурье, по спектральной теории операторов Шредингера с сильно сингулярными потенциалами.

Владимир Александрович Ильин родился в древнем русском городе Козельске. С трех лет живет в Москве. В школе учился всегда отлично. В старших классах (после возвращения из эвакуации) активно участвовал в работе математического кружка при мех-мате МГУ под руководством молодых А.С. Кронрода и С.Б. Стечкина и дважды был победителем Московской городской математической олимпиады. В 1945 году, окончив школу с золотой медалью, Владимир Александрович поступил на физический факультет МГУ имени М.В. Ломоносова, который закончил с отличием (не получив за все годы обучения на экзаменах ни одной оценки ниже "отлично") в 1950 году. В том же году Владимир Александрович поступил в аспирантуру физического факультета МГУ, которую закончил под руководством А.Н. Тихонова в 1953 году, защитив кандидатскую диссертацию.

После окончания аспирантуры В. А. Ильин был оставлен для работы в качестве ассистента на кафедре математики физического факультета МГУ. В феврале 1958 года Владимир Александрович единогласно защитил на ученом совете механико-математического факультета МГУ докторскую диссертацию и через год был избран на должность профессора Московского университета. В 1970 году он переходит на только что образованный факультет вычислительной математики и кибернетики МГУ. С июля 1974 года он бессменно возглавляет на факультете вычислительной математики и кибернетики МГУ созданную им кафедру общей математики.

Таким образом более чем 45-летняя научно-педагогическая деятельность В. А. Ильина неразрывно связана с МГУ имени М. В. Ломоносова. Наряду с этим с 1973 года он плодотворно ведет научно-исследовательскую работу в Математическом институте имени В. А. Стеклова, являясь сначала старшим научным сотрудником отдела уравнений в частных производных, а в настоящее время главным научным сотрудником отдела теории функций. В 1987 году он был избран членом-корреспондентом АН СССР, а в 1990 году – действительным членом еще существовавшей АН СССР.

Первые научные работы В. А. Ильина были посвящены вопросам представимости функции Грина для оператора Лапласа в виде суммы сходящихся билинейных рядов из собственных функций. В работах, выполненных им еще в студенческие годы, он доказал ошибочность содержащегося в известной книге Р. Куранта и Д. Гильберта "Методы математической физики" утверждения о том, что билинейный ряд из собственных функций, представляющий функцию Грина для оператора Лапласа в прямоугольнике, сходится абсолютно и равномерно в этом прямоугольнике всюду, за исключением как угодно малой окрестности источника.[1] В. А. Ильин доказал, что указанный билинейный ряд не сходится абсолютно ни в одной внутренней точке прямоугольника, но сходится при суммировании в порядке возрастания собственных чисел равномерно всюду в прямоугольнике, за исключением как угодно малой окрестности источника.

Кандидатская диссертация Владимира Александровича была посвящена решению задачи электродинамики в цилиндрической области, имеющей угловые линии.

Через три с половиной года после защиты кандидатской диссертации Владимир Александрович представил в Совет механико-математического факультета МГУ свою докторскую диссертацию, посвященную совершенно другой и чисто математической теме – проблеме сходимости спектральных разложений по собственным функциям оператора Лапласа.

В докторской диссертации В. А. Ильина были установлены точные условия абсолютной и равномерной сходимости разложений по собственным функциям первых трех краевых задач для оператора Лапласа, дано оригинальное обобщение понятия истокообразно представимой функции и знаменитой теоремы Гильберта–Шмидта, и , что самое главное, установлены окончательные в классах Соболева W_p^l целого порядка l условия равномерной сходимости разложений по собственным функциям первых трех краевых задач при суммировании этих разложений в порядке возрастания собственных чисел.

По результатам, полученным в докторской диссертации, В. А. Ильиным была опубликована в "Успехах математических наук" насчитывающая почти 100 страниц статья.

Выдающиеся результаты получены В. А. Ильиным после защиты докторской диссертации.

Ему принадлежат фундаментальные результаты по проблеме разрешимости в классическом смысле смешанной задачи для гиперболического уравнения второго порядка. Он установил разрешимость указанной смешанной задачи в произвольном нормальном цилиндре, т.е. в цилиндре,сечение которого представляет собой область, для которой при любой непрерывной граничной функции разрешима задача Дирихле для оператора Лапласа. До работ В. А. Ильина в исследованиях известных математиков (О. А. Ладыженской, Х. Л. Смолицкого), посвященных разрешимости указанной смешанной задачи, от границы рассматриваемой цилиндрической области требовалась высокая гладкость, неограниченно растущая с ростом числа измерений.

В соединении с более ранними исследованиями, проведенными А. Н. Тихоновым, О. А. Олейник и Г. Таутцем для параболических и эллиптических уравнений, эти исследования В. А. Ильина показали, что в смысле требований на границу вопрос о разрешимости краевых и смешанных задач для уравнений всех трех типов сводится к вопросу о разрешимости простейшей задачи математической физики – задачи Дирихле для уравнения Лапласа.

В 1960–1963 гг. В. А. Ильиным был выполнен большой цикл работ по проблемам разрешимости и устойчивости решений краевых и смешанных задач и задач на собственные значения для уравнений в частных производных с разрывными коэффициентами.

Глубокие результаты получены Владимиром Александровичем по проблеме совпадения классических и обобщенных решений краевых и смешанных задач для уравнений второго порядка. В этих исследованиях предложен новый тонкий метод доказательства единственности решения смешанной задачи для гиперболического уравнения в произвольной области, использующий только факт полноты собственных и присоединенных функций соответствующей задачи для эллиптического уравнения. По сравнению с традиционным методом энергетических неравенств метод

[1] См. Р. Курант, Д. Гильберт, Методы математической физики. М., 1951. Т. 1, гл. 5, п. 6. С. 326; Т. 2. С. 515.

В. А. Ильина позволяет установить единственность решения смешанной задачи без каких-либо предположений о гладкости границы области.

Выдающиеся результаты получены В. А. Ильиным по спектральной теории дифференциальных операторов.

Им в 1968–1974 гг. создан универсальный метод изучения спектральных разложений , отвечающих произвольным самосопряженным неотрицательным расширениям эллиптических операторов, позволивший для произвольной области или многообразия и любого спектра установить точные условия равномерной сходимости как самих спектральных разложений, так и их средних Рисса, окончательные в каждом из классов функций Соболева W_p^α, Никольского H_p^α, Лиувилля L_p^α, Бесова $B_{p,\theta}^\alpha$ и Зигмунда–Гельдера C^α.

Установленные В. А. Ильиным окончательные (в каждом из указанных классов) условия равномерной сходимости спектральных разложений несмотря на то, что они установлены для произвольных самосопряженных расширений эллиптических операторов с переменными коэффициентами, для произвольных областей и произвольных спектров, являются окончательными и для каждого индивидуального спектрального разложения (и, в частности, для разложения в N-кратный интеграл Фурье и в N-кратный тригонометрический ряд Фурье). Поэтому с именем Ильина связаны и самые точные условия разложимости в кратный интеграл Фурье и в кратный тригонометрический ряд Фурье (со сферическими частичными суммами).

В. А. Ильиным проведено также носящее законченный характер изучение принципа локализации и связанных с ним локальных оценок спектральных разложений как в классическом (т.е. в смысле равномерной сходимости в окрестности данной точки), так и в обобщенном смысле (т.е. в смысле сходимости почти всюду в окрестности данной точки).

Идеи В. А. Ильина о принципе локализации в обобщенной трактовке получили развитие в докторской диссертации его ученика И. Л. Блошанского.

В конце 70-х годов В. А. Ильин предложил новый метод оценки как в метрике L_∞, так и в метрике L_2 остаточного члена спектральной функции произвольного самосопряженного расширения эллиптического оператора второго порядка, не использующий ни традиционного метода Карлемана, ни техники тауберовых теорем. Этот метод подробно изложен во второй главе вышедшей в 1991 году монографии В. А. Ильина.

Выдающимся вкладом в науку являются работы В. А. Ильина по спектральной теории несамосопряженных дифференциальных операторов, выполненные им начиная с 1975 года. Этим работам предшествовали известные работы М. В. Келдыша, в которых для широкого класса краевых задач установлен факт полноты специально построенной системы собственных и присоединенных функций дифференциального оператора. (Такую систему М. В. Келдыш назвал канонической). Однако теория М. В. Келдыша не давала ответа на актуальный для приложений вопрос о том, образует ли построенная каноническая система базис, по которому можно разложить произвольную функцию из некоторого класса.

В цикле работ 1980–1983 гг. В. А. Ильин установил конструктивное (легко проверяемое для конкретных краевых задач) необходимое и достаточное условие базисности сначала в L_2, а затем и в L_p при любом фиксированном $p > 1$ систем собственных и присоединенных функций несамосопряженного обыкновенного дифференциального оператора произвольного порядка n.

Владимир Александрович доказал, что это же условие является необходимым и достаточным и для того, чтобы разложения произвольной функции из класса L_p при любом фиксированном $p \geqslant 1$ в биортогональный ряд по собственным и присоединенным функциям и в обычный тригонометрический ряд Фурье равносходились равномерно на любом компакте основного интервала.

Все изложенные результаты о базисности и равносходимости переносятся и на систему экспонент. Это вытекает из того, что систему экспонент можно рассматривать как систему обобщенных в смысле В. А. Ильина собственных и присоединенных функций обыкновенного дифференциального оператора первого порядка.

Занимаясь вопросом о том, обязана ли построенная М. В. Келдышем каноническая система собственных и присоединенных функций обладать свойством базисности в L_2, В. А. Ильин пришел к следующему интересному результату: если общее число присоединенных функций в системе не является конечным, то всегда существует полная, минимальная и каноническая в смысле Келдыша система собственных и присоединенных функций, не обладающая свойством базисности в L_2. Эта работа В. А. Ильина показывает, что введенное М. В. Келдышем понятие канонической системы собственных и присоединенных функций приспособлено только для изучения полноты этой системы и не пригодно для изучения базисности этой системы. Размышления над этим результатом естественным образом привели В. А. Ильина к введению понятия приведенной системы собственных и присоединенных функций, которая обладает свойством базисности в L_2 всякий раз, когда это свойство имеется хотя бы при одном выборе присоединенных функций, и к установлению необходимого и достаточного условия базисности в L_2 приведенной системы.

В 1980–1982 гг. для обыкновенного дифференциального оператора любого порядка n и для общего эллиптического оператора второго порядка В. А. Ильиным установлены точные по порядку оценки L_2-нормы собственной (или соответственно присоединенной) функции по произвольному компакту K основной области через L_2-норму присоединенной функции на единицу более высокого порядка по компакту $K' \subset K$.

Указанные оценки были названы В. А. Ильиным оценками антиаприорного типа, так как в них оценивается правая часть дифференциального уравнения через его решение. Их можно рассматривать как некоторый аналог известного неравенства С. Н. Бернштейна для тригонометрических полиномов. Владимир Александрович показал, что оценки антиаприорного типа играют принципиальную роль при установлении сходимости спектральных разложений, отвечающих несамосопряженным дифференциальным операторам.

Теория оценок антиаприорного типа и их приложений получила развитие в докторских диссертациях учеников Владимира Александровича В. Д. Будаева и Н. Б. Керимова.

Большим научным достижением В. А. Ильина является установление им в 1983 году для оператора второго порядка при минимальных требованиях на его коэффициенты необходимого и достаточного условия базисности Рисса системы его собственных и присоединенных функций. В 1986 году В. А. Ильин перенес этот результат на случай, когда оператор является разрывным, что особенно актуально для рассмотрения задач с нелокальными краевыми условиями, для которых сопряженный оператор является разрывным.

В 1991 году В. А. Ильин рассмотрел одномерный оператор Шрёдингера с матричным потенциалом, который представляет собой неэрмитову матрицу, все комплекснозначные элементы которой только суммируемы на основном интервале. И в этом случае В. А. Ильин нашел конструктивные необходимые и достаточные условия на этот раз уже покомпонентной равносходимости с разложением в тригонометрический ряд разлагаемой вектор-функции. Более того, им установлен следующий замечательный результат: для любой вектор-функции, все компоненты которой принадлежат только классу L_1, сходимость или расходимость j-й компоненты спектрального разложения в данной точке зависит от поведения в малой окрестности этой точки только соответствующей j-й компоненты разлагаемой вектор-функции. В этой работе впервые была установлена справедливость покомпонентного принципа локализации.

В. А. Ильиным в соавторстве с Е. И. Моисеевым и К. В. Мальковым был внесен фундаментальный вклад в актуальную для моделирования нелинейных процессов проблему отыскания полной системы интегралов движения у широких классов нелинейных эволюционных систем уравнений. В этих работах было доказано, что найденные ранее В. А. Ильиным конструктивные необходимые и достаточные условия базисности систем корневых функций несамосопряженного дифференциального оператора L, являются одновременно необходимыми и достаточными условиями существования полной системы интегралов движения у нелинейной эволюционной системы, порождаемой $(L - A)$-представлением П. Лакса.

В 1995 году В. А. Ильин рассмотрел самосопряженное расширение на всей прямой одномерного оператора Шрёдингера с потенциалом, удовлетворяющим условию Като. Владимир Александрович доказал, что для произвольной функции из класса $L_p(-\infty, \infty)$, где $1 \leqslant p \leqslant 2$, разность между спектральным разложением этой функции, отвечающим самосопряженному расширению оператора Шрёдингера, и разложением этой функции в обычный интеграл Фурье стремится к нулю равномерно по x на всей прямой. В этой работе впервые установлен факт равномерной на всей прямой равносходимости.

Для всех работ В. А. Ильина характерны глубина и четкость постановок задач и исчерпывающий характер полученных результатов.

В. А. Ильиным создана большая и авторитетная научная школа. Он подготовил 20 докторов и более 70 кандидатов наук. Некоторые из его учеников сами стали крупными учеными и руководителями научных школ (Е. И. Моисеев – член-корреспондент РАН, Ш. А. Алимов – член-корреспондент АН Узбекистана, Н. Лажетич – профессор, заведующий кафедрой Белградского университета, М. Л. Гольдман – профессор, заведующий кафедрой МИРЭА, В. Д. Будаев – профессор, заведующий кафедрой Смоленского педагогического университета, Ван Тун – директор Вычислительного центра при Госплане Китайской Народной Республики).

В Московском университете им. М. В. Ломоносова Владимир Александрович Ильин известен как блестящий лектор. В. А. Ильиным написан цикл получивших всеобщее признание учебников: "Основы математического анализа", ч. 1 и 2, "Аналитическая геометрия" и "Линейная алгебра" (в соавторстве с Э. Г. Позняком), "Математический анализ", ч. 1 и 2 (в соавторстве с В. А. Садовничим и Бл. Х. Сендовым) и в самое последнее время курс "Линейная алгебра и аналитическая геометрия" (в соавторстве с Г. Д. Ким). В 1998 году издательство Наука-Физматлит переиздало все четыре учебника, написанные В. А. Ильиным в соавторстве с Э. Г. Позняком.

Владимир Александрович Ильин принимает активное участие в научно-организационной работе. В настоящее время он является председателем Экспертного Совета ВАК РФ по управлению, вычислительной технике и информатике, главным редактором журнала "Дифференциальные уравнения", членом редколлегии журнала "Доклады Академии Наук", членом комиссии по присуждению Государственных премий Российской Федерации.

Заслуги Владимира Александровича высоко оценены: он является лауреатом Государственной премии СССР (1980), лауреатом Ломоносовской премии за науку (1980), лауреатом Ломоносовской премии "За создание уникальных учебников по математике для университетов и высокое лекторское мастерство" (1992), награжден орденами Трудового Красного Знамени, Дружбы народов и многими медалями. В. А. Ильину присужден грант РФФИ как руководителю ведущей научной школы. В 1997 году и в 1998 году В. А. Ильину присужден грант Соросовского профессора.

Владимир Александрович обладает большим личным обаянием, чуткостью и благожелательностью к талантливой молодежи, добр, широк и отзывчив. Он удивляет всех его окружающих разносторонностью интересов и знаний, своей необыкновенной памятью.

С неослабевающей энергией В. А. Ильин занимается научной работой, щедро раздаривает научные идеи своим ученикам, реализует всё новые творческие замыслы. Полный список публикаций В. А. Ильина, включающий 240 названий, приведен в журнале "Дифференциальные уравнения" 1998 г., т. 34, №5, с. 586–594.

Пожелаем же Владимиру Александровичу Ильину в его многогранной деятельности новых творческих успехов, крепкого здоровья и счастья.

О. М. Белоцерковский, С. В. Емельянов, С. К. Коровин,
В. П. Маслов, Е. И. Моисеев, С. М. Никольский, О. А. Олейник,
Ю. С. Осипов, В. А. Садовничий, А. А. Самарский