МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

том 10 номер 1 год 1998

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ МЕТОДЫ И АЛГОРИТМЫ

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА РАЗНОСТНОЙ СХЕМЫ «КАБАРЕ»

© *В.М.Головизнин, А.А.Самарский*

Институт проблем безопасного развития атомной энергетики, РАН
Интитут математического моделирования, РАН

Для разностной схемы «кабаре» с пространственным расщеплением временной производной, аппроксимирующей модельное уравнение конвективного переноса [1], рассмотрены некоторые способы управления ее дисперсионными и диссипативными свойствами и найден дополнительный квадратичный закон сохранения. Показано, что по своим транспортным характеристикам схема «кабаре» с оптимизированными параметрами на три порядка превосходит возможности классических линейных разностных схем. Дополнительный закон сохранения позволяет построить однопараметрическое семейство на произвольных неравномерных расчетных сетках. Это значит, что разностная схема «кабаре» обладает еще одним уникальным свойством – она имеет бесконечное множество законов сохранения.

SOME CHARACTERISTICS OF FINITE DIFFERENCE SCHEME "CABARET"

V.M.Goloviznin, A.A.Samarsky

IBRAE
Institute Mathematical Modeling

Введение. В [1] была предложена новая линейная явная разностная схема для модельного уравнения конвективного переноса, названная схемой «кабаре». Схема «кабаре» имеет ряд уникальных особенностей, и ее дальнейшее изучение представляет как теоретический, так и прикладной интерес.

Главной особенностью схемы «кабаре» является то, что она оказывается точной при двух различных числах Куранта r, лежащих в области ее устойчивости, а именно: при r=1 и r=0.5. Схема устойчива в интервале чисел Куранта от нуля до единицы.

Другая особенность схемы заключается в том, что она имеет второй порядок аппроксимации на нерегулярных расчетных сетках и обладает свойством транспортивности [2], исключающим возможность распространения возмущений вверх по потоку.

Кроме того, схема «кабаре» является консервативной (дивергентной) [3], и для нее автоматически выполняется закон сохранения квадрата переносимой функции, являющийся

аналогом закона сохранения энергии. Таким образом, можно сказать, что схема «кабаре» обладает свойством полной консервативности [4].

Схема «кабаре» является бездиссипативной и имеет хорошие дисперсионные свойства, которые в совокупности и обеспечивают ее хорошие транспортные свойства: на нерегулярной расчетной сетке схема без существенного искажения переносит нетривиальные начальные распределения на расстояния, на порядок большие, чем это позволяют классические линейные схемы [5], такие, например, как схема Лакса-Вендроффа [6].

В настоящей работе продолжены исследования схемы «кабаре» на нерегулярных пространственных сетках, начатые в [1].

Показано, что наличие хороших дисперсионных свойств у исходной схемы позволяет провести их дальнейшую оптимизацию, еще на два порядка улучшающую ее транспортные возможности. Оптимизированная схема «кабаре», таким образом, превосходит по этому показателю схему Лакса-Вендроффа на три порядка.

Найден еще один, отличный от полученного в [1], квадратичный закон сохранения, что дает возможность построить однопараметрическое семейство таких законов. Это означает, что разностная схема «кабаре», подобно исходному дифференциальному уравнению, обладает бесконечным множеством законов сохранения даже на нерегулярных пространственных сетках.

Установлено, что специфическая структура шаблона схемы «кабаре» позволяет вводить особый вид диссипатора, устраняющий отмеченные в [1] особенности ее фазовой поверхности и подавляющего негативное влияние дополнительного корня характеристического уравнения на качество получаемого решения при разрывных начальных данных.

1. Искусственная дисперсия. Постановка оптимизационной задачи. Для модельного уравненияя конвективного переноса рассмотрим задачу Коши с периодическими начальными условиями:

$$\begin{gathered}\frac{\partial \varphi}{\partial t} + c\,\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0\,; \quad t \in [0,\ T]\,; \quad x \in [0,\ 2\pi]\,; \\ c = \text{const} > 0\,; \quad \varphi(0,\ x) = f(x)\,; \quad \varphi(t,\ 0) = \psi(t)\,.\end{gathered} \tag{1}$$

Покроем область определения задачи расчетной сеткой с постоянным шагом по времени τ и произвольными переменными шагами h_i по пространственной переменной. Аппроксимируем задачу (1) разностной схемой «кабаре» [1]:

$$\begin{gathered}\frac{1}{2}\left(\frac{\hat{\varphi}_i - \varphi_i}{\tau} + \frac{\varphi_{i-1} - \breve{\varphi}_{i-1}}{\tau}\right) + c\,\frac{\varphi_i - \varphi_{i-1}}{h_i} = 0\,; \\ \tau = t_{n+1} - t_n = \text{const}\,; \qquad i = 2,\ldots,N\,; \qquad h_i > 0\,,\end{gathered} \tag{2}$$

где величины φ, $\hat{\varphi}$, $\breve{\varphi}$ относятся к текущему, последующему и предыдущему временным слоям соответственно.

Схема (2) является трехслойной и требует задания начальных данных на двух временных слоях. Для задания дополнительного начального условия будем использовать наиболее популярную схему первого порядка «уголок» [5], [1]:

$$\frac{\hat{\varphi}_i - \varphi_i}{\tau} + c\,\frac{\varphi_i - \varphi_{i-1}}{h_i} = 0\,; \quad i = 2,\ldots,N. \tag{3}$$

В правую часть уравнения (2) введем дополнительный член второго порядка малости, пропорциональный третьей производной по пространственной переменной:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\hat{\varphi}_i-\varphi_i}{\tau}+\frac{\varphi_{i-1}-\breve{\varphi}_{i-1}}{\tau}\right)+c\,\frac{\varphi_i-\varphi_{i-1}}{h_i}=$$
$$=\frac{c}{h_i}\left[\frac{\mu_i}{\hbar_{i+1}}\left(\frac{\varphi_{i+1}-\varphi_i}{h_{i+1}}-\frac{\varphi_i-\varphi_{i-1}}{h_i}\right)-\frac{\mu_{i-1}}{\hbar_i}\left(\frac{\varphi_i-\varphi_{i-1}}{h_i}-\frac{\varphi_{i-1}-\varphi_{i-2}}{h_{i-1}}\right)\right], \tag{4}$$

где $\hbar_i = 0.5\left(h_i + h_{i-1}\right)$;

и

$$\mu_i = \varepsilon\left(h_i h_i - 3c\tau\,\hbar_i + 2c^2\tau^2\right), \tag{5}$$

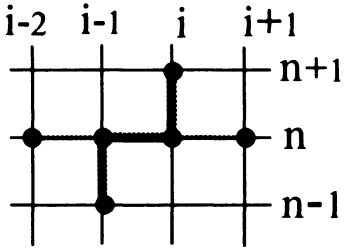

Рис.1. Шаблон схемы (4).

который можно интерпретировать как искусственное поверхностное натяжение. Разностную схему (4) можно при этом рассматривать как дискретный аналог линеаризованного уравнения Кортевега - де Фриса [5]. На рис.1 изображен расширенный шаблон, на котором определена схема (4).

Дисперсионные свойства схемы (4) существенным образом зависят от параметра ε. Оптимальное значение параметра ε будем искать исходя из требования достижения максимальной «дальнобойности» схемы (4) на конкретной модельной задаче, описанной в [1].

Для исследования транспортных свойств схемы «кабаре» на неравномерных пространственных сетках в [1] была выбрана случайная последовательность длин расчетных ячеек, распределенная по нормальному закону с заданным отношением размеров максимальной и минимальной ячеек, равным трем. На рис.2 приведена гистограмма длин этих ячеек (всего 39 элементов) и их взаимного расположения в расчетной области.

На определенной таким образом расчетной сетке решалась задача Коши с периодическими начальными условиями, заданными выражением:

$$\varphi_i = \exp\left[-\left(\frac{x_i-m_1}{\delta}\right)^2\right]+\exp\left[-\left(\frac{x_i-m_2}{\delta}\right)^2\right]; \tag{6}$$
$$x_1 = 0; \qquad x_{i+1} = x_i + h_i; \quad i = 1, \ldots, 40,$$

где

$$m_1 = L\,(15/40); \quad m_2 = L(25/40); \quad L = \max\left(x_i\right); \ \delta = L/12.6\,.$$

Вид начального распределения на описанной выше сетке приведен на рис.3. Видно, что его значения заметно отличны от нуля только на половине длины области определения, что составляет около 20 ячеек. При этом для описания таких четко идентифицируемых особенностей начального распределения как «горб» или «впадина» используются примерно по 10 ячеек. Указанный размер в 20 ячеек, представляющий собой характерный масштаб задачи, будем называть «калибром» начального распределения.

Приведенные в [1] расчеты данной задачи по линейным разностным схемам « уголок», «крест», а также схеме Лакса-Вендроффа показали, что при транспортировке начального распределения (6) всего на 2-3 калибра качество результата перестает быть удовлетворитель-

ным. Расчеты, выполненные по схеме «кабаре» (2), демонстрируют приемлемое качество результата на расстояниях в 50 - 60 калибров. Общая формулировка задачи поиска оптимального значения параметра ε состоит в том, чтобы перенести начальный профиль (6) без существенных искажений как можно дальше. При всей нечеткости такой постановки и расплывчатости понятия существенных искажений, она, как мы увидим далее, приводит к вполне конструктивному методу определения параметра ε.

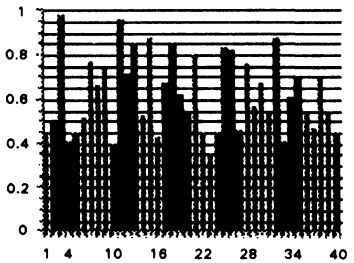

Рис.2 Гистограмма длин расчетных ячеек и их взаимного расположения.

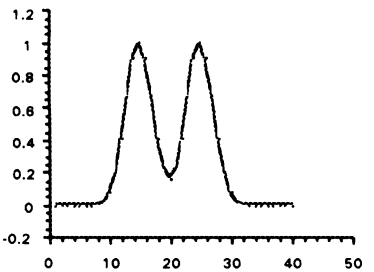

Рис.3 График функции (6) на нерегулярной расчетной сетке.

2. Оптимизация дисперсионной поверхности. Исследуем влияние параметра ε на форму дисперсионной поверхности [1] схемы (2). Для этого перейдем на равномерную сетку, запишем уравнение (4) в безразмерном виде

$$\begin{aligned}&\hat{\varphi}_i - \breve{\varphi}_{i-1} - (1-2r)(\varphi_i - \varphi_{i-1}) = \\ &= \mu\, r\left[(\varphi_{i+1} - 2\varphi_i + \varphi_{i-1}) - (\varphi_i - 2\varphi_{i-1} + \varphi_{i-2})\right],\end{aligned} \tag{4'}$$

где

$$\mu = \varepsilon\,(1-r)(1-2r)\,; \quad r = c\tau/h\,,$$

и будем искать его общее решение в виде суперпозиции частных решений - бегущих волн: $\varphi_j^{(n)} = e^{i[\omega\tau n - kh(j-1)]}$. Полагая $q = e^{i\omega\tau n}$, приходим к квадратичному характеристическому уравнению

$$q_k^2 - q_k\left(1 - e^{ikh}\right)\left[(1-2r) - 8\mu\, r\left(1 - \cos(kh)\right)\right] - e^{ikh} = 0\,. \tag{7}$$

Корни этого уравнения являются функциями «приведенного волнового числа» kh, принимающего значения от нуля до 2π, числа Куранта r и параметра регуляризации ε :

$$q_1(kh, r, \varepsilon) = -b/2 + \sqrt{D}\,; \qquad q_2(kh, r, \varepsilon) = -b/2 - \sqrt{D}\,,$$

где

$$b = -\left(1 - e^{ikh}\right)\cdot\left[(1-2r) - 8\mu\, r\left(1 - \cos(kh)\right)\right]; \quad D = b^2/4 + e^{ikh}.$$

Численные исследования поведения корней уравнения (7) показывают, что при

$$r \in [0,\ 1]\,, \quad \varepsilon \in [-2,\ 0.29] \tag{8}$$

их значения в комплексной плоскости лежат на дуге единичной окружности, т. е.

$$\left| q_1(kh,\ r,\ \varepsilon\ ) \right| = 1\ ;\ \left| q_2(kh,\ r,\ \varepsilon\ ) \right| = 1\ ;\ kh \in \left[0,\ 2\pi\right]. \tag{9}$$

Другими словами, при условиях (8) схема (4′) является бездиссипативной и устойчивой. Оптимальное значение параметра ε следует искать в интервале от –2 до 0.29.

Исследуем влияние параметра ε на форму дисперсионной поверхности [1] уравнения (4′).

Учитывая, что

$$q_1(kh,\ r,\ \varepsilon\ ) = e^{i\omega_1(kh,r,\varepsilon\ )\tau};\qquad q_2(kh,\ r,\ \varepsilon\ ) = e^{i\omega_2(kh,r,\varepsilon\ )\tau},$$

находим:

$$\omega_1(kh,r,\varepsilon\ )\tau = \mathrm{arctg}\ \left[\mathrm{Im}(q_1)\ /\mathrm{Re}(q_1)\right];$$
$$\omega_2(kh,r,\varepsilon\ )\tau = \mathrm{arctg}\ \left[\mathrm{Im}(q_2)\ /\mathrm{Re}(q_2)\right];$$

откуда следует, что дисперсионные свойства соответствующих корней определяются выражениями

$$\gamma_1(kh,r,\varepsilon\ ) = \frac{\omega_1}{ck} = \frac{1}{rkh}\mathrm{arctg}\ \left[\mathrm{Im}(q_1)\ /\mathrm{Re}(q_1)\right];$$
$$\gamma_2(kh,r,\varepsilon\ ) = \frac{\omega_2}{ck} = \frac{1}{rkh}\mathrm{arctg}\ \left[\mathrm{Im}(q_2)\ /\mathrm{Re}(q_2)\right].$$

Как отмечалось в [1], вычисление значения функции на втором временном слое (дополнительного начального условия) по разностной схеме «уголок» (3) при гладких начальных данных делает влияние второго корня на общее решение уравнения (4′) пренебрежимо малым, поэтому нас будут интересовать дисперсионные свойства только первого корня, т.е. поведение поверхности $\gamma_1(kh,r\ )$ как функции параметра ε. Степень отклонения этой поверхности от единицы характеризует несовершенство схемы.

Исследование дисперсионной поверхности $\gamma_1(kh,r\ )$ проводилось численно с помощью программы Mathematica, Wolfram Research, Inc. Оптимизация параметра ε осуществлялась по максимальному отклонению дисперсионной поверхности от единицы (в норме C) на различных подобластях плоскости (r, kh).

На рис.4,5 изображена форма дисперсионной поверхности первого корня при ε=0 (до оптимизации) и ε=0.24 (после оптимизации), при оптимизации ε в области G1:$\{\ r \in \left[0.5,\ 1\right],\ kh \in \left[-\pi,\ \pi\ \right]\ \}$.

На рис.6,7 приведены начальная и конечная формы дисперсионной поверхности при ее оптимизации в норме C по области G2: $\{\ r \in \left[1/3,\ 1\right],\ kh \in \left[-\pi,\ \pi\ \right]\ \}$. Оптимум в этом случае достигается при ε=0.16.

Рис.8,9 представляют результаты оптимизации на области G3:$\{\ r \in \left[1/3,\ 1\right],$ $kh \in [-\pi/3,\ \pi/3]\}$. Наименьшее отклонение от единицы имеет место при ε=0.08.

Расчеты по схеме (4) переноса начального профиля (6) на описанной ранее неравномерной сетке показали, что наилучший результат достигается в последнем случае, т.е. при ε=0.08. На рис.10-13 приведен вид переносимой функции при ее трансляции на L начальных калибров.

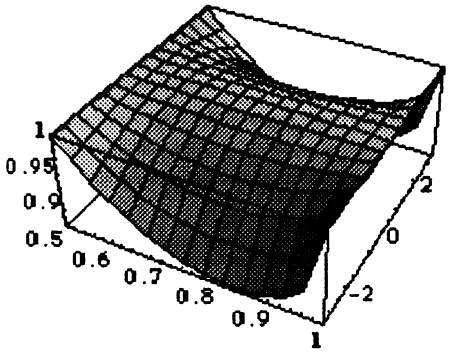

Рис.4. Дисперсионная поверхность в области G1:{ $r \in [0.5,\ 1]$, $kh \in [-\pi,\ \pi]$ } до оптимизации. Δ=0.15. (Δ - максимальное отклонение от единицы).

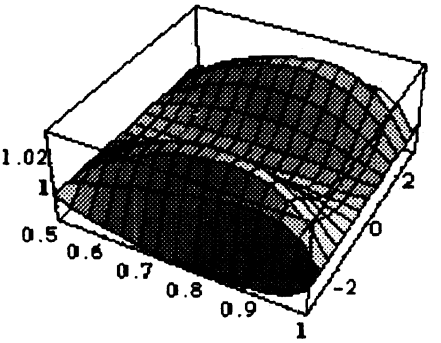

Рис.5. Дисперсионная поверхность в области G1:{ $r \in [0.5,\ 1]$, $kh \in [-\pi,\ \pi]$ } после оптимизации. Δ =0.02, ε=0.24.

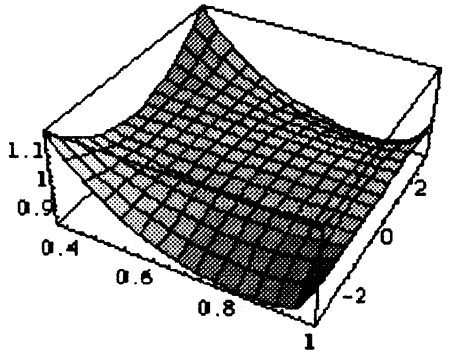

Рис.6. Дисперсионная поверхность в области G2:{ $r \in [1/3,\ 1]$, $kh \in [-\pi,\ \pi]$ } до оптимизации. Δ =0.15.

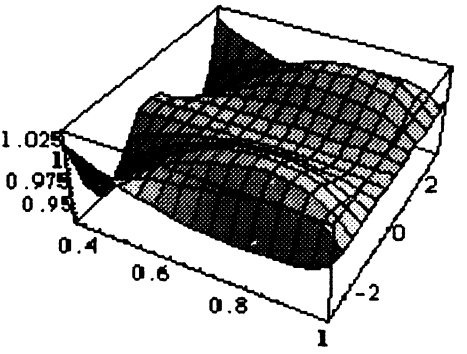

Рис.7. Дисперсионная поверхность в области G2:{ $r \in [1/3,\ 1]$, $kh \in [-\pi,\ \pi]$ } после оптимизации. Δ =0.05, ε=0.16.

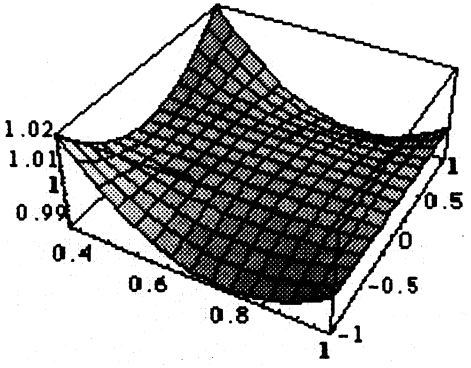

Рис.8. Дисперсионная поверхность в G3:{ $r \in [1/3,\ 1]$, $kh \in [-\pi/3,\ \pi/3]$ } до оптимизации. Δ =0.02.

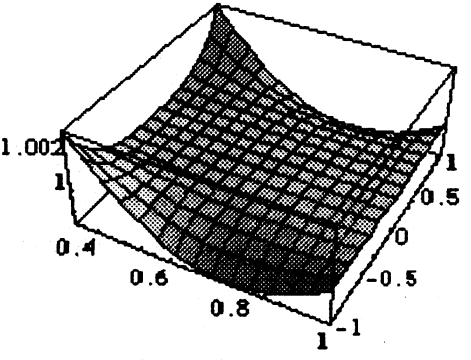

Рис.9. Дисперсионная поверхность в G3:{ $r \in [1/3,\ 1]$, $kh \in [-\pi/3,\ \pi/3]$ } после оптимизации. Δ =0.002, ε=0.08.

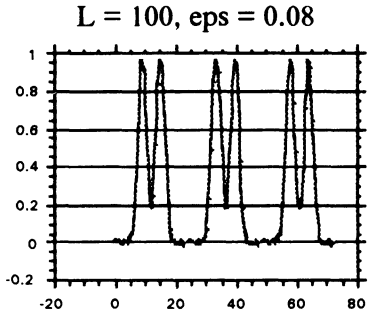

Рис.10

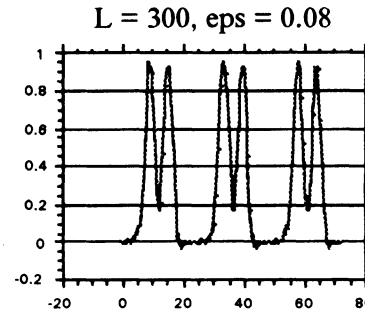

Рис.11

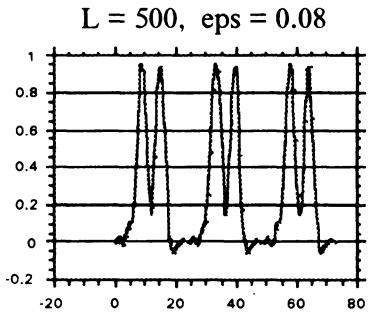

Рис.12

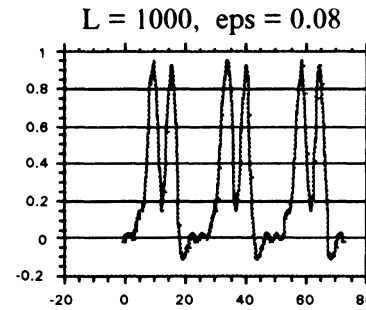

Рис.13

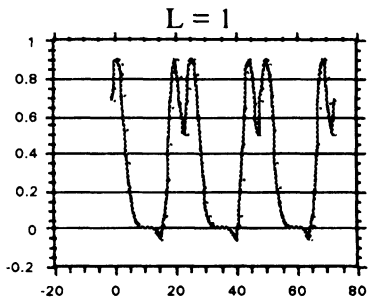

Рис.14. Результаты расчетов по схеме Лакса-Вендроффа на расстоянии в один начальный калибр.

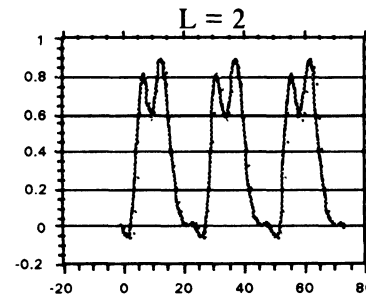

Рис. 15. Результаты расчетов по схеме Лакса-Вендроффа на расстоянии в два начальных калибра.

Рис.16-17 демонстрируют, что схема (4) при оптимальном в области G3 значении параметра ε по «дальнобойности» на три порядка превосходит классическую линейную схему Лакса - Вендроффа (рис. 14-15) и схему «крест» (рис.18-19) .

Из сравнения данных, приведенных на рис.4-9, видно, что наиболее существенная оптимизация достигнута на области G3. При оптимальном для этой области значении параметра ε достигается и наибольшая «дальнобойность» схемы (4). Такое совпадение не является случайным и объясняется тем, что начальное распределение (6) является достаточно гладким, и в

нем практически отсутствуют гармоники с приведенными волновыми числами kh из интервала $[\pi/3, \pi]$.

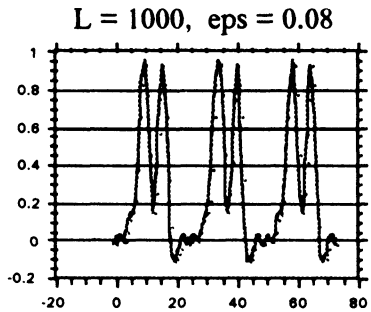

Рис.16. Результаты расчетов по оптимизированной схеме «кабаре» на расстоянии в 1000 начальных калибров.

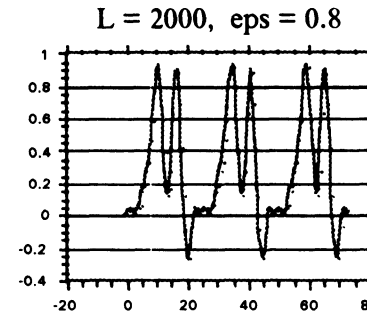

Рис.17. Результаты расчетов по оптимизированной схеме «кабаре» на расстоянии в 2000 начальных калибров

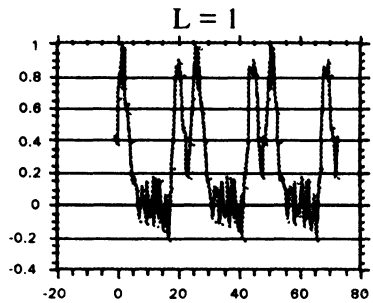

Рис.18. Результаты расчетов по схеме «крест» на расстоянии в один начальный калибр.

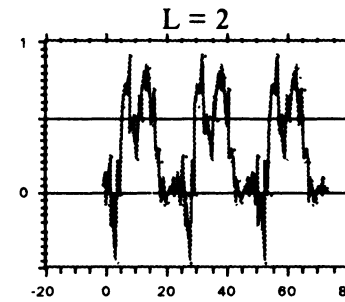

Рис.19. Результаты расчетов по схеме «крест» на расстоянии в два начальных калибра.

Таким образом, оптимизация параметра ε в схеме (4) по поведению дисперсионной поверхности первого корня в диапазоне чисел Куранта, соответствующем их разбросу на используемой нерегулярной расчетной сетке и в диапазоне волновых чисел, соответствующем области локализации фурье-образа начальной функции (6), позволяет на два порядка улучшить транспортные свойства исходной схемы и довести их до рекордного на настоящий момент уровня.

3. Добавочный квадратичный закон сохранения. Хорошо известно, что уравнение (1) обладает бесконечным количеством законов сохранения [7]. При переходе от дифференциальной задачи к сеточной их число уменьшается, как правило, до одного — закона сохранения самой переносимой величины.

Схемы, для которых справедлив закон сохранения переносимой величины, называются консервативными [2]. Свойство консервативности, обычно закладываемое на этапе построения разностной схемы, является чрезвычайно полезным при расчетах разрывных течений.

Любой другой закон сохранения, если он также имеет место для разностной задачи, свидетельствует о наличии у схемы какой-либо явной или скрытой симметрии, положительно влияющей на качество получаемого решения. Консервативные схемы, для которых справедлив закон сохранения квадрата переносимой величины, называются полностью консервативными [3].

В [1] показано, что разностная схема «кабаре» (2) является полностью консервативной. Покажем, что схема (2) обладает еще одним квадратичным законом сохранения.

Записывая уравнение (2) в безразмерной форме

$$\left(\hat{\varphi}_i - \varphi_i\right) + \left(\varphi_{i-1} - \breve{\varphi}_{i-1}\right) + 2\, r_i \left(\varphi_i - \varphi_{i-1}\right) = 0 \;\; ; \;\; r_i = c\tau / h_i \tag{2'}$$

и умножая его на выражение

$$\Im = \left(\hat{\varphi}_i - \varphi_i\right) - \left(\varphi_{i-1} - \breve{\varphi}_{i-1}\right)$$

получаем

$$\left(\hat{\varphi}_i - \varphi_i\right)^2 - \left(\varphi_{i-1} - \breve{\varphi}_{i-1}\right)^2 + 2r_i\, \Im \left(\varphi_i - \varphi_{i-1}\right) = 0\,. \tag{10}$$

Учитывая легко проверяемое тождество

$$\begin{aligned}&\left(\varphi_i - \varphi_{i-1}\right) = \\ &\quad = 0.5 \cdot \left\{\left[\left(\hat{\varphi}_i - \varphi_{i-1}\right) + \left(\varphi_i - \breve{\varphi}_{i-1}\right)\right] - \left[\left(\hat{\varphi}_i - \varphi_i\right) + \left(\varphi_{i-1} - \breve{\varphi}_{i-1}\right)\right]\right\}\end{aligned} \tag{11}$$

и вводя обозначение

$$\Im^* = \left(\hat{\varphi}_i - \varphi_{i-1}\right) - \left(\varphi_i - \breve{\varphi}_{i-1}\right) \equiv \Im,$$

представим последний член в (10) как

$$\begin{aligned}&2r_i\, \Im \left(\varphi_i - \varphi_{i-1}\right) = \\ &\quad = r_i \left\{\Im^* \left[\left(\hat{\varphi}_i - \varphi_{i-1}\right) + \left(\varphi_i - \breve{\varphi}_{i-1}\right)\right] - \Im \left[\left(\hat{\varphi}_i - \varphi_i\right) + \left(\varphi_{i-1} - \breve{\varphi}_{i-1}\right)\right]\right\} = \\ &\quad = r_i \left[\left(\hat{\varphi}_i - \varphi_{i-1}\right)^2 - \left(\varphi_i - \breve{\varphi}_{i-1}\right)^2 - \left(\hat{\varphi}_i - \varphi_i\right)^2 + \left(\varphi_{i-1} - \breve{\varphi}_{i-1}\right)^2\right].\end{aligned}$$

Это дает возможность привести (10) к виду

$$\hat{E}^{+}_{i-1/2} = E^{-}_{i-1/2}, \tag{10'}$$

где

$$\hat{E}^{+}_{i-1/2} = r_i \left(\hat{\varphi}_i - \varphi_{i-1}\right)^2 + \left(1 - r_i\right) \cdot \left(\hat{\varphi}_i - \varphi_i\right)^2,$$

$$E^{-}_{i-1/2} = r_i \left(\varphi_i - \breve{\varphi}_{i-1}\right)^2 + \left(1 - r_i\right) \cdot \left(\varphi_{i-1} - \breve{\varphi}_{i-1}\right)^2.$$

Просуммируем соотношение (10′) по всем временным слоям из области определения разностной задачи и разделим на (1–r). Это приводит к интегральному уравнению баланса для пространственной ячейки с номером i:

$$^{-}\mathrm{E}^{m}_{i-1/2} - {}^{+}\mathrm{E}^{1}_{i-1/2} = F_i - F_{i-1}\,, \tag{12}$$

где

$$F_i = \sum_{n=1}^{m} \left(\varphi_i^{n} - \varphi_i^{n-1}\right)^2, \tag{13}$$

$$
\begin{aligned}
{}^{-}E^{m}_{i-1/2} &= \left[\left(\frac{r_i}{1-r_i}\right)\cdot\left(\varphi^{m}_{i}-\varphi^{m-1}_{i-1}\right)^2+\left(\varphi^{m}_{i-1}-\varphi^{m-1}_{i-1}\right)^2\right],\\
{}^{+}E^{1}_{i-1/2} &= \left[\left(\frac{r_i}{1-r_i}\right)\cdot\left(\varphi^{1}_{i}-\varphi^{0}_{i-1}\right)^2+\left(\varphi^{1}_{i}-\varphi^{0}_{i}\right)^2\right].
\end{aligned}
\tag{14}
$$

Суммируя соотношение (12) по всем пространственным ячейкам, окончательно получаем:

$$F_1 + \Phi_1 = F_N + \Phi_m, \tag{15}$$

$$\Phi_m = \sum_{i=2}^{N} {}^{-}E^{m}_{i-1/2}\ ; \qquad \Phi_1 = \sum_{i=2}^{N} {}^{+}E^{1}_{i-1/2}. \tag{16}$$

Левая часть (15) при ($0<r<1$) представляет собой неотрицательно определенную квадратичную форму по границам, на которых задаются граничные и начальные условия, правая часть — по границам, на которые приходят характеристики.

4. Однопараметрическое семейство квадратичных законов сохранения. В [1] показано, что для схемы (1) выполняется также квадратичный закон сохранения в форме:

$$F_1^* + \Phi_1^* = F_N^* + \Phi_m^*, \tag{17}$$

где

$$F_1^* = \sum_{n=1}^{m}\left(\varphi^{n}_{1}+\varphi^{n-1}_{1}\right)^2\ ; \qquad F_N^* = \sum_{n=1}^{m}\left(\varphi^{n}_{N}+\varphi^{n-1}_{N}\right)^2, \tag{18}$$

$$
\begin{aligned}
\Phi_1^* &= \sum_{i=2}^{N}\left[\left(\frac{1-r_i}{r_i}\right)\cdot\left(\varphi^{1}_{i}+\varphi^{0}_{i-1}\right)^2+\left(\varphi^{1}_{i}+\varphi^{0}_{i}\right)^2\right],\\
\Phi_m^* &= \sum_{i=2}^{N}\left[\left(\frac{1-r_i}{r_i}\right)\cdot\left(\varphi^{m}_{i}+\varphi^{m-1}_{i-1}\right)^2+\left(\varphi^{m}_{i-1}+\varphi^{m-1}_{i-1}\right)^2\right].
\end{aligned}
\tag{19}
$$

Существование двух несводящихся друг к другу квадратичных законов сохранения позволяет построить их однопараметрическое семейство:

$$F_1^\sigma + \Phi_1^\sigma = F_N^\sigma + \Phi_m^\sigma\ ; \qquad \sigma\in[0,\ 1], \tag{20}$$

$$F^{\sigma}_{1,N} = \sigma\ F^{*}_{1,N} + (1-\sigma)\ F_{1,N}\ ; \quad \Phi^{\sigma}_{1,m} = \sigma\ \Phi^{\sigma}_{1,m} + (1-\sigma)\ \Phi_{1,m}. \tag{21}$$

Таким образом, схема (2) на нерегулярных пространственных сетках имеет бесконечно много квадратичных законов сохранения.

5. Диссипатор Паниковского. При задании разрывных начальных данных на нулевом слое и использовании схемы «уголок» (3) для вычисления начальных данных на первом слое по времени, начинает проявляться существование второго корня характеристического уравнения (7) с нефизичными дисперсионными свойствами. В расчетах это приводит к появлению малоамплитудной ряби, зашумляющей истинное решение.

Для подавления незначительных осцилляций указанной природы на начальном этапе решения задачи желательно введение в схему «кабаре» строго дозированной искусственной вязкости. Покажем, как небольшая модификация схемы, простейшим образом реализуемая на

практике и не приводящая к расширению сеточного шаблона исходной схемы (2), может изменить ее диссипативные свойства в нужном направлении.

Запишем модифицированную схему в виде

$$\frac{1}{2}\left[(1+\xi)\frac{\hat{\varphi}_i-\varphi_i}{\tau}+(1-\xi)\frac{\varphi_{i-1}-\breve{\varphi}_{i-1}}{\tau}\right]+c\,\frac{\varphi_i-\varphi_{i-1}}{h_i}=0\,. \tag{22}$$

Модификация заключается в удлинении одной «ноги» схемы и укорочении другой на величину ξ. Такая интерпретация и возникающие при этом ассоциации с известным литературным героем дали повод назвать указанный алгоритмический прием «диссипатором Паниковского».

Убедимся, что диссипатор Паниковского при $\xi>0$ действительно обладает диссипативными свойствами.

После очевидного преобразования (22) к форме

$$\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\hat{\varphi}_i-\varphi_i}{\tau}+\frac{\varphi_{i-1}-\breve{\varphi}_{i-1}}{\tau}\right)+c\,\frac{\varphi_i-\varphi_{i-1}}{h_i}=-\frac{\xi}{2}\cdot\left(\frac{\hat{\varphi}_i-\varphi_i}{\tau}-\frac{\varphi_{i-1}-\breve{\varphi}_{i-1}}{\tau}\right) \tag{23}$$

и умножения последнего выражения на

$$\left(\frac{\hat{\varphi}_i-\varphi_i}{\tau}-\frac{\varphi_{i-1}-\breve{\varphi}_{i-1}}{\tau}\right)$$

получаем:

$$\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\hat{\varphi}_i-\varphi_i}{\tau}\right)^2-\left(\frac{\varphi_{i-1}-\breve{\varphi}_{i-1}}{\tau}\right)^2\right]+c\,\frac{\varphi_i-\varphi_{i-1}}{h_i}\cdot\left(\frac{\hat{\varphi}_i-\varphi_i}{\tau}-\frac{\varphi_{i-1}-\breve{\varphi}_{i-1}}{\tau}\right)=$$

$$=-\frac{\xi}{2}\cdot\left(\frac{\hat{\varphi}_i-\varphi_i}{\tau}-\frac{\varphi_{i-1}-\breve{\varphi}_{i-1}}{\tau}\right)^2,$$

откуда, принимая во внимание представление (11), находим

$$(1-r_i)\left[\left(\frac{\hat{\varphi}_i-\varphi_i}{\tau}\right)^2-\left(\frac{\varphi_{i-1}-\breve{\varphi}_{i-1}}{\tau}\right)^2\right]+r_i\cdot\left[\left(\frac{\hat{\varphi}_i-\varphi_{i-1}}{\tau}\right)^2-\left(\frac{\varphi_i-\breve{\varphi}_{i-1}}{\tau}\right)^2\right]=$$

$$=-\xi\cdot\left(\frac{\hat{\varphi}_i-\varphi_i}{\tau}-\frac{\varphi_{i-1}-\breve{\varphi}_{i-1}}{\tau}\right)^2.$$

Суммируя последнее выражение по всей сеточной области, приходим к соотношению:

$$\left(\tilde{F}_N+\tilde{\Phi}_m\right)-\left(\tilde{F}_1+\tilde{\Phi}_1\right)=-\xi S \tag{24}$$

где

$$\tilde{F}_1=\sum_{n=1}^{m}\left(\frac{\varphi_1^n-\varphi_1^{n-1}}{\tau}\right)^2=\tau^2\cdot F_1\,;\qquad \tilde{F}_N=\sum_{n=1}^{m}\left(\frac{\varphi_N^n-\varphi_N^{n-1}}{\tau}\right)^2=\tau^2\cdot F_N \tag{25}$$

$$\tilde{\Phi}_m = \sum_{i=2}^{N}\left[\left(\frac{r_i}{1-r_i}\right)\cdot\left(\frac{\varphi_i^m-\varphi_{i-1}^{m-1}}{\tau}\right)^2+\left(\frac{\varphi_{i-1}^m-\varphi_{i-1}^{m-1}}{\tau}\right)^2\right] = \tau^2\Phi_m,$$

$$\tilde{\Phi}_1^{\cdot} = \sum_{i=2}^{N}\left[\left(\frac{r_i}{1-r_i}\right)\cdot\left(\frac{\varphi_i^1-\varphi_{i-1}^0}{\tau}\right)^2+\left(\frac{\varphi_i^1-\varphi_i^0}{\tau}\right)^2\right] = \tau^2\Phi_1, \tag{26}$$

$$S = \sum_{n=1}^{m-1}\sum_{i=2}^{N}\left(\frac{\varphi_i^{n+1}-\varphi_i^n}{\tau}-\frac{\varphi_{i-1}^n-\varphi_{i-1}^{n-1}}{\tau}\right)^2\Big/(1-r_i). \tag{27}$$

Из (24) следует, что разность между неотрицательно определенной при ($0<r<1$) квадратичной формой $\left(\tilde{F}_N+\tilde{\Phi}_m\right)$, заданной на участках границы области, куда приходят характеристики, и неотрицательно определенной при ($0<r<1$) квадратичной формой от начальных данных и краевых условий $\left(\tilde{F}_1+\tilde{\Phi}_1\right)$ при $\xi>0$ убывает. Таким образом, диссипатор Паниковского приводит к диссипации квадрата производной по времени от вычисляемой функции и тем самым оказывает диссипирующее влияние на саму функцию.

Соотношение (24) проливает также свет на происхождение добавочного квадратичного закона сохранения для схемы (2). Соотношение (15) является разностным аналогом дифференциального закона сохранения, следующего из эквивалентности уравнения (1) дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^2\right]+c\,\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^2\right] = 0. \tag{28}$$

Диссипатор Паниковского имеет первый порядок малости относительно шагов разностной сетки. Это следует из того, что временную разность в (22) можно представить в виде

$$\left(\frac{\hat{\varphi}_i-\varphi_i}{\tau}-\frac{\varphi_{i-1}-\breve{\varphi}_{i-1}}{\tau}\right) =$$

$$= \tau\left\{\frac{1}{\tau}\cdot\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\hat{\varphi}_i-\varphi_i}{\tau}+\frac{\hat{\varphi}_{i-1}-\varphi_{i-1}}{\tau}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{\varphi_i-\breve{\varphi}_i}{\tau}+\frac{\varphi_{i-1}-\breve{\varphi}_{i-1}}{\tau}\right)\right]\right\}+$$

$$+\ h\left\{\frac{1}{h}\cdot\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\hat{\varphi}_i-\varphi_i}{\tau}+\frac{\varphi_i-\breve{\varphi}_i}{\tau}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{\hat{\varphi}_{i-1}-\varphi_{i-1}}{\tau}+\frac{\varphi_{i-1}-\breve{\varphi}_{i-1}}{\tau}\right)\right]\right\} =$$

$$= \tau\cdot\left\{\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)+\frac{h}{\tau}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)\right\}+O\left(\tau^2+h^2\right).$$

6. Анализ диссипативных поверхностей. Проанализируем, какое влияние оказывает параметр ξ на дисперсионную и диссипативную поверхности схемы «кабаре» с диссипатором Паниковского (22).

При постоянных шагах расчетной сетки характеристическое уравнение схемы (22) имеет вид

$$(1+\xi)\,q_k^2-q_k\left[(1-2r)\cdot\left(1-e^{ikh}\right)+\xi\left(1+e^{ikh}\right)\right]-(1-\xi)\,e^{ikh} = 0. \tag{29}$$

Значения корней этого уравнения определяются выражениями

$$q_1(kh,r,\xi) = \left(-b+\sqrt{D}\right)/2a \;; \qquad q_2(kh,r,\xi) = \left(-b-\sqrt{D}\right)/2a \;;$$

$$b = -\left[(1-2r)\cdot\left(1-e^{ikh}\right)+\xi\left(1+e^{ikh}\right)\right]; \quad a = (1+\xi)\;; \quad D = b^2+4a(1-\xi)e^{ikh} \;.$$

Диссипативные характеристики схемы (22) описываются поведением диссипативных поверхностей

$$\lambda_1(kh,r,\xi) = |\,q_1(kh,r,\xi)\,|; \quad \lambda_2(kh,r)\lambda_2(kh,r,\xi) = |\,q_2(kh,r,\xi)\,|\;;$$

$$kh \in [-\pi,\ \pi]\;; \quad r \in [0,\ 1]\;.$$

На рис.20, 21 приведены изображения диссипативных поверхностей первого корня при ξ=0.02 и ξ=0.04 соответственно. Видно, что степень их отклонения от единицы пропорциональна квадрату приведенного волнового числа kh и прямо пропорциональна коэффициенту ξ.

Совершенно иная картина (рис. 22,23) наблюдается для второго корня: максимальная диссипация здесь имеет место при малых волновых числах. При увеличении волновых чисел декремент затухания уменьшается по квадратичному закону, и его минимальное значение также оказывается пропорционально коэффициенту ξ. Декремент затухания второго корня всюду существенно больше декремента затухания первого.

Это говорит о том, что диссипатор Паниковского оказывает наиболее сильное влияние на паразитный корень, приводя к быстрому затуханию обусловленных его существованием и имеющих чисто вычислительную природу осцилляций. При этом содержательная часть решения, описываемая первым корнем характеристического уравнения, практически не диссипирует.

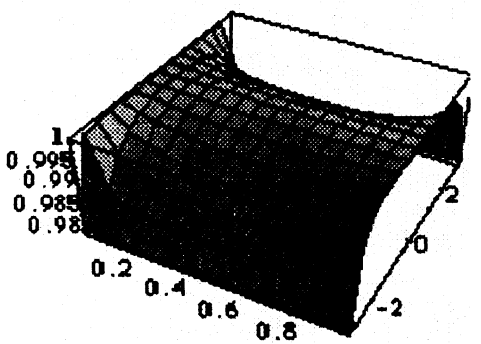

Рис.20. Диссипативная поверхность первого корня при ξ=0.02

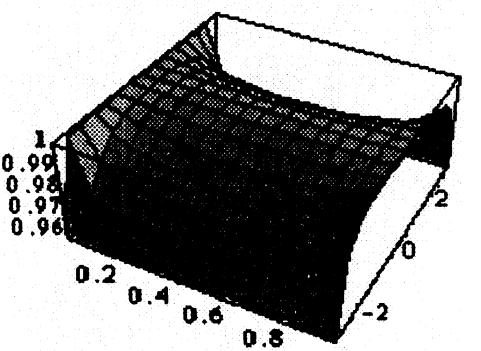

Рис.21. Диссипативная поверхность первого корня при ξ=0.04

Влияние диссипатора Паниковского на содержательную часть решения можно еще больше ослабить, вводя зависимость коэффициента ξ от числа Куранта:

$$\xi = \delta\,(1-r)(1-2r)^2\,. \tag{30}$$

Коэффициент (30), который далее мы будем называть «мягким», оставляет без изменения дис

сипативные и дисперсионные свойства схемы в области «каналов высокой точности» [1] исходной схемы, т.е. при r=1 и r=0.5.

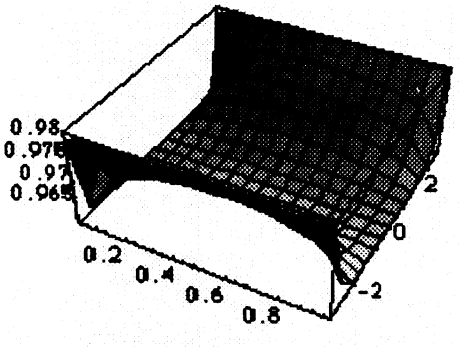

Рис.22. Диссипативная поверхность второго корня при ξ=0.02

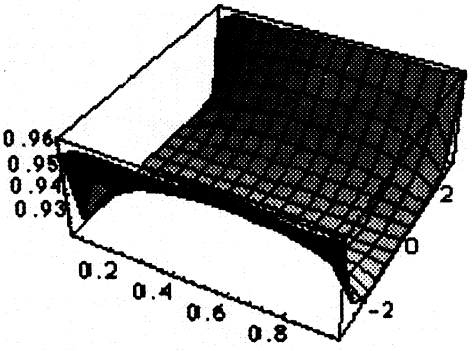

Рис.23. Диссипативная поверхность второго корня при ξ=0.04

На рис.24, 25 изображены диссипативные поверхности первого корня характеристического уравнения с «мягким» коэффициентом при диссипаторе Паниковского. Обращает на себя внимание то обстоятельство, что наибольшей диссипации подвержены именно те области, в которых дисперсионная поверхность имеет особенность (рис. 28). То же самое можно сказать и о диссипативной поверхности второго корня (рис. 26,27). Вид дисперсионной поверхности второго корня приведен в [1].

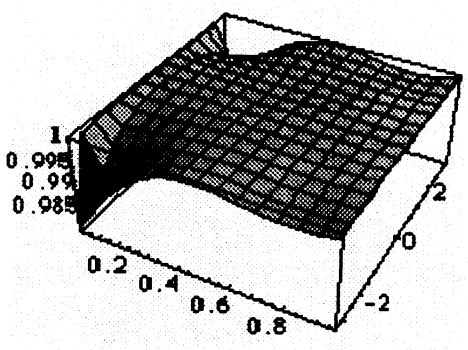

Рис.24. Диссипативная поверхность первого корня с «мягким» коэффициентом при диссипаторе Паниковского. (δ=0.02).

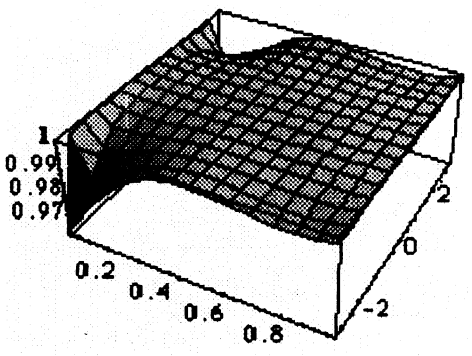

Рис.25. Диссипативная поверхность первого корня с «мягким» коэффициентом при диссипаторе Паниковского. (δ=0.04).

Следует отметить, что включение в схему «кабаре» диссипатора Паниковского изменяет в лучшую сторону также и ее дисперсионные свойства. Это иллюстрируют рис.28,29. Диссипатор Паниковского устраняет особенности дисперсионной поверхности первого корня, описанные в [1]. Для придания большей наглядности этому факту, на рис.29 представлен вид регуляризированной дисперсионной поверхности при δ=0.4. Аналогичная, правда менее ярко

выраженная картина наблюдается и при малых значениях параметра δ, представляющих реальный практический интерес.

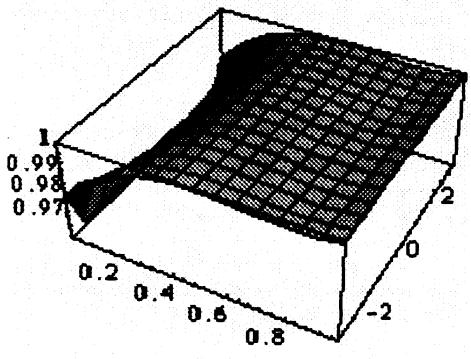

Рис.26. Диссипативная поверхность второго корня при «мягком» коэффициенте при диссипаторе Паниковского. (δ=0.02).

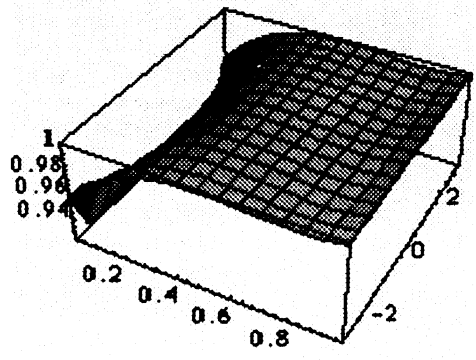

Рис.27. Диссипативная поверхность второго корня с «мягким» коэффициентом при диссипаторе Паниковского. (δ=0.04).

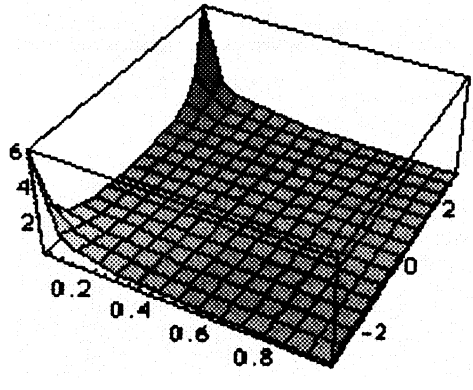

Рис.28. Дисперсионная поверхность первого корня исходной схемы «кабаре»

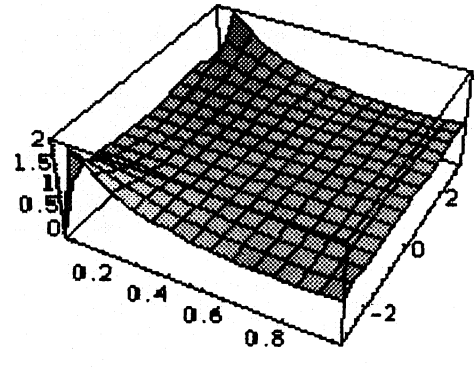

Рис.29. Дисперсионная поверхность первого корня с «мягким» коэффициентом при диссипаторе Паниковского. (δ=0.4).

Таким образом, диссипатор Паниковского не только «облагораживает» вид получаемых решений при разрывных начальных условиях, устраняя возникающие при их задании паразитные осцилляции, но также и улучшает дисперсионные свойства исходной схемы. Линейная зависимость декремента затухания от ξ (при представляющих практический интерес малых ξ) позволяет в каждом конкретном случае достаточно точно вычислять его величину, необходимую для достижения на заданном числе временных шагов желательного диссипативного эффекта.

При ξ=1 схема (22) вырождается в схему (3) — «уголок».

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 *Головизнин В.М., Самарский А.А.* Разностная аппроксимация конвективного переноса с пространственным расщеплением временной производной. Математическое моделирование. (1998, т.10, №1, с.86-100).
2. *Роуч П.* Вычислительная гидродинамика. – М.:Мир, 1980, 616с.
3. *Самарский А.А.* Теория разностных схем. – М.: Наука, 1983, с31-42.
4. *Самарский А.А., Попов Ю.П.* Разностные методы решения задач газовой динамики. – М.: Наука, 1980, 352с.
5. *Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н.* Системы квазилинейных уравнений. – М.: Наука, 1978, 688с.
6. *Lax P.D., Wendroff B.* Systems of conservation lows. Comm. Pure. Appl. Math., 1960, v.13, p.217-237.
7. *Калиткин Н.Н.* Численные методы. – М. Наука. 1978.

Поступила в редакцию 12.03.97.