МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

том **10** номер **8** год **1998**

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ АЛГОРИТМЫ И МЕТОДЫ

УДК 519.63

КОЭФФИЦИЕНТНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО–ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ И ОПЕРАТОРНО–РАЗНОСТНЫХ СХЕМ

© *А.А. Самарский, П.Н. Вабищевич, П.П. Матус*

Институт математического моделирования РАН,
Институт математики НАН Беларуси

Работа выполнена при частичной поддержке Российского (проект 96-01-000657) и Белорусского (проект Ф96-173) фондов фундаментальных исследований

Получены оценки устойчивости при возмущении оператора задачи Коши, правой части и начального условия для эволюционных уравнений, рассматриваемых в гильбертовых пространствах. Приводятся простейшие априорные оценки сильной устойчивости для двуслойных операторно–разностных схем, согласованные с соответствующими оценками для дифференциально–операторного уравнения.

COEFFICIENT STABILITY OF DIFFERENTIAL–OPERATOR EQUATIONS AND OPERATOR–DIFFERENCE SCHEMES

A.A. Samarskii, P.N. Vabishchevich, P.P. Matus

Institute of Mathematical Modeling of RAS,
Institute of Mathematics NAS of Belarus

Estimates of stability with perturbed operator of Cauchy problem, right side and initial condition for evolutionary equations in Hilbert spaces have been obtained. A priori estimates of strong stability for two-layered operator–difference schemes are brought. Such estimates are consistent with corespondent ones for differential–operator equation.

1. Введение. При исследовании начально–краевых задач для нестационарных уравнений математической физики основное внимание уделяется устойчивости решения по начальным данным и правой части [1, 2]. В более общей ситуации необходимо требовать непрерывной зависимости решения и от возмущения операторов задачи, например, от коэффициентов. В этом случае говорят о сильной устойчивости. На важность требования коэффициентной устойчивости указывалось еще в начале 60-х годов в [3]. Действительно, при решении дифференциального уравнения методом конечных разностей может оказаться, что информация о коэффициентах уравнения является недостаточно полной. Это может случиться, например, когда эти коэффициенты определяются приближенно с помощью некоторого вычислительного алгоритма.

Априорные оценки, выражающие непрерывную зависимость решения задачи от возмущений правой части и оператора, получены (см., например, [1, 4]) в различных условиях для стационарных задач (операторных уравнений первого рода). Что касается нестационарных задач, то здесь следует отметить работу [5], где исследуется коэффициентная устойчивость разностных схем с весами, аппроксимирующих краевую задачу для линейного параболического уравнения с переменными коэффициентами.

Данная статья посвящена получению оценок устойчивости при возмущении оператора задачи Коши, правой части и начального условия для эволюционных уравнений [6], рассматриваемых в гильбертовых пространствах. Получены априорные оценки для погрешности при естественных предположениях о возмущении оператора задачи. При дискретизации по времени мы приходим к операторно-разностному уравнению. Приведены простейшие априорные оценки сильной устойчивости для двуслойных операторно-разностных схем, согласованные с соответствующими оценками для дифференциально-операторного уравнения. Основные результаты иллюстрируются на примере начально-краевой задачи для одномерного параболического уравнения.

2. Сильная устойчивость дифференциально-операторных схем. Пусть H — конечномерное гильбертово пространство, в котором скалярное произведение и норма суть $(\cdot,\cdot)$, $\|\cdot\|$ соответственно. Будем считать, что A — постоянный самосопряженный положительно определенный линейный оператор в H, т.е. $A \neq A(t)$ и $A = A^* \geq \delta E$, $\delta = \text{const} > 0$. Через H_D, где $D = D^* > 0$, обозначим пространство со скалярным произведением и нормой

$$(y,v)_D = (Dy,v), \quad \|y\|_D = \sqrt{(Dy,v)}, \quad y, v \in H.$$

Рассмотрим задачу Коши для дифференциально-операторного уравнения первого порядка

$$\frac{du}{dt} + Au = f(t), \quad t > 0, \quad u(0) = u_0, \tag{2.1}$$

где $f(t)$, u_0 — заданы, а $u(t)$ — искомая функции со значениями в H. Через $\widetilde{u}$ обозначим решение задачи с возмущенной правой частью, начальным условием и оператором:

$$\frac{d\widetilde{u}}{dt} + \widetilde{A}\widetilde{u} = \widetilde{f}(t), \quad t > 0, \quad \widetilde{u}(0) = \widetilde{u}_0. \tag{2.2}$$

Ставится задача оценить величину возмущения решения $z(t) = \widetilde{u}(t) - u(t)$ через величины возмущений. Вычитая из уравнений (2.2) соответствующие уравнения (2.1), получим задачу для $z(t)$:

$$\frac{dz}{dt} + Az = \left(\widetilde{f}(t) - f(t)\right) - \left(\widetilde{A} - A\right)\widetilde{u}, \quad t > 0, \tag{2.3}$$

$$z(0) = \widetilde{u}_0 - u_0. \tag{2.4}$$

Относительно возмущенного оператора предполагаются выполненными те же предположения, что и для невозмущенного оператора: $\widetilde{A} \neq \widetilde{A}(t)$, $\widetilde{A} = \widetilde{A}^* \geq \delta E$, $\delta = \text{const} > 0$. Мерой возмущения будет служить положительная постоянная α в неравенстве [1]

$$0 \leq \left(\left(\widetilde{A} - A\right) v, v\right) \leq \alpha\,(Av, v). \tag{2.5}$$

Более сильные предположения связываются с оценкой для энергии оператора без предположения о неотрицательности оператора $\widetilde{A} - A$:

$$\left\| \left(\widetilde{A} - A\right) v \right\| \leq \alpha \left\| \widetilde{A} v \right\|. \tag{2.6}$$

Теорема 1. *При выполнении условий* (2.5) *на возмущение оператора* A *для возмущения решения справедлива априорная оценка*

$$\|z(t)\|^2 \leq \|\widetilde{u}_0 - u_0\|^2 + \int_0^t \left\| \widetilde{f}(\theta) - f(\theta) \right\|^2_{A^{-1}} d\theta + \alpha^2 \left(\|\widetilde{u}_0\|^2 + \int_0^t \left\| \widetilde{f}(\theta) \right\|^2_{A^{-1}} d\theta \right). \tag{2.7}$$

В предположениях (2.6) *аналогичная оценка устойчивости решения задачи* (2.1) *по начальным данным, правой части и коэффициентам имеет вид*

$$\|z(t)\|^2_A \leq \|\widetilde{u}_0 - u_0\|^2_A + \int_0^t \left\| \widetilde{f}(\theta) - f(\theta) \right\|^2 d\theta + \alpha^2 \left(\|\widetilde{u}_0\|^2_{\widetilde{A}} + \int_0^t \left\| \widetilde{f}(\theta) \right\|^2 d\theta \right). \tag{2.8}$$

Доказательство. В задаче (2.3), (2.4) для возмущения домножим скалярно уравнение на $2z$:

$$\frac{d}{dt} \|z\|^2 + 2\|z\|^2_A = 2\left(\left(\widetilde{f}(t) - f(t)\right), z\right) - 2\left(\left(\widetilde{A} - A\right)\widetilde{u}, z\right). \tag{2.9}$$

Используя обобщенные неравенства Коши–Буняковского

$$\begin{gathered} (Ay, v)^2 \leq (Ay, y)(Av, v), \\ |(y, v)| = |(A^{-1}y, Av)| \leq \|y\|_{A^{-1}} \|v\|_A, \end{gathered} \tag{2.10}$$

ε-неравенство и условия (2.5), находим оценки

$$2\left(\left(\widetilde{f}(t) - f(t)\right), z\right) \leq \left\| \widetilde{f}(t) - f(t) \right\|^2_{A^{-1}} + \|z\|^2_A, \tag{2.11}$$

$$\begin{aligned} 2\left(\left(\widetilde{A} - A\right)\widetilde{u}, z\right) &\leq \alpha \left(\left(\widetilde{A} - A\right)\widetilde{u}, \widetilde{u}\right) + \frac{1}{\alpha}\left(\left(\widetilde{A} - A\right)z, z\right) \leq \\ &\leq \alpha^2 (A\widetilde{u}, \widetilde{u}) + (Az, z) \leq \alpha^2 \|\widetilde{u}\|^2_{\widetilde{A}} + \|z\|^2_A. \end{aligned} \tag{2.12}$$

Подстановка (2.11), (2.12) в (2.8) и интегрирование полученного неравенства по t дает

$$\|z(t)\|^2 \leq \|\widetilde{u}_0 - u_0\|^2 + \int_0^t \left\| \widetilde{f}(\theta) - f(\theta) \right\|^2_{A^{-1}} d\theta + \alpha^2 \int_0^t \|\widetilde{u}(\theta)\|^2_{\widetilde{A}} d\theta. \tag{2.13}$$

Для получения оценки устойчивости решения возмущенной задачи (2.2) по начальным данным и правой части в интегральной по времени норме [7] домножим уравнение (2.2) скалярно в H на $2\widetilde{u}$. Получим

$$\frac{d}{dt} \|\widetilde{u}(t)\|^2 + 2\|\widetilde{u}\|^2_{\widetilde{A}} = 2\left(\widetilde{u}, \widetilde{f}(t)\right) \leq \|\widetilde{u}\|^2_{\widetilde{A}} + \left\| \widetilde{f}(t) \right\|^2_{\widetilde{A}^{-1}}.$$

Интегрируя последнее неравенство по t с учетом операторного неравенства $\widetilde{A}^{-1} \leq$ $\leq A^{-1}$, находим

$$\int_0^t \|\widetilde{u}(\theta)\|^2 \, d\theta \leq \|\widetilde{u}(0)\|^2 + \int_0^t \left\|\widetilde{f}(\theta)\right\|^2_{\widetilde{A}^{-1}} d\theta. \tag{2.14}$$

Подставляя теперь (2.14) в (2.13), приходим к первой требуемой оценке (2.7).

Для получения неравенства (2.8) уравнение для возмущения (2.3) домножим скалярно на $2dz/dt$. Учитывая самосопряженность оператора A, получим энергетическое тождество

$$2\left\|\frac{dz}{dt}\right\|^2 + \frac{d}{dt}\|z\|_A^2 = 2\left(\left(\widetilde{f}(t) - f(t)\right), \frac{dz}{dt}\right) - 2\left(\left(\widetilde{A} - A\right)\widetilde{u}, \frac{dz}{dt}\right). \tag{2.15}$$

Для оценки правой части имеем

$$2\left(\left(\widetilde{f}(t) - f(t)\right), \frac{dz}{dt}\right) - 2\left(\left(\widetilde{A} - A\right)\widetilde{u}, \frac{dz}{dt}\right) \leq$$

$$\leq 2\left\|\frac{dz}{dt}\right\|^2 + \left\|\widetilde{f}(t) - f(t)\right\|^2 + \left\|\left(\widetilde{A} - A\right)\widetilde{u}\right\|^2.$$

С учетом этого из (2.15) следует оценка

$$\|z(t)\|_A^2 \leq \|z(0)\|_A^2 + \int_0^t \left\|\widetilde{f}(\theta) - f(\theta)\right\|^2 d\theta + \int_0^t \left\|\left(\widetilde{A} - A\right)\widetilde{u}(\theta)\right\|^2 d\theta. \tag{2.16}$$

Рассмотрим теперь возмущенную задачу (2.2). Следуя [6], домножим уравнение (2.2) скалярно на $2\widetilde{A}\widetilde{u}$. Получим

$$\frac{d}{dt}\|\widetilde{u}\|_{\widetilde{A}}^2 + 2\left\|\widetilde{A}\widetilde{u}\right\|^2 = 2\left(\widetilde{f}, \widetilde{A}\widetilde{u}\right) \leq \left\|\widetilde{A}\widetilde{u}\right\| + \left\|\widetilde{f}(t)\right\|^2.$$

Интегрирование этого неравенства от 0 до t дает

$$\int_0^t \left\|\widetilde{A}\widetilde{u}(\theta)\right\|^2 d\theta \leq \|\widetilde{u}(0)\|_{\widetilde{A}}^2 + \int_0^t \|f(\theta)\|^2 \, d\theta. \tag{2.17}$$

Согласно (2.6), (2.17)

$$\int_0^t \left\|\left(\widetilde{A} - A\right)\widetilde{u}(\theta)\right\|^2 d\theta \leq \alpha^2 \left(\|\widetilde{u}(0)\|_{\widetilde{A}}^2 + \int_0^t \|f(\theta)\|^2 d\theta\right). \tag{2.18}$$

Подстановка данного неравенства в (2.16) приводит нас к оценке (2.8). Теорема доказана.

3. Сильная устойчивость разностных схем с весами. Пусть $\tau > 0$ — шаг сетки по времени, и $y_n = y(t_n) \in H$, $t_n = n\tau$. Задаче Коши (2.1) для дифференциально-операторного уравнения поставим в соответствие схему с весами

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{\tau} + A\left(\sigma y_{n+1} + (1-\sigma)y_n\right) = f_n, \quad n = 0, 1, ..., \tag{3.1}$$

$$y_0 = u_0. \tag{3.2}$$

Запишем также разностную схему для возмущенной задачи (2.2):

$$\frac{\widetilde{y}_{n+1} - \widetilde{y}_n}{\tau} + \widetilde{A}\left(\sigma \widetilde{y}_{n+1} + (1-\sigma)\widetilde{y}_n\right) = \widetilde{f}_n, \quad n = 0, 1, ..., \tag{3.3}$$

$$\widetilde{y}_0 = \widetilde{u}_0. \tag{3.4}$$

Аналогично теореме 1 формулируется утверждение о сильной устойчивости рассматриваемой разностной схемы.

Теорема 2. *Для возмущения решения* $z_n = \widetilde{y}_n - y_n$ *разностных схем* (3.1), (3.2) *и* (3.3), (3.4) *при* $\sigma \geq 0,5$ *и выполнении условий* (2.5) *имеет место априорная оценка*

$$\|z_{n+1}\|^2 \leq \|\widetilde{y}_0 - y_0\|^2 + \sum_{k=0}^{n} \tau \left\|\widetilde{f}_k - f_k\right\|^2_{A^{-1}} + \alpha^2 \left(\|\widetilde{y}_0\|^2 + \sum_{k=0}^{n} \tau \|\widetilde{f}_k\|^2_{\widetilde{A}^{-1}}\right), \tag{3.5}$$

а при выполнении условий (2.6)

$$\|z_{n+1}\|^2_A \leq \|\widetilde{y}_0 - y_0\|^2_A + \sum_{k=0}^{n} \tau \left\|\widetilde{f}_k - f_k\right\|^2 + \alpha^2 \left(\|\widetilde{y}_0\|^2_{\widetilde{A}} + \sum_{k=0}^{n} \tau \|\widetilde{f}_k\|^2\right). \tag{3.6}$$

Доказательство. Для возмущения решения имеем задачу

$$\frac{z_{n+1} - z_n}{\tau} + A\left(\sigma z_{n+1} + (1-\sigma)z_n\right) = \left(\widetilde{f}_n - f_n\right) - \left(\widetilde{A} - A\right)\widetilde{y}_n^{(\sigma)}, \quad n = 0, 1, ..., \tag{3.7}$$

$$z_0 = \widetilde{u}_0 - u_0, \tag{3.8}$$

где $\widetilde{y}_n^{(\sigma)} = \sigma \widetilde{y}_{n+1} + (1-\sigma)\widetilde{y}_n$, $\sigma \geq 0$ — вещественный параметр. Умножим уравнение (3.7) скалярно на $2\tau z^{(\sigma)}$ и рассмотрим последовательно соответствующие скалярные произведения. Получаем следующие выражения:

$$2\tau\left(z_t, z^{(\sigma)}\right) = 2\tau\left(z_t, z^{(0.5)} + \tau(\sigma - 0.5)z_t\right) =$$

$$= \tau\left(\|z\|^2\right)_t + 2\tau^2(\sigma - 0.5)\|z_t\|^2, \quad z_t = (z_{n+1} - z_n)/\tau,$$

$$2\tau(Az^{(\sigma)}, z^{(\sigma)}) = 2\tau\|z^{(\sigma)}\|^2_A.$$

Применяя теперь неравенства (2.11), (2.12), находим

$$2\tau\left(\left(\widetilde{f}_n - f_n\right) + \left(\widetilde{A} - A\right)\widetilde{y}_n^{(\sigma)}, z^{(\sigma)}\right) \leq 2\tau\left\|z^{(\sigma)}\right\|^2_A + \tau\left\|\widetilde{f}_n - f_n\right\|^2_{A^{-1}} + \alpha^2\tau\left\|\widetilde{y}_n^{(\sigma)}\right\|^2_{\widetilde{A}}.$$

Складывая полученные оценки, приходим к соотношению

$$\begin{aligned}\|z_{n+1}\|^2 &\le \|z_n\|^2 + \tau\left\|\tilde{f}_n - f_n\right\|^2_{A^{-1}} + \alpha^2\tau\left\|\tilde{y}_n^{(\sigma)}\right\|^2_{\tilde{A}} \le \\ &\le \ldots \le \|\tilde{y}_0 - y_0\|^2 + \sum_{k=0}^{n}\tau\left\|\tilde{f}_k - f_k\right\|^2_{A^{-1}} + \alpha^2\sum_{k=0}^{n}\tau\left\|\tilde{y}_n^{(\sigma)}\right\|^2_{\tilde{A}}.\end{aligned} \tag{3.9}$$

Для оценки выражения $\sum\limits_{k=0}^{n}\tau\left\|\tilde{y}_n^{(\sigma)}\right\|^2_{\tilde{A}}$ уравнение для возмущенного решения (3.3) перепишем в виде

$$\tilde{y}_t + \tilde{A}\tilde{y}^{(\sigma)} = \tilde{f}. \tag{3.10}$$

Умножая последнее скалярно в H на $2\tau\tilde{y}_n^{(\sigma)}$, получим

$$\|\tilde{y}_{n+1}\|^2 + 2\tau\left\|\tilde{y}_n^{(\sigma)}\right\|^2_{\tilde{A}} \le \|\tilde{y}_n\|^2 + \tau\left\|\tilde{y}_n^{(\sigma)}\right\|^2_{\tilde{A}} + \tau\left\|\tilde{f}_n\right\|^2.$$

Отсюда следует неравенство

$$\sum_{k=0}^{n}\tau\left\|\tilde{y}_k^{(\sigma)}\right\|^2_{\tilde{A}} \le \|\tilde{y}_0\|^2 + \sum_{k=0}^{n}\tau\left\|\tilde{f}_k\right\|^2.$$

Подставляя его теперь в (3.9), приходим к оценке (3.5).

Докажем теперь оценку (3.6). Уравнение для z_n (3.7) умножим скалярно на $2\tau z_t$. Аналогично (2.15) находим

$$\begin{aligned}2\tau\|z_t\|^2 &+ \|z_{n+1}\|^2_A + 2\tau^2(\sigma - 0.5)\|z_t\|^2_A \le \\ &\le \|z_n\|^2_A + \tau\left\|\tilde{f}_n - f_n\right\|^2 + \tau\left\|\left(\tilde{A} - A\right)\tilde{y}_n^{(\sigma)}\right\|^2 + 2\tau\|z_t\|^2.\end{aligned}$$

Так как $\sigma \ge 0.5$ и выполнено неравенство (2.6), то отсюда немедленно получаем

$$\|z_{n+1}\|^2_A \le \|z_0\|^2_A + \sum_{k=0}^{n}\tau\left\|\tilde{f}_k - f_k\right\|^2 + \alpha^2\sum_{k=0}^{n}\tau\left\|\tilde{A}\tilde{y}_k^{(\sigma)}\right\|^2. \tag{3.11}$$

Для оценки решения $\tilde{y}^{(\sigma)}$ в интегральной по времени норме $\sum\limits_{k=0}^{n}\tau\left\|\tilde{A}\tilde{y}_k^{(\sigma)}\right\|^2$ уравнение (3.10) домножим скалярно на $2\tau\tilde{A}\tilde{y}^{(\sigma)}$ и к правой части применим неравенство Коши с ε. Получаем соотношение

$$\|\tilde{y}_{n+1}\|^2_{\tilde{A}} + 2\tau^2(\sigma - 0.5)\|\tilde{y}_t\|^2_{\tilde{A}} + 2\tau\left\|\tilde{A}\tilde{y}^{(\sigma)}\right\|^2 \le \|\tilde{y}_n\|^2_{\tilde{A}} + \tau\left\|\tilde{A}\tilde{y}^{(\sigma)}\right\|^2 + \tau\left\|\tilde{f}_n - f_n\right\|^2.$$

Следовательно,

$$\sum_{k=0}^{n}\tau\left\|\tilde{A}\tilde{y}_k^{(\sigma)}\right\|^2 \le \|\tilde{y}_0\|^2_{\tilde{A}} + \sum_{k=0}^{n}\tau\left\|\tilde{f}_k - f_k\right\|^2.$$

Подстановка данного неравенства в (3.11) дает требуемый результат. Теорема доказана.

4. Модельная задача. В качестве примера рассмотрим первую краевую задачу для одномерного параболического уравнения:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + f(x,t), \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \tag{4.1}$$

$$u(0,t) = u(l,t) = 0, \quad t > 0, \qquad u(x,0) = u_0(x), \quad 0 < x < l \tag{4.2}$$

при естественном предположении $k(x) \geq c_1 > 0$.

На равномерной сетке $\omega = \omega_h \times \omega_\tau$, $\overline{\omega}_h = \{\, x_i = ih, \quad i = 0,1,...,N, \quad hN = l\,\}$, $\omega_\tau = \{\, t_n = n\tau, \quad n = 0,1,...\}$ с постоянными шагами h и τ дифференциальную задачу (4.1), (4.2) аппроксимируем обычной разностной схемой с весами

$$\frac{y_i^{n+1} - y_i^n}{\tau} = \sigma\left(ay_{\bar{x}}^{n+1}\right)_{x,i} + (1-\sigma)\left(ay_{\bar{x}}^n\right)_{x,i} + f_i^n, \quad i = 1,2,...,N-1, \tag{4.3}$$

$$y_0^n = y_N^n = 0, \quad n = 0,1,..., \qquad y_i^0 = u_0(x_i). \tag{4.4}$$

Здесь $y_i^n = y(x_i,t_n)$, $(ay_{\bar{x}})_{x,i} = \left(a_{i+1}(y_{i+1} - y_i)/h - a_i(y_i - y_{i-1})/h\right)/h$, a — некоторый шаблонный функционал, удовлетворяющий условию $a(x) \geq c_1 > 0$, $x \in \omega_h^+ = \omega_h \cup \{x_N = l\}$. Разностная схема (4.3), (4.4) приводится к операторной схеме (3.1), (3.2), если положить $y_n = \left(y_1^n, y_2^n, ..., y_{N-1}^n\right)^T$,

$$(Ay)_i = -\left(ay_{\bar{x}}\right)_{x,i}, \quad i = 1,2,...,N-1, \quad y_0 = y_N = 0. \tag{4.5}$$

Свойства оператора A хорошо изучены [1], в частности, $A = A^* \geq \delta E$, $\delta = 8c_1/l^2$. Пространство H состоит в данном случае из функций $y_i = y(x_i)$, заданных на сетке $\overline{\omega}_h$ и удовлетворяющих условию $y_0 = y_N = 0$. Скалярное произведение и норму зададим выражениями

$$(y,v) = \sum_{i=1}^{N-1} y_i v_i h, \quad \|y\| = \sqrt{(y,y)}.$$

Покажем, что для оператора $\left(\widetilde{A} - A\right)v = -\left((\widetilde{a} - a)\,v_{\bar{x}}\right)_x$ условие (2.5) выполнено, если

$$0 \leq \widetilde{a}(x) - a(x) \leq \alpha\, a(x), \quad x \in \omega_h^+. \tag{4.6}$$

Действительно, применяя первую разностную формулу Грина, получаем неравенство

$$\left(\left(\widetilde{A} - A\right)v, v\right) = \left(\widetilde{a} - a, v_{\bar{x}}^2\right] \leq \alpha\,\left(a, v_{\bar{x}}^2\right] = \alpha\,(Av,v),$$

где $(y,v] = \sum\limits_{i=1}^{N} y_i v_i h$.

Следовательно, разностная схема (4.3), (4.4) устойчива по начальным данным, правой части, коэффициентам, и для ее решения справедлива априорная оценка (3.5).

Покажем теперь, что при дополнительных более сильных предположениях $0 < c_1 \leq a(x) \leq c_2$, $x \in \omega_h^+$ и

$$|\widetilde{a} - a| \leq \alpha_1\,\widetilde{a}, \quad |\widetilde{a}_{\bar{x}} - a_{\bar{x}}| \leq \alpha_2, \quad \left|\left(\widetilde{a}^{-1}\right)_{\bar{x}}\right| \leq c_3, \tag{4.7}$$

для оператора (4.5) выполнена оценка (2.6)

$$\left\|\left(\widetilde{A}-A\right)v\right\| \le \alpha \left\|\widetilde{A}v\right\|, \quad \alpha = c_0(\alpha_1+\alpha_2), \tag{4.8}$$

где $c_0 = \mathrm{const} > 0$ определяется положительными постоянными c_1, c_2, c_3. Предварительно будет доказана следующая

Лемма 1. *Для любой сеточной функции $y(x)$, заданной на равномерной сетке $\overline{\omega}_h$ и обращающейся в нуль на концах интервала $x = 0$, $x = l$, имеют место неравенства*

$$\|y_{\bar{x}}]| \le \frac{1}{\sqrt{c_1}}\|y\|_A, \tag{4.9}$$

$$\|y\|_A \le \frac{l}{2\sqrt{2c_1}}\|Ay\|. \tag{4.10}$$

Доказательство. Неравенство (4.9) немедленно следует из разностной формулы Грина

$$\|y\|_A^2 = (a, y_{\bar{x}}^2].$$

Для доказательства оценки (4.10) используем сеточный аналог известного [1] неравенства Фридрихса $\|y\|^2 \le (l^2/8)\,\|y_{\bar{x}}]|$. Получаем соотношение

$$\|y\|_A^2 = (Ay, y) \le \|Ay\|\,\|y\| \le \frac{l}{2\sqrt{2c}}\|Ay\|\,\|y\|_A,$$

что и доказывает лемму.

Требуемое неравенство (4.8) теперь следует из условий (4.7), леммы 1 и тождества

$$\left(\widetilde{A}-A\right)\widetilde{y} = ((\widetilde{a}-a)\,\widetilde{y}_{\bar{x}})_x = \left(\frac{\widetilde{a}-a}{\widetilde{a}}(\widetilde{a}\widetilde{y}_{\bar{x}})\right)_x =$$

$$= \left(\frac{\widetilde{a}-a}{\widetilde{a}}\right)_+ \widetilde{A}\widetilde{y} + \left(\widetilde{a}\left(\widetilde{a}^{-1}\right)_x(\widetilde{a}-a) + (\widetilde{a}_x - a_x)\right)\widetilde{y}_{\bar{x}},$$

полученного с помощью обычных формул разностного дифференцирования. Здесь $v_+ = v_{i+1}$.

5. Коэффициентная устойчивость двуслойных операторно–разностных схем. Двуслойная разностная схема определяется как уравнение

$$By_t + Ay = \varphi(t), \quad t \in \omega_\tau, \quad y(0) = y_0, \tag{5.1}$$

с линейными операторами A и B, действующими в гильбертовом пространстве H. Устойчивость по начальным данным и правой части схемы (5.1) исследована в [1]. В дальнейшем будем предполагать, что постоянные операторы A и B удовлетворяют условиям

$$A = A^* > 0, \quad B = B^* > 0, \quad G = B - 0{,}5\tau A > 0. \tag{5.2}$$

Как и ранее через $\widetilde{y}$ обозначим решение задачи с возмущенной правой частью, начальным условием и операторами:

$$\widetilde{B}\widetilde{y}_t + \widetilde{A}\widetilde{y} = \widetilde{\varphi}(t), \quad t \in \omega_\tau, \quad \widetilde{y}(0) = \widetilde{y}_0. \tag{5.3}$$

Для операторов $\widetilde{A}$ и $\widetilde{B}$ предполагаются выполненными соотношения, аналогичные (5.2):

$$\widetilde{A} = \widetilde{A}^* > 0, \quad \widetilde{B} = \widetilde{B} > 0, \quad \widetilde{G} = \widetilde{B} - 0.5\tau\widetilde{A} > 0. \tag{5.4}$$

В дальнейшем нам понадобятся следующие оценки решения возмущенной задачи (5.3) в интегральных по времени нормах.

Лемма 2. *Пусть выполнены условия* (5.4). *Тогда решение разностной схемы* (5.3) *устойчиво по начальным данным и правой части, и имеют место априорные оценки*

$$\sum_{k=0}^{n} \tau \left\|\widetilde{y}_{t,k}\right\|_{\widetilde{G}}^2 \le \left\|\widetilde{y}_0\right\|_{\widetilde{A}}^2 + \sum_{k=0}^{n} \tau \left\|\widetilde{\varphi}_k\right\|_{\widetilde{G}^{-1}}^2, \tag{5.5}$$

$$\sum_{k=0}^{n} \tau \left\|\widetilde{y}_k^{(0,5)}\right\|_{\widetilde{A}}^2 \le \left\|\widetilde{y}_0\right\|_{\widetilde{G}}^2 + \sum_{k=0}^{n} \tau \left\|\widetilde{\varphi}_k\right\|_{\widetilde{A}^{-1}}^2. \tag{5.6}$$

Доказательство. Перепишем задачу (5.3) в эквивалентном виде

$$\widetilde{G}\widetilde{y}_t + \widetilde{A}\widetilde{y}^{(0,5)} = \widetilde{\varphi}(t), \quad t \in \omega_\tau, \quad \widetilde{y}(0) = \widetilde{y}_0. \tag{5.7}$$

Умножая данное уравнение скалярно в H на $2\tau\widetilde{y}_t$ и применяя обобщенное неравенство Коши–Буняковского (2.10) с ε, получим

$$2\tau \left\|\widetilde{y}_t\right\|_{\widetilde{G}}^2 + \left\|\widetilde{y}_{n+1}\right\|_{\widetilde{A}}^2 - \left\|\widetilde{y}_n\right\|_{\widetilde{A}}^2 = 2\tau\left(\widetilde{\varphi}, \widetilde{y}_t\right) \le \tau \left\|\widetilde{\varphi}\right\|_{\widetilde{G}^{-1}}^2 + \tau \left\|\widetilde{y}_t\right\|_{\widetilde{G}}^2.$$

Отсюда немедленно следует первая оценка (5.5). Аналогично, умножая (5.7) скалярно на $2\tau\widetilde{y}^{(0,5)}$, получим

$$\left\|\widetilde{y}_{n+1}\right\|_{\widetilde{G}}^2 - \left\|\widetilde{y}_n\right\|_{\widetilde{G}}^2 + 2\tau \left\|\widetilde{y}^{(0,5)}\right\|_{\widetilde{A}}^2 \le \tau \left\|\widetilde{y}^{(0,5)}\right\|_{\widetilde{A}}^2 + \tau \left\|\widetilde{\varphi}\right\|_{\widetilde{A}^{-1}}^2.$$

В силу произвольности n из последнего неравенства следует требуемое неравенство (5.6). Лемма доказана.

Для разности $z = \widetilde{y} - y$ из (5.1), (5.3) получим следующую задачу:

$$Gz_t + Az^{(0.5)} = (\widetilde{\varphi} - \varphi) - \left(\widetilde{G} - G\right)\widetilde{y}_t - \left(\widetilde{A} - A\right)\widetilde{y}^{(0.5)}, \tag{5.8}$$

$$z_0 = \widetilde{y} - y_0. \tag{5.9}$$

Относительно возмущения операторов будем предполагать выполненными следующие условия:

$$0 \le \left(\left(\widetilde{A} - A\right)v, v\right) \le \alpha_3 (Av, v), \tag{5.10}$$

$$0 \le \left(\left(\widetilde{G} - G\right)v, v\right) \le \alpha_4 (Gv, v). \tag{5.11}$$

Теорема 3. *Пусть выполнены условия* (5.2),(5.4),(5.10),(5.11). *Тогда при достаточно малом* $\tau \le \tau_0$, $\tau_0 \le 0{,}5$, *для решения задачи* (5.8),(5.9) *имеет место априорная оценка*

$$\|z_{n+1}\|_G^2 \le e^{4t_{n+1}} \left(\|z_0\|_G^2 + \sum_{k=0}^{n} \tau \|\widetilde{\varphi}_k - \varphi_k\|_{A^{-1}}^2 + \alpha_1^2 \left(\|\widetilde{y}_0\|_{\widetilde{G}}^2 + \sum_{k=0}^{n} \tau \|\widetilde{\varphi}_k\|_{\widetilde{A}^{-1}}^2 \right) + \right.$$

$$\left. + 2\alpha_2^2 \left(\|\widetilde{y}_0\|_{\widetilde{A}}^2 + \sum_{k=0}^{n} \tau \|\widetilde{\varphi}_k\|_{\widetilde{G}^{-1}}^2 \right) \right). \qquad (5.12)$$

Доказательство. Уравнение (5.8) умножим скалярно на $2\tau z^{(0,5)}$. Получим энергетическое тождество

$$\|z_{n+1}\|_G^2 - \|z_n\|_G^2 + 2\tau \left\| z^{(0,5)} \right\|_A^2 = 2\tau \left((\widetilde{\varphi} - \varphi), z^{(0,5)} \right) - 2\tau \left(\left(\widetilde{G} - G \right) \widetilde{y}_t, z^{(0,5)} \right) -$$

$$- 2\tau \left(\left(\widetilde{A} - A \right) \widetilde{y}^{(0,5)}, z^{(0,5)} \right). \qquad (5.13)$$

С учетом (5.10), (5.11) нетрудно получить следующие оценки:

$$-2\tau \left((\widetilde{\varphi} - \varphi), z^{(0,5)} \right) \le \tau \left\| z^{(0,5)} \right\|_A^2 + \tau \|\widetilde{\varphi} - \varphi\|_{A^{-1}}^2 ,$$

$$-2\tau \left(\left(\widetilde{G} - G \right) \widetilde{y}_t, z^{(0,5)} \right) \le 2\tau\alpha_2^2 \|\widetilde{y}_t\|_{\widetilde{G}}^2 + \tau \|z_{n+1}\|_G^2 + \tau \|z_n\|_G^2 ,$$

$$-2\tau \left(\left(\widetilde{A} - A \right) \widetilde{y}^{(0,5)}, z^{(0,5)} \right) \le \tau \left\| z^{(0,5)} \right\|_A^2 + \alpha_1^2 \tau \left\| \widetilde{y}^{(0,5)} \right\|_{\widetilde{A}}^2 .$$

Подставляя данные неравенства в (5.13) и учитывая, что при $\tau \le 1/2$ выполнено $(1+\tau)/(1-\tau) \le 1 + 4\tau$, получим оценку

$$\|z_{n+1}\|_G^2 \le e^{4t_{n+1}} \left(\|z_0\|_G^2 + \sum_{k=0}^{n} \tau \|\widetilde{\varphi}_k - \varphi_k\|_{A^{-1}}^2 + \right.$$

$$\left. + \alpha_1^2 \sum_{k=0}^{n} \tau \left\| \widetilde{y}_k^{(0,5)} \right\|_{\widetilde{A}}^2 + 2\alpha_2^2 \sum_{k=0}^{n} \tau \|\widetilde{y}_{t,k}\|_{\widetilde{G}}^2 \right).$$

Подставляя сюда соотношения (5.5), (5.6) приходим к неравенству (5.12). Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *А.А. Самарский.* Теория разностных схем. — М.: Наука, 1977.
2. *А.А. Самарский, А.В. Гулин.* Устойчивость разностных схем. — М.: Наука, 1973.
3. *А.Н. Тихонов, А.А. Самарский.* Об однородных разностных схемах. // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1961, т.1, № 1. с.5–63.
4. *С.Г. Михлин.* Некоторые вопросы теории погрешностей. — Л.: Изд-во ЛГУ, 1988.

5. *У. Штрайт.* Разностные схемы для параболического уравнения общего вида с обобщенными решениями. // Дифференц. уравнения, 1986, т. 22, № 7, с.1246–1260.
6. *А.А. Самарский, П.Н. Вабищевич, П.П. Матус.* Сильная устойчивость дифференциально–операторных и операторно–разностных схем. // ДАН, 1997, т.356, № 4, с.455–457.
7. *А.А. Самарский, П.Н. Вабищевич, П.П. Матус.* Устойчивость в интегральных по времени нормах. // ДАН, 1997, т.356, № 6, с.745–747.

Поступила в редакцию 02.03.98.