МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

том 10 номер 1 год 1998

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ МЕТОДЫ И АЛГОРИТМЫ

РАЗНОСТНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ КОНВЕКТИВНОГО ПЕРЕНОСА С ПРОСТРАНСТВЕННЫМ РАСЩЕПЛЕНИЕМ ВРЕМЕННОЙ ПРОИЗВОДНОЙ

© *В.М.Головизнин, А.А.Самарский*

Институт проблем безопасного развития атомной энергетики, РАН
Интитут математического моделирования, РАН

Для модельного уравнения конвективного переноса с постоянными коэффициентами предложена новая трехслойная явная разностная схема с пространственным расщеплением временной производной и проведено ее всестороннее исследование. Показано, что новая схема, названная схемой «кабаре», имеет второй порядок аппроксимации, обладает свойством «транспортивности» [1], устойчива в диапазоне чисел Куранта от нуля до единицы, является точной при числах Куранта 0.5 и 1, и обладает хорошими дисперсионными свойствами.

FINITE DIFFERENCE APPROXIMATION OF CONVECTIVE TRANSPORT EQUATION WITH SPACE SPLITTING TIME DERIVATIVE

V.M.Goloviznin, A.A.Samarsky

IBRAE
Institute for Mathematical Modeling

Введение. При численном решении уравнений механики жидкости и газа качество получаемого решения сильно зависит от того, каким образом аппроксимированы члены, описывающие конвективный перенос. Ошибки аппроксимации, проявляющиеся в виде паразитной дисперсии и аппроксимационной вязкости. приводят не только к количественному, но и к качественному искажению получаемого решения. Практически все применяемые в реальных расчетах схемы способны транспортировать нетривиальные начальные распределения на расстояния, не превышающие двух-трех характерных масштабов их определения. Без особой натяжки можно сказать, что в настоящее время не видно реальных путей, на которых можно было бы ожидать качественного улучшения ситуации в данной области.

Ввиду большой практической значимости, проблема поиска новых направлений кардинального улучшения диссипативных и дисперсионных свойств для уравнений конвективного переноса является чрезвычайно актуальной, а соответствующая задача, с полным правом, может быть отнесена к разряду фундаментальных задач вычислительной гидродинамики. Не

имея возможности в рамках данной статьи привести сколь либо полный обзор работ на эту тему, укажем только на монографии [1,2], где такие попытки предпринимались.

Поиск новых подходов к решению этой задачи естественно проводить на примере простейшего одномерного линейного уравнения конвективного переноса с постоянными коэффициентами, аналитически полностью изученного, и сконцентрировавшего в себе все основные вычислительные трудности, возникающие при решении сеточных транспортных задач.

В настоящей работе для простейшего одномерного уравнения конвективного переноса предложена и подробно исследована новая базисная разностная схема, позволяющая более чем на порядок увеличить характерные масштабы сеточного переноса. Сама схема и приведшие к ней подходы позволяют проводить ее дальнейшие модификации и усовершенствования и дают основания надеяться на возможность ее обобщения на нерегулярные плоские и пространственные сетки.

1. Разностная схема «кабаре», порядок аппроксимации.

Рассмотрим следующую модельную задачу:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + c\frac{\partial\varphi}{\partial x} = 0; \quad t \in [0,T]; \quad x \in [0,2\pi];$$
$$c = \text{const} > 0; \quad \varphi(0,x) = f(x); \quad \varphi(t,0) = \psi(t). \tag{1}$$

Область определения покроем равномерной расчетной сеткой и аппроксимируем дифференциальную задачу разностной схемой:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\hat{\varphi}_i - \varphi_i}{\tau} + \frac{\varphi_{i-1} - \breve{\varphi}_{i-1}}{\tau}\right) + c\frac{\varphi_i - \varphi_{i-1}}{h} = 0;$$
$$\tau = t_{n+1} - t_n = \text{const}; \qquad i = 1,\ldots,N; \qquad h = 2\pi / (N-1). \tag{2}$$

где величины $\varphi, \hat{\varphi}, \breve{\varphi}$ относятся к текущему, последующему и предыдущему временным слоям соответственно.

Не останавливаясь на том, из каких соображений получена указанная схема, займемся исследованием ее свойств.

Схема (2) является трехслойной и требует задания начальных условий на двух временных слоях.

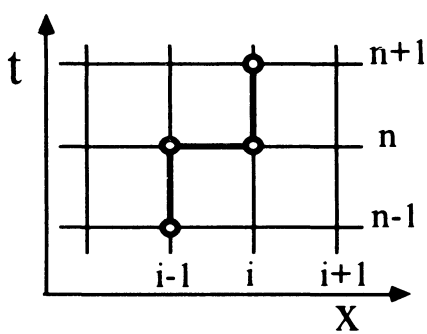

Рис.1. Сеточный шаблон, на котором определена схема «кабаре»

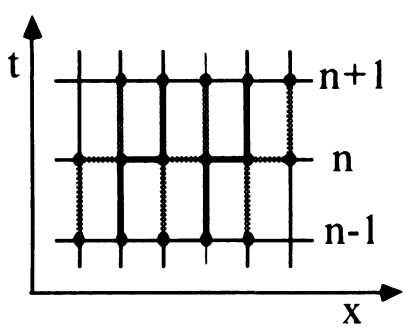

Рис.2. Последовательность сеточных шаблонов, составляющая «танцевальную группу».

Шаблон (рис.1), на котором определена схема (2), таков, что для нахождения решения во всех внутренних и граничных узлах расчетной сетки не возникает необходимости использовать узлы, лежащие за ее границами. Таким образом, область зависимости сеточного решения схемы (2) корректно отображает область зависимости дифференциальной задачи и в соответствии с терминологией, введенной в [1], схема (2) обладает свойством «транспортивности».

Разностная производная по времени в схеме (2) «расщеплена» на две половины, разнесенные на длину шага сетки по пространству. Последовательность шаблонов (рис.2), на которых определена схема (2), может вызывать ассоциации со специфическим танцем, поэтому в дальнейшем будем называть схему (2) схемой «кабаре», а соответствующий тип аппроксимации — «кабаре» аппроксимацией.

Схема «кабаре» антисимметрична относительно точки $((i\text{-}1/2)h, n\tau)$. Разлагая все входящие в (2) величины относительно этой точки в ряд Тейлора, получаем, что схема «кабаре» аппроксимирует уравнение (1) с порядком $O\left(\tau^2 + h^2\right)$.

2. Каналы высокой точности. Схему (2) можно записать в виде

$$\hat{\varphi}_i = (1-2r)(\varphi_i - \varphi_{i-1}) + \breve{\varphi}_{i-1}; \qquad r = c\tau/h, \tag{3}$$

откуда непосредственно следует, что при $r = 0.5$ схема «кабаре» является точной. При $r = 1$ выражение (3) примет вид

$$\hat{\varphi}_i = \varphi_{i-1} - (\varphi_i - \breve{\varphi}_{i-1}). \tag{3'}$$

Как уже отмечалось, схема (2) является трехслойной и требует задания начальных данных на двух первых слоях. Если в начальный момент при $r = 1$ они заданы точно, т.е. в виде

$$\varphi_i^{(1)} = f((i-1)h); \qquad i = 1,\ldots,N+1;$$
$$\varphi_1^{(2)} = \psi(\tau); \qquad \varphi_i^{(2)} = \varphi_{i-1}^{(1)}; \quad i = 2,\ldots,N,$$

то из выражения (3′) и закона математической индукции следует, что схема «кабаре» при $r = 1$ будет оставаться точной также и во все последующие моменты времени. Таким образом, схема (2) обладает уникальным свойством — она дает точное решение дифференциальной задачи (1) при двух различных числах Куранта.

Числа Куранта, при которых разностная аппроксимация уравнения переноса дает точное решение дифференциальной задачи, будем в дальнейшем называть «каналами высокой точности» разностной схемы. Таким образом, схема «кабаре», в отличие от других ранее известных схем [1]-[4], обладает двумя каналами высокой точности, один из которых, как будет показано ниже, лежит в середине ее области устойчивости.

3. Необходимые условия устойчивости схемы «кабаре» и ее диссипативные свойства. Будем искать частное решение, удовлетворяющее разностной схеме (2), в виде $\varphi_j^{(n)} = e^{i[\omega\tau n - kh(j-1)]}$; полагая $q = e^{i\omega\tau}$, приходим к квадратичному характеристическому уравнению:

$$q_k^2 - q_k\left(1 - e^{ikh}\right)(1-2r) - e^{ikh} = 0, \tag{4}$$

разрешая которое, находим:

$$q_{k,1} = -b/2 + \sqrt{D}; \qquad q_{k,2} = -b/2 - \sqrt{D};$$
$$b = -\left(1 - e^{ikh}\right)(1 - 2r); \quad d = -\ e^{ikh}; \quad D = b^2/4 - d. \tag{5}$$

Оба корня уравнения (4) являются комплексными и зависят как от числа Куранта r, так и от «приведенного волнового числа» kh, изменяющегося от нуля до 2π.

Предположим, для простоты, что вместо краевой задачи (1) мы решаем задачу Коши с периодическими начальными условиями, определенными на всей оси x. В этом случае полное решение по схеме (2) можно записать в виде

$$\varphi_j^{(n)} = \sum_{k=1}^{k=N-1} \left\{\alpha(kh)\cdot\left[q_1(kh,r)\right]^n + \beta(kh)\cdot\left[q_2(kh,r)\right]^n\right\}\cdot e^{-ikh(j-1)}, \tag{6}$$

где коэффициенты $\alpha(kh)$ и $\beta(kh)$ определяются по начальным данным, заданным на двух первых слоях расчетной сетки.

Из (6), в частности, следует, что при заданном начальном условии на первом слое можно доопределить значение сеточной функции на втором слое таким образом, что последующая временная эволюция решения разностного уравнения (2) будет определяться только каким-либо одним из найденных корней. Второй корень при этом будет оказывать влияние только на область устойчивости.

Естественно, что значения начальных данных на втором временном слое следует задавать так, чтобы исключить влияние на решение корня с худшими диссипативными и дисперсионными свойствами. Такой вывод остается справедливым и для начально–краевой задачи (2).

Исследуем поведение абсолютных величин корней характеристического уравнения (4) как функций числа Куранта r и приведенного волнового числа kh, которое в дальнейшем будем обозначать одной буквой ζ.

Представим дискриминант квадратного корня, входящего в (5), в виде

$$D = (2r-1)^2(1-e^{i\zeta})^2 + 4e^{i\zeta} = (2r-1)^2(1 - 2e^{i\zeta} + e^{2i\zeta}) + 4e^{i\zeta} =$$
$$= (2r-1)^2\left(1 - 2\cos\zeta - 2i\sin\zeta + \cos(2\zeta) + i\sin(2\zeta)\right) + 4\cos\zeta + 4i\sin\zeta =$$
$$= (2r-1)^2\left[2\cos\zeta(\cos\zeta - 1) + 2i\sin\zeta(\cos\zeta - 1)\right] + 4\cos\zeta + 4i\sin\zeta.$$

Отсюда находим:

$$\mathrm{Re}(D) = 2(2r-1)^2(\cos\zeta - 1)\cos\zeta + 4\cos\zeta = 2\cos\zeta\left[(2r-1)^2(\cos\zeta - 1) + 2\right],$$
$$\mathrm{Im}(D) = 2(2r-1)^2(\cos\zeta - 1)\sin\zeta + 4\sin\zeta = 2\sin\zeta\left[(2r-1)^2(\cos\zeta - 1) + 2\right].$$

Модуль квадратного корня принимает вид

$$|D| = \sqrt{\mathrm{Re}^2(D) + \mathrm{Im}^2(D)} = \sqrt{4(\cos^2\zeta + \sin^2\zeta)\left[(2r-1)^2(\cos\zeta - 1) + 2\right]^2} =$$
$$= 2\left|2 + (2r-1)^2(\cos\zeta - 1)\right| = 4\left|1 - (2r-1)^2\sin^2\frac{\zeta}{2}\right|.$$

Легко видеть, что при $0 \le r \le 1$ выражение под знаком модуля неотрицательно.

Значение фазы подкоренного комплексного выражения равно приведенному волновому числу, поскольку

$$\left.\begin{aligned}\cos\operatorname{Arg}(D) &= \frac{\operatorname{Re}(D)}{|D|} = \cos\zeta\\ \sin\operatorname{Arg}(D) &= \frac{\operatorname{Im}(D)}{|D|} = \sin\zeta\end{aligned}\right\} \Rightarrow \operatorname{Arg}(D) = \zeta.$$

Таким образом, комплексное значение квадратного корня в (5) равно

$$\sqrt{D} = \sqrt{|D|}\left(\cos\frac{\operatorname{Arg}(D)}{2} + \mathrm{i}\sin\frac{\operatorname{Arg}(D)}{2}\right) = 2\sqrt{\left|1-(2r-1)^2\sin^2\frac{\zeta}{2}\right|}\left(\cos\frac{\zeta}{2} + \mathrm{i}\sin\frac{\zeta}{2}\right).$$

Используя преобразование

$$1-\cos\zeta - \mathrm{i}\sin\zeta = 1-\left(1-2\sin^2\frac{\zeta}{2}\right) - 2\mathrm{i}\sin\frac{\zeta}{2}\cos\frac{\zeta}{2},$$

получаем:

$$\begin{cases}\operatorname{Re}(q_{k,1}) = (1-2r)\sin^2\dfrac{\zeta}{2} + \sqrt{\left|1-(1-2r)^2\sin^2\dfrac{\zeta}{2}\right|}\cos\dfrac{\zeta}{2},\\ \operatorname{Im}(q_{k,1}) = -(1-2r)\sin\dfrac{\zeta}{2}\cos\dfrac{\zeta}{2} + \sqrt{\left|1-(1-2r)^2\sin^2\dfrac{\zeta}{2}\right|}\sin\dfrac{\zeta}{2},\end{cases} \tag{7}$$

$$\begin{cases}\operatorname{Re}(q_{k,2}) = (1-2r)\sin^2\dfrac{\zeta}{2} - \sqrt{\left|1-(1-2r)^2\sin^2\dfrac{\zeta}{2}\right|}\cos\dfrac{\zeta}{2},\\ \operatorname{Im}(q_{k,2}) = -(1-2r)\sin\dfrac{\zeta}{2}\cos\dfrac{\zeta}{2} - \sqrt{\left|1-(1-2r)^2\sin^2\dfrac{\zeta}{2}\right|}\sin\dfrac{\zeta}{2}.\end{cases} \tag{8}$$

Вводя обозначение

$$\Psi = \left|1-(1-2r)^2\sin^2\frac{\zeta}{2}\right|,$$

находим

$$\operatorname{Re}^2(q_{k,1}) = (1-2r)^2\sin^4\frac{\zeta}{2} + 2(1-2r)\sin^2\frac{\zeta}{2}\cos\frac{\zeta}{2}\sqrt{\Psi} + \cos^2\frac{\zeta}{2}\Psi,$$

$$\operatorname{Im}^2(q_{k,1}) = (1-2r)^2\sin^2\frac{\zeta}{2}\cos^2\frac{\zeta}{2} - 2(1-2r)\sin^2\frac{\zeta}{2}\cos\frac{\zeta}{2}\sqrt{\Psi} + \sin^2\frac{\zeta}{2}\Psi,$$

откуда непосредственно следует, что

$$|q_{k,1}|^2 = \operatorname{Re}^2(q_{k,1}) + \operatorname{Im}^2(q_{k,1}) = (1-2r)^2\sin^2\frac{\zeta}{2} + \left|1-(1-2r)^2\sin^2\frac{\zeta}{2}\right| =$$

$$= \begin{cases}1 & \text{при} \quad (1-2r)^2\sin^2\dfrac{\zeta}{2} \le 1,\\ 2(1-2r)^2\sin^2\dfrac{\zeta}{2} + 1 & \text{при} \quad (1-2r)^2\sin^2\dfrac{\zeta}{2} > 1.\end{cases}$$

Для второго корня аналогично получаем:

$$\operatorname{Re}^2(q_{k,2}) = (1-2r)^2\sin^4\frac{\zeta}{2} - 2(1-2r)\sin^2\frac{\zeta}{2}\cos\frac{\zeta}{2}\sqrt{\Psi} + \cos^2\frac{\zeta}{2}\Psi,$$

$$\mathrm{Im}^2(q_{k2}) = (1-2r)^2 \sin^2\frac{\zeta}{2}\cos^2\frac{\zeta}{2} + 2(1-2r)\sin^2\frac{\zeta}{2}\cos\frac{\zeta}{2}\sqrt{\Psi} + \sin^2\frac{\zeta}{2}\Psi$$

и

$$|q_{k,2}|^2 = \mathrm{Re}^2(q_{k,2}) + \mathrm{Im}^2(q_{k,2}) = (1-2r)^2\sin^2\frac{\zeta}{2} + \left|1-(1-2r)^2\sin^2\frac{\zeta}{2}\right| =$$

$$= \begin{cases} 1 & \text{при} \quad (1-2r)^2\sin^2\frac{\zeta}{2} \le 1, \\ 2(1-2r)^2\sin^2\frac{\zeta}{2}+1 & \text{при} \quad (1-2r)^2\sin^2\frac{\zeta}{2} > 1. \end{cases}$$

Таким образом, мы показали, что при положительных числах Куранта, меньших единицы, и всех без исключения «приведенных волновых числах», модули перехода всех частных решений в разложении (6) равны тождественно единице. Это утверждение дает необходимое условие устойчивости и устанавливает отсутствие у схемы «кабаре» какой-либо аппроксимационной вязкости [5].

При числах Куранта 0.5 и 1, как было показано ранее, схема (2) является точной и следовательно, не содержит также и аппроксимационной дисперсии. Таким образом, зона низких дисперсионных и диссипативных искажений решения («канал высокой точности»), находится у данной схемы не только на границе области устойчивости, но и в ее центре, что позволяет рассчитывать на наличие у нее достаточно хороших транспортных свойств.

4. Законы сохранения. Непосредственным следствием дифференциального уравнения (1) является бесконечное множество законов сохранения для различных степеней скалярного поля $\varphi^\sigma(x,t)$. Действительно, умножая (1) на $\varphi^{\sigma-1}$, $(\sigma \ne 0)$, получаем:

$$\frac{1}{\sigma}\frac{\partial\varphi^\sigma}{\partial t} + \frac{c}{\sigma}\frac{\partial\varphi^\sigma}{\partial x} = 0. \tag{1'}$$

Интегрируя (1′) по всей области определения задачи, находим

$$\int_{G3}\varphi^\sigma dx + \int_{G4} c\varphi^\sigma dt = \int_{G1}\varphi^\sigma dx + \int_{G2} c\varphi^\sigma dt, \tag{9}$$

где интегралы в правой части последнего равенства берутся по границам $G1$ и $G2$, из которых исходят характеристики и на которых задаются начально–граничные условия, а в левой части — по границам, на которые эти характеристики приходят (рис.3).

При замене дифференциальной задачи (1) разностной количество возможных законов сохранения уменьшается. Возможны случаи, когда их число сокращается до нуля. Каждый закон сохранения, остающийся справедливым для разностной задачи, является весьма важным как для теоретического осмысливания свойств данной схемы, так и для ее практического использования.

Разностные схемы, для которых выполняется дискретный аналог соотношения (9) при $\sigma = 1$, называются дивергентными (консервативными) [6].

Для того, чтобы свойство дивергентности схемы (2) стало очевидным, достаточно представить ее в « потоковом» виде

$$h\cdot\left[\frac{\langle\varphi\rangle_{j+1/2}^{n+1/2} - \langle\varphi\rangle_{j+1/2}^{n-1/2}}{\tau}\right] + \mathrm{Flux}[c\varphi]_j - \mathrm{Flux}[c\varphi]_{j-1} = 0, \tag{10}$$

где

$$\langle\varphi\rangle_{j+1/2}^{n+1/2} = \frac{\left(\hat{\varphi}_j + \varphi_{j-1}\right)}{2}; \qquad \langle\varphi\rangle_{j+1/2}^{n-1/2} = \frac{\left(\varphi_j + \breve{\varphi}_{j-1}\right)}{2}, \tag{11}$$
$$\mathrm{Flux}[c\varphi]_j = c\varphi_j; \qquad \mathrm{Flux}[c\varphi]_{j-1} = c\varphi_{j-1}.$$

Действительно, суммируя (10) по всем внутренним точкам сеточной области, нетрудно убедиться, что все члены, входящие в систему уравнений (10), внутри области взаимно сокращаются.

Следует отметить, что кроме представления (10)-(11) существуют и другие формы потоковой записи схемы (2). Например:

$$h\cdot\left[\frac{\langle\varphi\rangle_j^{n+1/2} - \langle\varphi\rangle_j^{n-1/2}}{\tau}\right] + \mathrm{Flux}[c\varphi]_{j+1/2} - \mathrm{Flux}[c\varphi]_{j-1/2} = 0; \tag{12}$$

здесь

$$\langle\varphi\rangle_j^{n+1/2} = \frac{\left(\hat{\varphi}_j + \varphi_j\right)}{2}; \qquad \mathrm{Flux}[c\varphi]_{j+1/2} = c\varphi^*_{j+1/2}, \tag{13}$$

где величины $\varphi^*_{j+1/2} = \varphi_j - \left(\varphi_j - \breve{\varphi}_j\right)/2r$ получаются линейной экстраполяцией значений $\varphi_j, \breve{\varphi}_j$ в точку пересечения характеристики, проходящей через точку $\left((j+1/2)h, n\tau\right)$, с вертикальной прямой, проходящей через узел с номером j (рис.4).

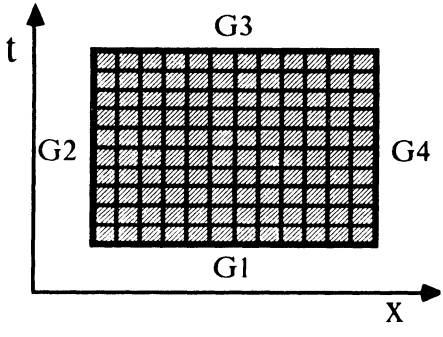

Рис.3. Донорные (G1, G2) и акцепторные (G3, G4) границы области.

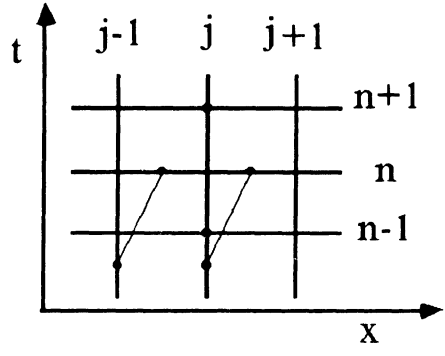

Рис.4. Снос по характеристике значения функции при определении величины конвективного потока.

Свойство дивергентности для разностных аппроксимаций конвективного переноса является довольно распространенным. Им обладают почти все используемые на практике транспортные алгоритмы. Покажем, что для схемы «кабаре» кроме закона сохранения первого порядка имеет место также разностный аналог дополнительного закона сохранения квадрата скалярного поля $\varphi^2(x,t)$.

Записывая уравнение (2) в безразмерной форме

$$(\hat{\varphi}_i + \varphi_{i-1}) - (\varphi_i + \breve{\varphi}_{i-1}) + 2r_i(\varphi_i - \varphi_{i-1}) = 0; \qquad r_i = c\tau / h_i \tag{2'}$$

и умножая на выражение

$$\Im = \left(\hat{\varphi}_i + \varphi_{i-1}\right) + \left(\varphi_i + \breve{\varphi}_{i-1}\right),$$

получаем

$$\left(\hat{\varphi}_i + \varphi_{i-1}\right)^2 - \left(\varphi_i + \breve{\varphi}_{i-1}\right)^2 + 2r_i\,\Im\left(\varphi_i - \varphi_{i-1}\right) = 0. \tag{14}$$

Учитывая тождество

$$\left(\varphi_i - \varphi_{i-1}\right) \equiv 0.5\left\{\left[\left(\hat{\varphi}_i + \varphi_i\right) - \left(\varphi_{i-1} + \breve{\varphi}_{i-1}\right)\right] - \left[\left(\hat{\varphi}_i + \varphi_{i-1}\right) - \left(\varphi_i + \breve{\varphi}_{i-1}\right)\right]\right\}$$

и вводя обозначение

$$\Im^* = \left(\hat{\varphi}_i + \varphi_i\right) + \left(\varphi_{i-1} + \breve{\varphi}_{i-1}\right) \equiv \Im,$$

представим последний член в (14) как

$$\begin{aligned} 2r_i\,\Im\left(\varphi_i - \varphi_{i-1}\right) &= \\ &= r_i\left\{\Im^*\left[\left(\hat{\varphi}_i + \varphi_i\right) - \left(\varphi_{i-1} + \breve{\varphi}_{i-1}\right)\right] - \Im\left[\left(\hat{\varphi}_i + \varphi_{i-1}\right) - \left(\varphi_i + \breve{\varphi}_{i-1}\right)\right]\right\} = \\ &= r_i\left[\left(\hat{\varphi}_i + \varphi_i\right)^2 - \left(\varphi_{i-1} + \breve{\varphi}_{i-1}\right)^2 - \left(\hat{\varphi}_i + \varphi_{i-1}\right)^2 + \left(\varphi_i + \breve{\varphi}_{i-1}\right)^2\right]. \end{aligned}$$

Это дает возможность привести (14) к виду

$$\hat{E}^{+}_{i-1/2} = E^{-}_{i-1/2}, \tag{14'}$$

где

$$\begin{aligned} \hat{E}^{+}_{i-1/2} &= r_i\left(\hat{\varphi}_i + \varphi_i\right)^2 + \left(1 - r_i\right)\left(\hat{\varphi}_i + \varphi_{i-1}\right)^2, \\ E^{-}_{i-1/2} &= r_i\left(\varphi_{i-1} + \breve{\varphi}_{i-1}\right)^2 + \left(1 - r_i\right)\left(\varphi_i + \breve{\varphi}_{i-1}\right)^2. \end{aligned} \tag{15}$$

Просуммируем соотношение (14′) по всем временным слоям из области определения задачи и разделим на r_i. Это приводит к интегральному уравнению баланса для пространственной ячейки с номером i:

$${}^{-}\mathrm{E}^{m}_{i+1/2} - {}^{+}\mathrm{E}^{1}_{i+1/2} = F_i - F_{i-1}, \tag{16}$$

где

$$F_i = \sum_{n=1}^{m}\left(\varphi_i^{n} + \varphi_i^{n-1}\right)^2,$$

$${}^{-}\mathrm{E}^{m}_{i-1/2} = \left[\left(\frac{1 - r_i}{r_i}\right)\left(\varphi_i^{m} + \varphi_{i-1}^{m-1}\right)^2 + \left(\varphi_{i-1}^{m} + \varphi_{i-1}^{m-1}\right)^2\right],$$

$${}^{+}\mathrm{E}^{1}_{i-1/2} = \left[\left(\frac{1 - r_i}{r_i}\right)\left(\varphi_i^{(2)} + \varphi_{i-1}^{(1)}\right)^2 + \left(\varphi_i^{(2)} + \varphi_i^{(1)}\right)^2\right].$$

Суммируя соотношение (16) по всем пространственным ячейкам, окончательно получаем

$$F_1 + \Phi_1 = F_N + \Phi_m, \tag{16'}$$

где

$$\Phi_m = \sum_{i=2}^{N} {}^{-}E^{m}_{i-1/2}; \quad \Phi_1 = \sum_{i=2}^{N} {}^{+}E^{1}_{i-1/2}.$$

В левой части равенства (16′) суммирование производится по «донорным» границам областей $G1$ и $G2$, на которых задаются граничные и начальные условия, в правой — по «акцепторным» границам $G3$ и $G4$. Равенство (16′) является, таким образом, дискретным аналогом равенства (9) при $\sigma = 2$.

Нетрудно видеть, что обе части равенства (16′) представлют собой квадратичные формы, положительно определенные при $(0 \le r \le 1)$. Таким образом, равенство (16′) устанавливает непрерывную зависимость решения разностной задачи (2) от граничных условий и начальных данных. Методами общей теории устойчивости разностных схем, развитыми в [6], основываясь на соотношении (16′), можно показать также и непрерывную зависимость численного решения линейной неоднородной задачи (1) от правой части. Из последнего свойства и условия аппроксимации схемой «кабаре» дифференциального уравнения (1) следует сходимость численного решения к решению дифференциальной задачи.

5. Дисперсионные свойства. Проанализируем дисперсионные свойства корней характеристического уравнения (4). Учитывая, что $q_{k,1} = e^{i\omega_1(\varsigma,r)\tau}$; $q_{k,2} = e^{i\omega_2(\varsigma,r)\tau}$, находим

$$\omega_1(\varsigma,r)\tau = \operatorname{arctg}\left\{\operatorname{Im}(q_{k,1})/\operatorname{Re}(q_{k,1})\right\}; \qquad \omega_2(\varsigma,r)\tau = \operatorname{arctg}\left\{\operatorname{Im}(q_{k,2})/\operatorname{Re}(q_{k,2})\right\}; \tag{17}$$

откуда следует, что дисперсионные свойства соответствующих корней определяются выражениями

$$\gamma_1(\varsigma,r) = \frac{\omega_1(k)}{ck} = \frac{1}{r\varsigma}\operatorname{arctg}\left\{\operatorname{Im}(q_{k,1})/\operatorname{Re}(q_{k,1})\right\}; \quad (0 \le r \le 1); \quad (0 \le \varsigma \le 2\pi); \tag{18}$$

$$\gamma_2(\varsigma,r) = \frac{\omega_2(k)}{ck} = \frac{1}{r\varsigma}\operatorname{arctg}\left\{\operatorname{Im}(q_{k,2})/\operatorname{Re}(q_{k,2})\right\}; \quad (0 \le r \le 1); \quad (0 \le \varsigma \le 2\pi). \tag{19}$$

Если бы схема (2) не вносила фазовых ошибок, величины «приведенных фазовых скоростей» $\gamma_1(\varsigma,r)$ и $\gamma_2(\varsigma,r)$ были бы тождественно равными единице. Степень отклонения параметров $\gamma_1(\varsigma,r)$ и $\gamma_2(\varsigma,r)$ от единицы характеризует несовершенство схемы.

Ввиду того, что поведение поверхностей $\gamma_1(\varsigma,r)$ и $\gamma_2(\varsigma,r)$ оказывается довольно сложным, их исследование проводилось с помощью программы Mathematica, Wolfram Research, Inc.

Из рис.5 и рис.6 следует, что дисперсионные свойства корней характеристического уравнения (4) существенно различны. Уже с первого взгляда видно, что при малых числах Куранта фазовая ошибка первого корня существенно меньше, хотя его фазовая поверхность и имеет некоторые особенности при $\varsigma = \pi$, $\varsigma = -\pi$. Фазовая поверхность второго корня при r=0 имеет более сильную особенность при всех «приведенных волновых числах».

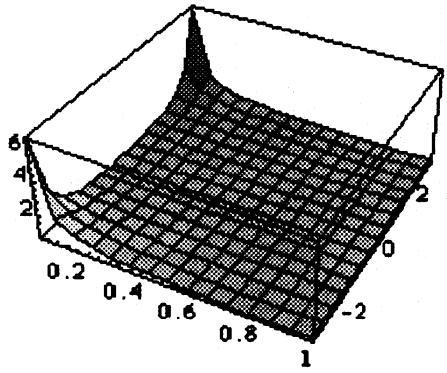

Рис.5. Дисперсионная поверхность первого корня характеристического уравне-ния. При r=0 и $\zeta=\pi$, $\zeta=-\pi$ имеется особенность.

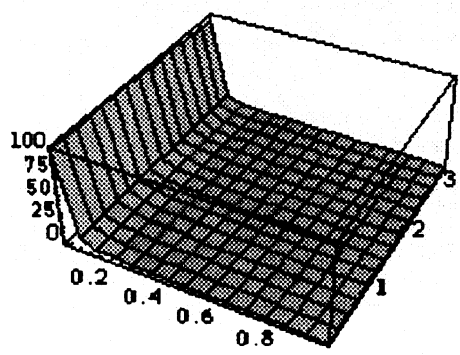

Рис.6. Дисперсионная поверхность второго корня характеристического уравнения. Видно, что зависимость от ζ слаба и при r=0 имеется особенность.

Выпишем характер этих особенностей в аналитическом виде. Учитывая, что в области устойчивости модули обоих корней характеристического уравнения тождественно равны единице, представим «приведенные фазовые скорости» в виде

$$\gamma_1(\varsigma,r)=\frac{\omega_1(k)}{ck}=\frac{1}{r\varsigma}\arcsin\left[\mathrm{Im}(q_{k,1})\right];\quad (0\le r\le 1);\quad (0\le\varsigma\le 2\pi); \tag{18'}$$

$$\gamma_2(\varsigma,r)=\frac{\omega_2(k)}{ck}=\frac{1}{r\varsigma}\arcsin\left[\mathrm{Im}(q_{k,2})\right];\quad (0\le r\le 1);\quad (0\le\zeta\le 2\pi), \tag{19'}$$

где мнимые части соответствующих корней определяются выражениями (7),(8).

Полагая $\zeta=\pi$ и раскладывая (18′) в ряд Тейлора по числу Куранта, получаем

$$\lim_{\substack{\varsigma\to\pi\\ r\to 0}}\left\{\gamma_1(\varsigma,r)\right\}\approx O\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right). \tag{20}$$

Разложение (18′) по параметру r при $\zeta\ne\pi$, $\zeta\ne-\pi$ приводит к выражению

$$\lim_{r\to 0}\left\{\gamma_1(\varsigma,r)\right\}\approx\frac{2}{\pi}\left\{\frac{\pi}{2}+\left|\mathrm{tg}(\varsigma/2\right|\right\}. \tag{21}$$

Разложение по числу Куранта второго корня дает

$$\lim_{r\to 0}\left[\gamma_2(\varsigma,r)\right]\approx O\left(\frac{1}{r}\right). \tag{22}$$

На рис.7,8 приведен вид дисперсионных поверхностей первого и второго корня соответственно при $0.5<r<1$. Видно, что у первого корня дисперсия на границах указанного отрезка отсутствует, а максимальные «завалы» дисперсионной поверхности при $\zeta=\pi$, $\zeta=-\pi$ не превышают 0.15. «Приведенная фазовая скорость» второго корня при r=1 оказывается равной нулю, что свидетельствует о его «паразитном» характере.

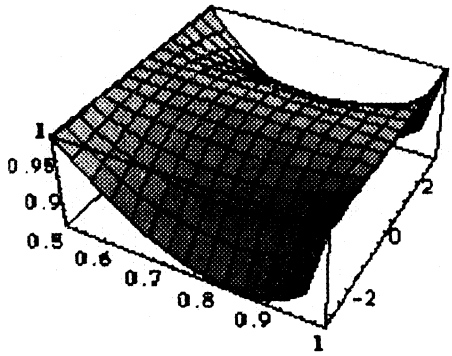

Рис.7. Дисперсионная поверхность первого корня характеристического уравнения при 0.5<r<1. Видно, что на границах соответствующего интервала аппроксимационная дисперсия отсутствует, и схема является точной.

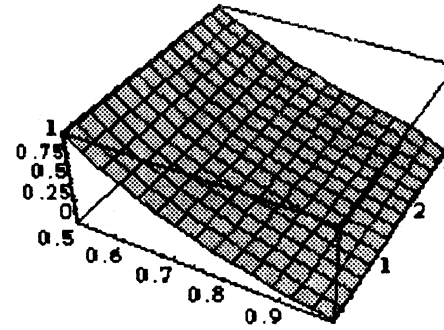

Рис.8. Дисперсионная поверхность второго корня характеристического уравнения при 0.5<r<1. Видно, что на левой границе интервала аппроксимационная дисперсия отсутствует. При $r=1$ фазовая скорость всех гармоник равна нулю.

На рис.9 и рис.10 представлены участки фазовых поверхностей первого корня при $0.01<r<0.1$ и $0.1<r<0.5$ соответственно. Видно, что область удовлетворительных дисперсионных свойств первого корня простирается до сравнительно малых чисел Куранта.

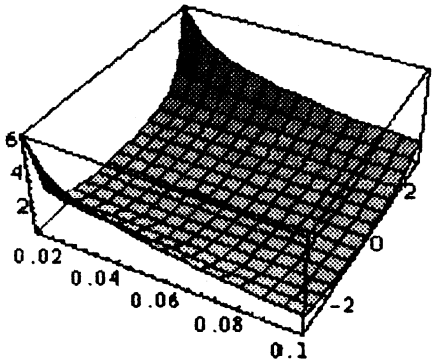

Рис.9. Дисперсионная поверхность первого корня характеристического уравнения при $0.01<r<0.1$

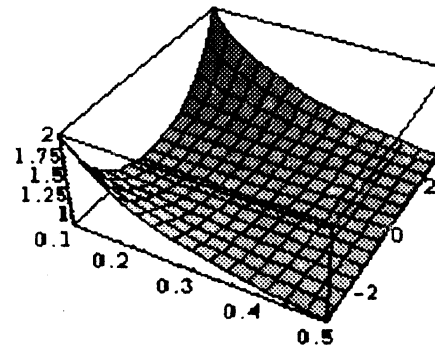

Рис.10. Дисперсионная поверхность первого корня характеристического уравнения при $0.1<r<0.5$.

Результаты практических расчетов показывают, что влияние на результаты расчетов второго корня уравнения (4) с «нефизическими» дисперсионными характеристиками при достаточно гладких начальных данных практически не сказывается, если для задания начального условия на втором временном слое использовать хорошо известную схему первого порядка «уголок», определяемую соотношениями

$$\frac{\hat{\varphi}_i - \varphi_i}{\tau} + c\frac{\varphi_i - \varphi_{i-1}}{h} = 0\ ; \quad i = 2,\ldots,N. \tag{23}$$

6. Обобщение на нерегулярные пространственные сетки, примеры расчетов. Схема «кабаре» обобщается на неравномерные пространственные сетки не единственным образом. Из существующих вариантов мы выберем наиболее простой:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\hat{\varphi}_i - \varphi_i}{\tau} + \frac{\varphi_{i-1} - \breve{\varphi}_{i-1}}{\tau}\right) + c\frac{\varphi_i - \varphi_{i-1}}{h_{i-1}} = 0; \qquad (24)$$

$$\tau = t_{n+1} - t_n = \text{const}; \qquad i = 2,\ldots,N; \qquad h_{i-1} = x_i - x_{i-1}.$$

Схема (24) наследует почти все хорошие свойства схемы «кабаре» на равномерных сетках (2).

Действительно, схема (24) остается антисимметричной относительно середины расчетной ячейки и в соответствии с этим на любых сетках обладает вторым порядком аппроксимации.

Нетрудно видеть, что схема «кабаре» в форме (24) обладает также и свойством «транспортивности», поскольку топология шаблона, на котором она определена, не изменяется.

Схема (24) является консервативной, поскольку для нее выполняются аналоги соотношений (10)-(11), и для нее справедлив квадратичный закон сохранения в форме, аналогичной (15)-(16). При обобщении выражений (10)-(11) и (15)-(16) на нерегулярные сетки постоянный шаг по пространству просто заменяется на переменный.

Непосредственным следствием квадратичного закона сохранения (15)-(16) на нерегулярных сетках является сохранение схемой (24) свойства бездиссипативности. Другими словами, схема (24), как и схема (2) не вносит в решение амплитудных ошибок.

Следует отметить, что для схемы (24) утрачивается возможность ее представления в дивергентной форме (12)-(13).

Для исследования транспортных свойств схемы «кабаре» на неравномерных пространственных сетках зададимся степенью их неравномерности, равной 1/3, и сгенерируем случайную, распределенную по нормальному закону последовательность 39 отрезков, длины которых лежат в диапазоне чисел от 1/3 до 1.

На определенной таким образом расчетной сетке будем решать задачу Коши с периодическими начальными условиями. Начальный профиль переносимой функции определим выражением

$$\varphi_i = \exp\left[-\left(\frac{x_i - m_1}{\delta}\right)^2\right] + \exp\left[-\left(\frac{x_i - m_2}{\delta}\right)^2\right];$$

$$x_1 = 0; \qquad x_{i+1} = x_i + h_i; \qquad i = 1, \ldots, 40,$$

где

$$m_1 = L(15/40); \qquad m_2 = L(25/40); \qquad L = \max(x_i); \qquad \delta = L/12.6.$$

Вид начального распределения на неравномерной сетке приведен на рис.11.

Второй слой начальных данных определим по первому с использованием схемы «уголок».

При расчетах поставленной задачи по схеме «кабаре» величина шага по времени задавалась постоянной и выбиралась из условия, чтобы на минимальной расчетной ячейке локальное число Куранта было равно 0.99.

На рис. 12-14 представлены результаты переноса начального профиля по схеме «кабаре» соответственно на 10, 30 и 50 начальных шаблонов. На последнем из этих графиков начинают заметно проявляться дисперсионные эффекты. Как и должно следовать из проведенного теоретического анализа, диссипативных явлений не наблюдается.

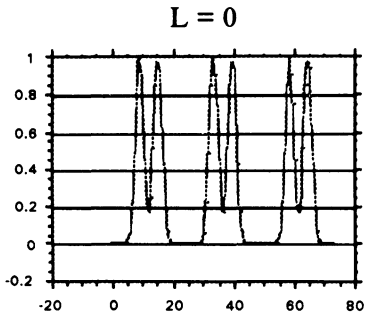

Рис.11. Профиль переносимой функции в начальный момент времени.

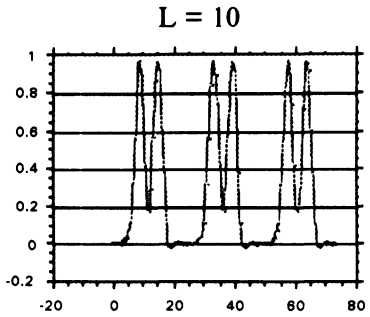

Рис.12. Вид переносимого «профиля» после транспортировки его по схеме «кабаре» на 10 начальных шаблонов.

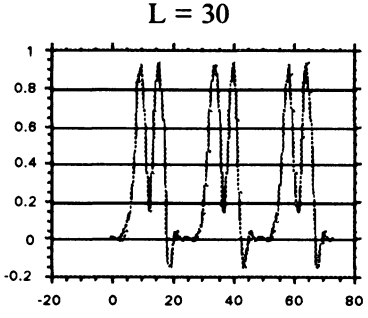

Рис.13. Вид переносимого «профиля» после транспортировки его по схеме «кабаре» на 30 начальных шаблонов.

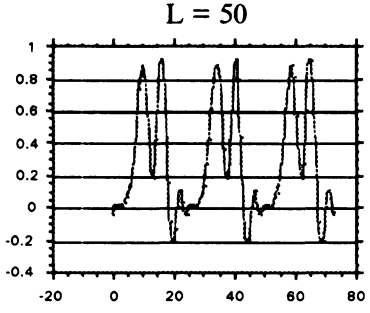

Рис.14. Вид переносимого «профиля» после транспортировки его по схеме «кабаре» на 50 начальных шаблонов.

На рис.15-18 для сравнения приведены результаты аналогичных расчетов по некоторым другим схемам. На рис.15-16 даны результаты расчетов по наиболее популярной схеме «уголок». Видно, что сильная аппроксимационная вязкость этой схемы приводит к тому, что вид начальной функции качественно меняется уже при трансляции на два начальных шаблона.

На рис.17-18 приведены графики переносимой функции при расчетах по схеме «крест» и схеме Лакса–Вендроффа соответственно. Видно, что при трансляции на три с половиной и три начальных шаблона, результаты расчетов качественно уступают полученным по схеме «кабаре» на длине в 50 шаблонов.

Из сравнения приведенных результатов видно, что транспорные свойства схемы «кабаре» на неравномерных сетах по крайней мере на порядок превосходит транспортные свойства других тестированных схем.

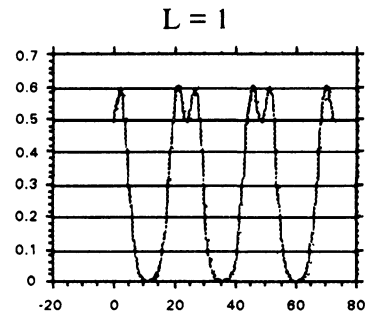

Рис.15. Вид переносимого «профиля» после транспортировки его по схеме «уголок» на один начальный шаблон.

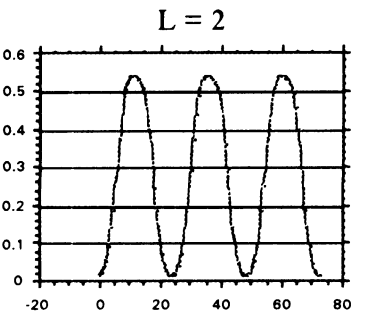

Рис.16. Вид переносимого «профиля» после транспортировки его по схеме «уголок» на два начальных шаблона.

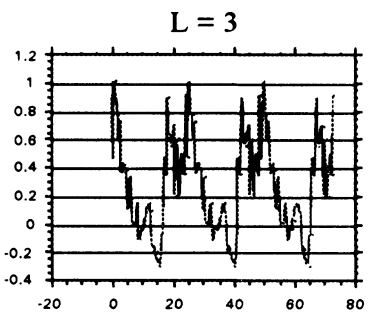

Рис.17. Вид переносимого «профиля» после транспортировки его по схеме «крест» на три начальных шаблона.

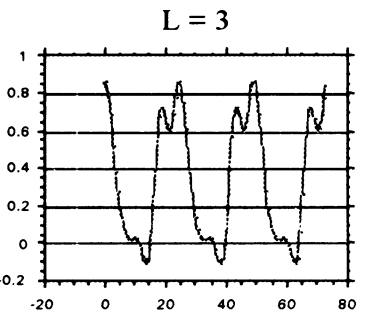

Рис.18. Вид переносимого «профиля» после транспортировки его по схеме Лакса-Вендроффа на три начальных шаблона.

Заключение. В работе впервые предложена новая трехслойная разностная схема для простейшего линейного уравнения конвективного переноса с пространственно расщепленной временной производной, названная схемой «кабаре». Показано, что предложенная схема

- обладает свойством транспортивности и вторым порядком аппроксимации на нерегулярных пространственных сетках;
- устойчива при положительных числах Куранта, не превышающих единицу;
- бездиссипативна;
- является точной при двух различных числах Куранта (r=1 и r=0.5);
- дивергентна;
- консервативна по отношению к квадрату переносимой функции;
- имеет хорошие дисперсионные свойства.

Приведенные в работе примеры численных расчетов показали, что на нерегулярных разностных сетках схема «кабаре» способна с высоким качеством переносить нетривиальные начальные распределения по крайней мере на порядок дальше, чем известные ранее разност-

ные схемы. Предварительные расчеты, не вошедшие в данную публикацию, показывают, что дальнейшая оптимизация параметров схемы «кабаре» способна увеличить этот разрыв еще на порядок.

Результаты, полученные для модельного уравнения, вселяют определенную надежду на то, что распространение использованных в настоящей работе подходов на многомерный случай может позволить и там добиться качественно новых результатов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Роуч П.* Вычислительная гидродинамика. — М.: Мир, 1980, 616с.
2. *Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н.* Системы квазилинейных уравнений. — М.: Наука, 1978, 688с.
3. *Курант Р., Фридрихс К., Леви Г.О.* О разностных уравнениях математической физики. — УМН, 1940, т.8.
4. *Lax P.D., Wendroff B.* Systems of conservation lows. Comm. Pure. Appl. Math., 1960, v.13, p.217-237.
5. *Яненко Н.Н., Шокин Ю.И.* Об аппроксимационной вязкости разностных схем. Докл. АН СССР, 1968, т.182, №4, с.776-778.
6. *Самарский А.А.* Теория разностных схем. — М.: Наука, 1983, с31-42.

Поступила в редакцию 12.03.97.