1997. Т. 33, № 7. С. 975 — 984

УДК 519.63

РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ НА АДАПТИВНЫХ СЕТКАХ ПО ВРЕМЕНИ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ОБОБЩЕННЫМИ РЕШЕНИЯМИ

А. А. Самарский, Б. С. Йованович, П. П. Матус, В. С. Щеглик

1. Введение. В настоящее время к вычислительным методам наряду с традиционными требованиями однородности и консервативности [1] предъявляют также и требование адаптивности. Использование адаптивных сеток позволяет при минимальном общем числе узлов сетки достигнуть максимально возможной точности алгоритма путем сгущения сетки в областях нерегулярностей решения. При математическом моделировании эволюционных задач с особенностями особую роль играет временной шаг τ. В явных методах выбор шага зависит главным образом от критериев устойчивости, а в неявных, безусловно устойчивых, — от взаимосвязи точности и эффективности вычислительной процедуры. При использовании различных вычислительных методов адаптивного типа в нестационарных задачах, когда в отдельных подобластях применяются свои временные сетки, основные проблемы возникают при постановке краевых условий на внутренних границах.

В [2, 3] для различных классов эволюционных уравнений предложены и исследованы разностные схемы на адаптивно-временных сетках. При этом показано, что данные алгоритмы безусловно устойчивы (без ограничений на соотношения между шагами τ и h) в сильных нормах (C, W_2^2). В теоретическом плане такие методы сводятся к схемам с переменными весовыми множителями (типичная ситуация для неоднородных вычислительных алгоритмов)

$$y_{\bar t} = (y_{\bar x x}) + \varphi, \quad \sigma = \sigma(x,t), \quad (x,t) \in \omega. \tag{1.1}$$

В связи с этим в настоящее время несомненный интерес представляют работы по развитию общей теории устойчивости операторно-разностных схем в гильбертовых пространствах [1] на случай схем с непостоянными весами. Классической в этом смысле является работа [4]. Отметим также работы [5 — 8].

При использовании гибридных вычислительных методов на адаптивных сетках свойство консервативности обычно нарушается, что естественно является их недостатком. В [9] для параболического уравнения построены консервативные методы на адаптивных по времени сетках, которые (в отличие от (1.1)) преобразуются к дивергентному виду

$$y_{\bar t} = ((y_{\bar x})^{(\sigma)})_x + \varphi, \quad \sigma = \sigma(x,t), \quad (x,t) \in \omega. \tag{1.2}$$

Отметим, что в алгоритмах типа (1.1), (1.2) $\sigma(x,t)$ — разрывная весовая функция, что, например, приводит к отсутствию в (1.2) безусловной локальной аппроксимации даже на гладких решениях исходной дифференциальной задачи. Тем не менее в [2, 3, 9] доказана безусловная сходимость разностного решения в метрике C со скоростью $O(h^2+\tau)$ для алгоритмов типа (1.1) и $O(h^2+\sqrt{\tau})$ для алгоритмов типа (1.2).

Так как адаптивные сетки обычно используются для дифференциальных задач с негладкими решениями, то естественно и исследование сходимости соответствующих вычислительных методов проводить на обобщенных решениях.

При понижении требований к дифференциальным свойствам искомого решения анализ сходимости разностной схемы существенно усложняется. В [10] предложен аппарат получения таких оценок точности, в которых порядок скорости сходимости согласован с гладкостью решения исходной дифференциальной задачи $\|y-u\|_{W_2^s(\omega)} \le M|h|^{k-s}\|u\|_{W_2^k(\Omega)}$, где $k > s \ge 0$, $\|\cdot\|_{W_2^s(\omega)}$ и $\|\cdot\|_{W_2^k(\Omega)}$ — соболевские нормы на множестве функций дискретного и непрерывного аргумента.

В [11 — 14] этот подход был обобщен и на разностные схемы для параболических уравнений, где доказывается сходимость приближенного решения не к точному решению u, а к некоторому его осреднению $\tilde{u}$ по Стеклову. Аналогичные проблемы рассматривались и в работах [15 — 17].

Применение данного аппарата исследований непосредственно к разностным схемам с переменными и разрывными весовыми множителями (1.1) или (1.2) для параболических уравнений с обобщенными решениями не дало желаемого результата, на наш взгляд, по двум причинам: во-первых, требовались конструктивные изменения в построении самих вычислительных методов на адаптивных сетках по времени, во-вторых, часто применяемая при исследовании вопроса погрешности аппроксимации на обобщенных решениях лемма Брэмбла — Гильберта приводит иногда не только к неестественным ограничениям на шаги типа $\tau \sim h^2$, но и к завышенным требованиям на гладкость обобщенного решения.

В связи с этим в данной работе строятся и исследуются новые классы безусловно устойчивых вычислительных методов на адаптивных сетках по времени вида

$$y_{\bar{t}} = (y^{(\sigma)})_{\bar{x}x} + \varphi, \quad \sigma = \sigma(x,t), \quad (x,t) \in \omega. \tag{1.3}$$

Укажем, что схемы с переменными шагами по времени вида (1.3) на основе операторов декомпозиции рассматривались в работах [18, 19].

Для разностных схем с переменными весовыми множителями получены новые априорные оценки в таких нормах, из которых следует безусловная сходимость на обобщенных решениях к осреднению точного решения ($u(x,t) \in W_2^{2,1}(Q_T)$) $z = y - S_x^2 u$, S_x^2 — стекловский оператор осреднения по пространственной переменной. Нахождение соответствующих оценок для погрешности аппроксимации проводится без использования леммы Брэмбла — Гильберта.

Отметим также, что получение основной оценки устойчивости в норме $L_2(\omega_{h\tau})$ для разностных схем с переменными весовыми множителями основывается на теореме 7 из [20, гл. III, §1].

2. Дифференциальная задача. Рассмотрим в прямоугольнике $Q_T = \{(x,t): x \in \Omega = (0,1),\ 0 < t < T\}$ при некотором $T > 0$ одномерное уравнение теплопроводности

$$\partial u/\partial t = \partial^2 u/\partial x^2 + f(x,t), \quad (x,t) \in Q_T, \tag{2.1}$$

с начальными

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \Omega, \tag{2.2}$$

и граничными условиями

$$u(0,t) = u(1,t) = 0, \quad 0 < t < T. \tag{2.3}$$

Для функций $u = u(x)$, заданных на Ω, введем соболевское пространство $W_2^1(\Omega)$ с нормой $\|u\|^2_{W_2^1(\Omega)} = \|u\|^2_{L_2(\Omega)} + \|u'\|^2_{L_2(\Omega)}$, $\|u\|^2_{L_2(\Omega)} = \int\limits_\Omega u^2(x)dx$; для функций $u = u(x,t)$, заданных на Q_T, определим пространство $W_2^{\alpha,\beta}(Q_T)$ (α, β — целые неотрицательные числа) с нормой

$$\|u\|^2_{W_2^{\alpha,\beta}(Q_T)} = \|u\|^2_{L_2(Q_T)} + \sum_{s=1}^{\alpha} \|\partial^s u/\partial x^s\|^2_{L_2(Q_T)} + \sum_{s=1}^{\beta} \|\partial^s u/\partial t^s\|^2_{L_2(Q_T)}, \quad \|u\|^2_{L_2(Q_T)} = \int\limits_0^T \|u(x,t)\|^2_{L_2(\Omega)} dt.$$

Через $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ и $\overset{\circ}{W}{}_2^{1,0}(Q_T)$ будем соответственно обозначать замкнутые подпространства пространств $W_2^1(\Omega)$ и $W_2^{1,0}(Q_T)$, плотными множествами в которых являются гладкие функции, равные нулю вблизи $x = 0$ и $x = 1$ [21].

Определение 1 [21]. Под обобщенным решением задачи (2.1) — (2.3) в пространстве $W_2^{2,1}(Q_T)$ будем понимать элемент u пространства $W_{2,0}^{2,1}(Q_T) \equiv W_2^{2,1}(Q_T) \cap \overset{\circ}{W}{}_2^{1,0}(Q_T)$, удовлетворяющий почти всюду в Q_T уравнению (2.1) и равный $u_0(x)$ при $t = 0$.

Имеет место

Лемма 1 [21, 22]. *Задача (2.1) — (2.3) однозначно разрешима в* $W_{2,0}^{2,1}(Q_T)$, *если* $f \in L_2(Q_T)$, $u_0 \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ *и при этом справедливо неравенство* $\|u\|_{W_2^{2,1}(Q_T)} \le M(\|u_0\|_{W_2^1(\Omega)} + \|f\|_{L_2(Q_T)})$, *в котором положительная постоянная* M *не зависит от* u_0 *и* f.

3. Разностная схема. В области Q_T введем равномерные сетки узлов $\omega_\tau = \{t_j = j\tau,\ j = \overline{1, j_0},\ j_0\tau = T\}$, $\omega_h = \{x_i = ih,\ i = \overline{1, N-1},\ Nh = 1\}$, $\omega_{h\tau} = \omega_h \times \omega_\tau$. Задачу (2.1) — (2.3) аппроксимируем разностной схемой с весами вида

$$y_{\bar t} = (y^{(\sigma)})_{\bar x x} + S_x^2 S_t f, \quad (x,t) \in \omega_{h\tau}, \quad y(x,0) = S_x^2 u_0(x), \quad x \in \overline{\omega}_h, \quad y(0,t) = y(1,t) = 0, \quad t \in \omega_\tau, \tag{3.1}$$

где $v^{(\sigma)} = \sigma v(x,t) + (1-\sigma)v(x, t-\tau)$, $\sigma = \sigma(x,t)$, а $S_x^2 f(x,t) = h^{-1} \int\limits_{x-h}^{x+h} (1 - |x'-x|/h) f(x',t)dx' = \int\limits_{-1}^{1} (1-|s|) f(x+sh, t) ds$, $S_t f(x,t) = \tau^{-1} \int\limits_{t-\tau}^{t} f(x,t')dt' = \int\limits_{-1}^{0} f(x, t+\theta\tau) d\theta$ — операторы усреднения по Стеклову, причем $S_x^2 \partial^2 u/\partial x^2 = u_{\bar x x}$, $S_t \partial u/\partial t = u_{\bar t}$.

Для исследования вопроса устойчивости и сходимости разностной задачи (3.1) нам потребуются некоторые априорные оценки, которые будут получены ниже.

4. Вспомогательные результаты. Пусть X — вещественное конечномерное гильбертово пространство со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)$ и нормой $\|\cdot\|$, а A — постоянный линейный оператор, действующий из X в X. Для функций, заданных на ω_τ, будем использовать общепринятые обозначения [20]: $y = y(t)$, $\check y = y(t-\tau)$, $y_{\bar t} = (y - \check y)/\tau$. Через X_D ($D = D^* > 0$) обозначим гильбертово пространство, состоящее из элементов X, со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)_D = (D\cdot,\cdot)$ и нормой $\|\cdot\|_D = (\cdot,\cdot)_D^{1/2}$. Для функций, определенных на ω_τ, введем операцию “взвешивания” $y^{(\Sigma)} = \Sigma y + (E - \Sigma)\check y$ с заданным оператором $\Sigma = \Sigma(t) : X \to X$, E — тождественный оператор. В общем случае предполагаем неперестановочность операторов A и Σ, т.е. $A\Sigma \ne \Sigma A$, а Σ удовлетворяет соотношению

$$\Sigma(t) - \Sigma(t-\tau) \le \Delta E, \tag{4.1}$$

где $\Delta = \mathrm{const}$ не зависит от τ.

Рассмотрим на сетке ω_τ операторно-разностную схему вида [5, 20]

$$y_{\bar t} + Ay^{(\Sigma)} = \varphi(t), \quad t \in \omega_\tau, \quad y(0) = y_0, \tag{4.2}$$

где $y = y(t) \in X$, $\varphi(t) \in X$, $y_0 \in X$ задано.

Отметим, что в случае $\Sigma(t) = \sigma E$, $\sigma \equiv \mathrm{const}$, получаем хорошо известную схему с весами

$$y_{\bar t} + \sigma Ay + (1-\sigma)A\check y = \varphi(t). \tag{4.3}$$

Для (4.3) в [1, 20] проведены достаточно полные исследования и получены многочисленные оценки устойчивости по начальным данным и правой части в различных энергетических пространствах.

Имеет место

Теорема 1 [5]. *Пусть в разностной схеме (4.2) оператор* $A = A^* > 0$, *тогда при*

$$\Sigma(t) \ge \sigma_0 E, \quad \sigma_0 = 1/2 - 1/(\tau\|A\|) \tag{4.4}$$

справедлива априорная оценка устойчивости разностного решения по начальным данным и правой части

$$\max_{t\in\omega_\tau} \|y(t)\| \le \|y_0\| + \max_{t\in\omega_\tau} \|A^{-1}\varphi(t)\| + \sum_{t\in\omega_\tau} \tau \|A^{-1}\varphi_{\bar t}(t)\|. \tag{4.5}$$

Определим пространство $H = H(\omega_\tau; X)$ как множество сеточных функций, заданных на ω_τ со значениями в X, с нормой $\|\cdot\|_H = \Big(\sum\limits_{t\in\omega_\tau} \tau \|\cdot(t)\|^2\Big)^{1/2}$.

Теорема 2. *Пусть в схеме (4.2) оператор A является положительным самосопряженным, а Σ удовлетворяет неравенству (4.1) с $\Delta \leq 1$ и, кроме того, условию $\Sigma^*(t) = \Sigma(t) \geq \sigma_\varepsilon E$, $\sigma_\varepsilon = (1+\varepsilon)/2 - 1/(\tau\|A\|) > 0$. Тогда если имеют место неравенства*

$$\Delta \leq 0, \quad \varepsilon \in (0,2) \tag{4.6}$$

либо

$$\Delta \in (0,1], \quad \varepsilon \in (2\Delta/3, 2\Delta), \tag{4.7}$$

то решение операторно-разностной схемы (4.2) устойчиво по начальным данным, правой части и верны априорные оценки

$$\|y\|_H \leq \sqrt{2/\varepsilon}\|y_0\|_{R_1} + 2\sqrt{2}/(\varepsilon\sqrt{2-\varepsilon})\|A^{-1}\varphi\|_H, \quad R_1 = A^{-1} + \tau\Sigma(\tau), \tag{4.8}$$

в случае (4.6) и

$$\|y\|_H \leq \sqrt{2/\varepsilon}\|y_0\|_{R_2} + 4/\sqrt{\varepsilon(2-\varepsilon)(3\varepsilon-2)}\|A^{-1}\varphi\|_H, \quad R_2 = A^{-1} + \tau(\Sigma(\tau) + 0{,}5E), \tag{4.9}$$

в случае выполнения (4.7).

Доказательство теоремы существенным образом опирается на доказательство теоремы 7 из [20, гл. III, §1].

Умножим уравнение (4.2) слева на оператор A^{-1} и перепишем в виде

$$(A^{-1} + \tau(\Sigma - E))y_{\bar{t}} + y = A^{-1}\varphi. \tag{4.10}$$

Умножив (4.10) скалярно на $2\tau y$ и учитывая, что A^{-1} также является положительным и самосопряженным оператором, получаем энергетическое тождество

$$((A^{-1} + \tau\Sigma)y, y) + \tau(\|y\|^2 + \|\check{y}\|^2) + \tau^2((A^{-1} + \tau(\Sigma - E))y_{\bar{t}}, y_{\bar{t}}) =$$

$$= ((A^{-1} + \tau\Sigma)\check{y}, \check{y}) + 2\tau(A^{-1}\varphi, y). \tag{4.11}$$

Для оценки скалярного произведения в последнем слагаемом воспользуемся представлением $y = 0{,}5(y + \check{y}) + 0{,}5\tau y_{\bar{t}}$. Имеем

$$2\tau(A^{-1}\varphi, y) = \tau(A^{-1}\varphi, y + \check{y}) + \tau^2(A^{-1}\varphi, y_{\bar{t}}) \leq$$

$$\leq (\tau\varepsilon_1/2)\|y + \check{y}\|^2 + (\tau/(2\varepsilon_1))\|A^{-1}\varphi\|^2 + ((\tau^3\varepsilon_2)/2)\|y_{\bar{t}}\|^2 + (\tau/(2\varepsilon_2))\|A^{-1}\varphi\|^2. \tag{4.12}$$

Из представления $\Sigma = \check{\Sigma} + (\Sigma - \check{\Sigma})$ и (4.1) вытекает неравенство

$$((A^{-1} + \tau\Sigma)\check{y}, \check{y}) \leq ((A^{-1} + \tau\check{\Sigma})\check{y}, \check{y}) + \tau\Delta\|\check{y}\|^2. \tag{4.13}$$

Непосредственной проверкой можно убедиться в справедливости тождества $\|y\|^2 + \|\check{y}\|^2 = 0{,}5(\|y + \check{y}\|^2 + \tau^2\|y_{\bar{t}}\|^2)$. Суммируя полученные оценки (4.12), (4.13) и подставляя в (4.11), приходим к соотношению

$$\|y\|_B^2 + \tau^2((B - 0{,}5(1 + \varepsilon_2)\tau E)y_{\bar{t}}, y_{\bar{t}}) + 0{,}5\tau(1 - \varepsilon_1)\|y + \check{y}\|^2 \leq$$

$$\leq \|\check{y}\|^2_{B(t-\tau)} + \tau\Delta\|\check{y}\|^2 + 0{,}5\tau(1/\varepsilon_1 + 1/\varepsilon_2)\|A^{-1}\varphi\|^2, \quad B = A^{-1} + \tau\Sigma. \tag{4.14}$$

Рассмотрим два случая: $\Delta \leq 0$ и $\Delta \in (0,1]$. Пусть $\Delta \leq 0$. Тогда, выбирая $\varepsilon_1 = 1 - 0{,}5\varepsilon$, $\varepsilon_2 = 0{,}5\varepsilon$, будем иметь

$$\tau^2((B - 0{,}5(1 + \varepsilon_2)\tau E)y_{\bar{t}}, y_{\bar{t}}) + 0{,}5\tau(1 - \varepsilon_1)\|y + \check{y}\|^2 \geq \tau(1 - \varepsilon_1)(\|y\|^2 + \|\check{y}\|^2) +$$

$$+ 0{,}5\tau^3(\varepsilon - \varepsilon_2 + \varepsilon_1 - 1)\|y_{\bar{t}}\|^2 = 0{,}5\tau\varepsilon(\|y\|^2 + \|\check{y}\|^2) \geq 0{,}5\varepsilon\tau\|y\|^2. \tag{4.15}$$

Подставляя (4.15) в (4.14) и суммируя по всем $t \in \omega_\tau$, получим

$$\|y(T)\|^2_{B(T)} + \sum_{t\in\omega_\tau} \tau\|y(t)\|^2 \le \frac{2}{\varepsilon}\|y_0\|^2_{B(\tau)} + \frac{8}{\varepsilon^2(2-\varepsilon)} \sum_{t\in\omega_\tau} \tau\|A^{-1}\varphi(t)\|^2. \tag{4.16}$$

Отбрасывая в левой части (4.16) положительное слагаемое $\|y(T)\|^2_{B(T)}$ и извлекая корень квадратный из левой и правой частей, приходим к требуемой оценке (4.8).

Перейдем к случаю $\Delta \in (0,1]$. Сначала оценим выражение

$$\tau^2((B - 0{,}5(1+\varepsilon_2)\tau E)y_{\bar t}, y_{\bar t}) + 0{,}5\tau(1-\varepsilon_1)\|y+\check y\|^2 - \tau\Delta\|\check y\|^2 \ge$$

$$\ge 0{,}5\tau^3(\varepsilon - \varepsilon_2 + \varepsilon_1 - 1)\|y_{\bar t}\|^2 + \tau(1-\varepsilon_1)\|y\|^2 + \tau(1-\varepsilon_1-\Delta)\|\check y\|^2.$$

Выберем $\varepsilon_1 = 1 - \Delta/2 - \varepsilon/4$, $\varepsilon_2 = 3\varepsilon/4 - \Delta/2$. Тогда

$$\|y\|^2_B + \tau\left(\frac{\Delta}{2} + \frac{\varepsilon}{4}\right)\|y\|^2 \le \|\check y\|^2_{\check B} + \tau\left(\frac{\Delta}{2} - \frac{\varepsilon}{4}\right)\|\check y\|^2 + 2\tau\left(\frac{1}{4-2\Delta-\varepsilon} + \frac{1}{3\varepsilon - 2\Delta}\right)\|A^{-1}\varphi\|^2. \tag{4.17}$$

Отсюда суммированием (4.17) по всем $t \in \omega_\tau$ получаем

$$\frac{2\Delta+\varepsilon}{4}\|y\|^2_H \le \|y_0\|^2_{B(\tau)} + \frac{\tau(2\Delta-\varepsilon)}{4}\|y_0\|^2 + 2\left(\frac{1}{4-2\Delta-\varepsilon} + \frac{1}{3\varepsilon-2\Delta}\right)\|A^{-1}\varphi\|^2_H. \tag{4.18}$$

Отбрасывая в левой части (4.18) слагаемое с множителем Δ, а в правой отрицательные слагаемые и усиливая неравенство при $\Delta = 1$, приходим к неравенству

$$\frac{\varepsilon}{4}\|y\|^2_H \le \|y_0\|^2_{B(\tau)} + \frac{\tau}{2}\|y_0\|^2 + \frac{4}{(2-\varepsilon)(3\varepsilon-2)}\|A^{-1}\varphi\|^2_H,$$

из которого и следует требуемая оценка (4.9).

5. Устойчивость разностной схемы с переменными весовыми множителями. Введем пространство сеточных функций X, заданных на сетке $\overline{\omega}_h$ и равных нулю на границах $x = 0$ и $x = 1$. В пространстве X со скалярным произведением $(v,w) = \sum_{x\in\omega_h} v(x)w(x)h$ и нормой $\|v\|_h = (v,v)^{1/2}$ определим линейный оператор

$$Av = \begin{cases} -(v_x - v/h)/h, & x = h,\\ -v_{\bar x x}, & x \in \omega_h\backslash\{h, 1-h\},\\ (v^{\bar x} - v/h)/h, & x = 1-h. \end{cases}$$

Тогда разностную схему (3.1) можно переписать в операторном виде (4.2) с $\varphi = S_x^2 S_t f$, $y_0 = S_x^2 u_0$, $\Sigma v(x,t) = \sigma(x,t)v(x,t)$.

Определим $L_{2,h}(\omega_{h\tau})$ как сеточный аналог $L_2(Q_T)$ с нормой $\|v\|_{h\tau} = \left(\sum_{t\in\omega_\tau} \tau\|v(t)\|^2_h\right)^{1/2}$.

Тогда справедлива

Теорема 3. *Пусть в (3.1)* $\sigma(x,t) \ge \sigma_0 = 1/2 - h^2/(4\tau)$. *Тогда для разностной схемы (3.1) верна априорная оценка*

$$\max_{t\in\omega_\tau}\|y(t)\|_h \le \|y_0\|_h + \max_{t\in\omega_\tau}(\|A^{-1}\varphi(t)\|_h + \|A^{-1}\varphi_{\bar t}(t)\|_{h\tau}), \tag{5.1}$$

выражающая устойчивость по правой части и начальным данным в пространстве X.

Чтобы убедиться в правильности оценки (5.1), достаточно воспользоваться результатами теоремы 1 и учесть, что $\|A\| < 4/h^2$.

Теорема 4. *Пусть в (3.1)* $\sigma(x,t) \ge \sigma_\varepsilon = (1+\varepsilon)/2 - h^2/(4\tau)$, $\sigma(x,t) - \sigma(x,t-\tau) \le \Delta \le 1$, $\max_{(x,t)\in\omega_{h\tau}} |\sigma(x,t)| \le \gamma$, $\gamma > 0$ *не зависит от* h, τ. *Тогда для разностной схемы (3.1) при выполнении условий (4.6) либо (4.7) верна оценка, выражающая устойчивость по правой части и начальным данным в пространстве* H,

$$\|y\|_{h\tau} \le M_1(\|y_0\|_{A^{-1},h} + \|y_0\|_h) + M_2\|A^{-1}\varphi\|_{h\tau}, \tag{5.2}$$

где $M_1 > 0$, $M_2 > 0$ *не зависят от* h, τ.

Утверждение теоремы 4 непосредственным образом вытекает из теоремы 2.

6. Сходимость разностных схем с непостоянными весами. Поставим вопрос о сходимости разностной схемы (3.1) в сеточной норме $L_{2,h}(\omega_{h\tau})$. Обозначим через $\bar{u} = S_x^2 u$ осреднение точного решения $u(x,t)$ задачи (2.1) — (2.3), при этом решение продолжим нечетным образом через прямые $x = 0$ и $x = 1$:

$$u^*(x,t) = \begin{cases} -u(-x,t), & x \in (-1,0], \\ u(x,t), & x \in (0,1), \\ -u(2-x,t), & x \in [1,2). \end{cases}$$

Нетрудно показать, что $\|u^*\|^2_{W_2^{2,1}(\tilde{Q}_T)} = 3\|u\|^2_{W_2^{2,1}(Q_T)}$, $\tilde{Q}_T = \{(x,t) :\ x \in (-1,2),\ 0 < t < T\}$. Будем сравнивать приближенное решение y с осреднением $\bar{u}$. Для функции $z = y - \bar{u}$ получим разностную задачу

$$z_{\bar{t}} = (z^{(\sigma)})_{\bar{x}x} + \psi(x,t), \quad (x,t) \in \omega_{h\tau}, \quad z(x,0) = 0, \quad x \in \bar{\omega}_h, \quad z(0,t) = z(1,t) = 0, \quad t \in \omega_\tau, \tag{6.1}$$

где $\psi(x,t) = S_x^2 S_t f - \bar{u}_{\bar{t}} + (\bar{u}^{(\sigma)})_{\bar{x}x}$ есть погрешность аппроксимации. Преобразуем ее к дивергентному виду. Для этого применим оператор $S_x^2 S_t$ к дифференциальному уравнению (2.1). Получим $\bar{u}_{\bar{t}} = S_t u_{\bar{x}x} + S_x^2 S_t f$. Подставим отсюда $S_x^2 S_t f$ в ψ. Имеем $\psi = -(S_t u - \bar{u}^{(\sigma)})_{\bar{x}x}$. Обозначим через $\eta = S_t u - \bar{u}^{(\sigma)}$ и покажем, что сеточная функция $\eta(x,t)$ удовлетворяет однородным граничным условиям. Действительно, $\eta(0,t) = \int\limits_{-1}^{0} u^*(0, t+\theta\tau)d\theta - \sigma(0,t)\int\limits_{-1}^{1}(1-|s|)\times$ $\times u^*(sh,t)ds - (1-\sigma(0,t))\int\limits_{-1}^{1}(1-|s|)u^*(sh,t-\tau)ds = 0$. Здесь учтено, что интеграл от нечетной функции по интервалу, симметричному относительно начала координат, равен нулю. Аналогично показывается, что $\eta(1,t) = 0$. Вследствие этого функции z и η принадлежат одному и тому же пространству сеточных функций X, введенному в п. 4.

Задачу для погрешности метода (6.1) представим в операторном виде

$$z_{\bar{t}} + Az^{(\Sigma)} = A\eta, \quad t \in \omega_\tau, \quad z(0) = 0, \tag{6.2}$$

где $z = (z_1, z_2, \ldots, z_{N-1})$. Покажем, что для $\eta(x,t)$ верна оценка

$$|\eta(x,t)| \le (M/\sqrt{h\tau})(\tau\|\partial u/\partial t\|_{L_2(e)} + h^2\|\partial^2 u/\partial x^2\|_{L_2(e)}), \tag{6.3}$$

где $e = (x-h, x+h) \times (t-\tau, t)$, $M > 0$ не зависит от τ, h.

Ячейку e отобразим на область $\tilde{e} = \{(s,\theta) :\ -1 < s < 1,\ -1 < \theta < 0\}$ с помощью преобразования $s = (x'-x)/h$, $\theta = (t'-t)/\tau$, $(x',t') \in e$, обозначим через $\tilde{u}(s,\theta) = u(x+sh, t+$ $+\theta\tau)$ и представим η как сумму трех слагаемых $\eta(x,t) = \int\limits_{-1}^{0}\tilde{u}(0,\theta)d\theta - \int\limits_{-1}^{1}(1-|s|)\tilde{u}(s,0)ds +$ $+\tau(1-\sigma(x,t))\int\limits_{-1}^{1}(1-|s|)\tilde{u}_{\bar{t}}(s,0)ds = I_1 + I_2 + I_3$, $I_1 = \int\limits_{-1}^{0}\int\limits_{-1}^{1}(1-|s|)(\tilde{u}(0,\theta) - \tilde{u}(s,\theta))ds\,d\theta$, $I_2 =$ $= \int\limits_{-1}^{0}\int\limits_{-1}^{1}(1-|s|)(\tilde{u}(s,\theta) - \tilde{u}(s,0))ds\,d\theta$, $I_3 = (1-\sigma(x,t))\int\limits_{-1}^{0}\int\limits_{-1}^{1}(1-|s|)(\partial\tilde{u}/\partial\theta)(s,\theta)d\theta\,ds$.

Для I_1 воспользуемся разложением в ряд Тейлора с представлением остаточного члена в интегральной форме и неравенством Коши — Буняковского

$$I_1 = \int\limits_{-1}^{0}\int\limits_{-1}^{1}(1-|s|)\Big(-s\frac{\partial\tilde{u}(0,\theta)}{\partial s} + \int\limits_{s}^{0}(s-s')\frac{\partial^2\tilde{u}(s',\theta)}{\partial s'^2}ds'\Big)ds\,d\theta \le \int\limits_{-1}^{0}\int\limits_{-1}^{1}\frac{(1-|s|)|s|^{3/2}}{\sqrt{3}}\times$$

$$\times\Big(\int\limits_{-1}^{1}\Big(\frac{\partial^2\tilde{u}(s',\theta)}{\partial s'^2}\Big)^2 ds'\Big)^{1/2} ds\,d\theta = \frac{4}{5\sqrt{3}}\Big\|\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial s^2}\Big\|_{L_2(\tilde{e})} = \frac{4}{5\sqrt{3}}\,\frac{h^2}{\sqrt{h\tau}}\,\Big\|\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Big\|_{L_2(e)}. \tag{6.4}$$

Функционалы I_2, I_3 оцениваются также через неравенство Коши — Буняковского

$$I_2 = \int\limits_{-1}^{0}\int\limits_{-1}^{1}(1-|s|)\int\limits_{0}^{\theta}\frac{\partial\tilde u(s,\theta')}{\partial\theta'}d\theta' ds d\theta \le \int\limits_{-1}^{0}\sqrt{-\theta}\int\limits_{-1}^{1}(1-|s|)\times$$

$$\times\left(\int\limits_{-1}^{0}\left(\frac{\partial\tilde u(s,\theta')}{\partial\theta'}\right)^2 d\theta'\right)^{1/2} ds\, d\theta = \frac{2}{3}\left\|\frac{\partial\tilde u}{\partial\theta}\right\|_{L_2(\tilde e)} = \frac{2}{3}\frac{\tau}{\sqrt{h\tau}}\left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|_{L_2(e)}, \tag{6.5}$$

$$I_3 \le (1+\gamma)\int\limits_{-1}^{1}(1-|s|)\left(\int\limits_{-1}^{0}\left(\frac{\partial\tilde u(s,\theta')}{\partial\theta'}\right)^2 d\theta'\right)^{1/2} ds \le \frac{\sqrt{2}(1+\gamma)}{\sqrt{3}}\left\|\frac{\partial\tilde u}{\partial\theta}\right\|_{L_2(\tilde e)} = \frac{\sqrt{2}(1+\gamma)\tau}{\sqrt{3h\tau}}\left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|_{L_2(e)},$$

где γ из теоремы 4.

Объединяя оценки (6.4) и (6.5), приходим к (6.3). Суммируя по всем ячейкам сетки, окончательно получаем

$$\|\eta\|_{h\tau} \le M(h^2\|\partial^2 u/\partial x^2\|_{L_2(Q_T)} + \tau\|\partial u/\partial t\|_{L_2(Q_T)}). \tag{6.6}$$

Теорема 5. *Пусть выполнены условия теоремы 4. Тогда решение разностной схемы (3.1) сходится в сеточном пространстве $L_{2,h}(\omega_{h\tau})$ к осреднению $\tilde u$ и имеет место оценка скорости сходимости*

$$\|z\|_{h\tau} = \|y - S_x^2 u\|_{h\tau} \le M(h^2\|\partial^2 u/\partial x^2\|_{L_2(Q_T)} + \tau\|\partial u/\partial t\|_{L_2(Q_T)}). \tag{6.7}$$

Доказательство. Применяя априорную оценку (5.2) к решению задачи (6.2), получаем неравенство $\|z\|_{h\tau} \le M\|\eta\|_{h\tau}$, подставляя в которое оценку (6.6), приходим к утверждению теоремы.

Замечание 1. Для схем с не зависящими от пространства и времени весами имеет место оценка (6.6) при $\sigma \ge \sigma_\varepsilon = (1+\varepsilon)/2 - h^2/(4\tau)$, $0 < \varepsilon < 2$.

Замечание 2. Мы рассмотрели сходимость разностного решения к осреднению $S_x^2 u$ только ради упрощения изложения. Использую теорию интерполяции пространств Банаха [23], можно показать, что имеет место оценка $\|y - u\|_{h\tau} \le M(h^2+\tau)\|u\|_{W_2^{2,1}(Q_T)}$.

7. Разностные схемы на адаптивно-временной сетке. Наряду с временной сеткой ω_τ введем еще одну $\omega_{\tau 0}$ с шагом $\tau_0 = \tau/p$ ($p \ge 1$ — целое число) $\overline{\omega}_{\tau_0} = \{t_\alpha = t_{j+\alpha/p} = (j+\alpha/p)\tau$, $\alpha = \overline{0,p}$, $j = \overline{0, j_0 - 1}\}$. Область $Q^j = \Omega\times[t_j, t_{j+1}]$ при каждом фиксированном j представим в виде суммы $Q^j = Q_1^j \cup Q_2^j$, $Q_1^j = Q^j\backslash Q_2^j$, $Q_2^j = \{(x,t) : x_{m_1^j} < x < x_{m_2^j},\ t\in[t_j, t_{j+1}]\}$. Множество узлов сетки $\omega_{h\tau_0} = \omega_h\times\omega_{\tau_0}$, лежащих в области Q_2^j, будем обозначать через $\omega_2^j = \{(x_i, t_{j+\alpha/p}) : m_1^j < i < m_2^j,\ \alpha = \overline{0,p},\ m_1^j \ge 1,\ m_2^j \le N-1\}$. Тогда $\omega_1^j = \omega_{h\tau_0}\backslash\omega_2^j$ — множество узлов сетки $\omega_{h\tau_0}$, принадлежащих области Q_1^j. В это множество входят и внутренние граничные узлы $x_{m_1^j} = m_1^j h$, $x_{m_2^j} = m_2^j h$.

Будем предполагать, что решение $u(x,t)$ в области Q_1^j является достаточно гладкой функцией, а в Q_2^j имеет особенность, движущуюся со временем. Последнее приводит к необходимости использования во время расчетов некоторого достаточно мелкого временного шага τ_0.

Исходную дифференциальную задачу (2.1) — (2.3) на сетке $\omega_{h\tau_0}$ аппроксимируем разностной

$$y_{\bar t,\alpha} = (y_{(\alpha)}^{(\sigma_\alpha)})_{\bar x x} + \varphi(\alpha), \quad (x,t)\in\omega_{h\tau_0}, \quad \varphi(\alpha) = \frac{1}{\tau_0}\int\limits_{t+(\alpha-1)\tau_0}^{t+\alpha\tau_0} S_x^2 f\, dt', \tag{7.1}$$

$$y(x,0) = S_x^2 u_0(x), \quad x\in\omega_h, \quad y(0, t_{j+\alpha/p}) = y(1, t_{j+\alpha/p}) = 0, \quad t\in\overline{\omega}_\tau. \tag{7.2}$$

$$\sigma_\alpha = \begin{cases} \alpha, & 0 < x \le x_{m_1^j} + h,\ x_{m_2^j} - h \le x < 1, \\ \overline{\sigma}, & x_{m_1^j} + h < x < x_{m_2^j} - h, \end{cases} \tag{7.3}$$

где $\overline{\sigma} > 0$ — произвольный числовой параметр, выбираемый из соображений устойчивости.

Построенная разностная схема относится к семейству схем с переменными весовыми множителями вида (3.1), где сеточная функция зависит σ_α как от номера дробного слоя $t_{j+\alpha/p}$ ($\alpha = \overline{1,p}$), так и от узла $x \in \omega_h$.

Рассмотрим вопрос об организации вычислительного процесса. Покажем, как с помощью построенной разностной схемы можно находить решение на дробных слоях лишь в области негладкого решения $\overline{\omega}_2^j$. Для этого в формуле (7.1) необходимо исключить значения приближенного решения на слое $t_{j+(\alpha-1)/p}$. Это позволяет сделать

Лемма 2. *Разностная схема*

$$\frac{y_{(\alpha)} - y_{(0)}}{\alpha\tau_0} + Ay_{(\alpha)} = \overline{\varphi}_{(\alpha)}, \quad \overline{\varphi}_{(\alpha)} = \frac{1}{\alpha\tau_0}\int_t^{t+\alpha\tau_0} S_x^2 f\,dt', \tag{7.4}$$

алгебраически эквивалентна

$$y_{\bar{t},\alpha} + \alpha Ay_{(\alpha)} + (1-\alpha)Ay_{(\alpha-1)} = \varphi_{(\alpha)}. \tag{7.5}$$

Доказательство. Запишем (7.4) в виде

$$(y_{(\alpha)} - y_{(\alpha-1)})/\tau_0 + (y_{(\alpha-1)} - y_{(0)})/\tau_0 + \alpha Ay_{(\alpha)} = \alpha\overline{\varphi}_{(\alpha)}. \tag{7.6}$$

Из (7.4) также следует равенство

$$(y_{(\alpha-1)} - y_{(0)})/\tau_0 = -(\alpha-1)Ay_{(\alpha-1)} + (\alpha-1)\overline{\varphi}_{(\alpha-1)},$$

подставляя которое в (7.6), получаем

$$(y_{(\alpha)} - y_{(\alpha-1)})/\tau_0 + (y_{(\alpha-1)} - y_{(0)})/\tau_0 + \alpha Ay_{(\alpha)} + (1-\alpha)Ay_{(\alpha-1)} = \alpha\overline{\varphi}_{(\alpha)} - (\alpha-1)\overline{\varphi}_{(\alpha-1)}. \tag{7.7}$$

Оценим выражение, стоящее в правой части (7.7):

$$\alpha\overline{\varphi}_{(\alpha)} - (\alpha-1)\overline{\varphi}_{(\alpha-1)} = \frac{1}{\tau_0}\int_t^{t+\alpha\tau_0} S_x^2 f\,dt' - \frac{1}{\tau_0}\int_t^{t+(\alpha-1)\tau_0} S_x^2 f\,dt' = \frac{1}{\tau_0}\int_{t+(\alpha-1)\tau_0}^{t+\alpha\tau_0} S_x^2 f\,dt' = \varphi_{(\alpha)}.$$

Отсюда и из (7.7) следует требуемое утверждение.

В силу доказанной леммы об эквивалентности разностных схем уравнение (7.1) можно преобразовать к виду

$$(y_{(\alpha)}-y_{(0)})/(\alpha\tau_0)+Ay_{(\alpha)} = \overline{\varphi}_{(\alpha)}, \ (x,t) \in \omega_1^j; \quad (y_{(\alpha)}-y_{(\alpha-1)})/\tau_0+Ay_{(\alpha)}^{(\sigma_\alpha)} = \varphi_{(\alpha)}, \ (x,t) \in \omega_2^j. \tag{7.8}$$

Эти разностные уравнения на каждом дробном слое сводятся к системе трехточечных уравнений

$$A_i y_{(\alpha)i-1} - C_i y_{(\alpha)i} + B_i y_{(\alpha)i+1} = -F_i, \quad i = \overline{1, N-1}, \quad y_{(\alpha)0} = y_{(\alpha)N} = 0, \tag{7.9}$$

со следующими значениями коэффициентов:

$$A_i = \begin{cases} \alpha\tau_0/h^2, & i = \overline{1, m_1^j+2}, \ i = \overline{m_2^j, N-1}, \\ \overline{\sigma}\tau_0/h^2, & i = \overline{m_1^j+1, m_2^j-1}, \end{cases} \quad B_i = \begin{cases} \alpha\tau_0/h^2, & i = \overline{1, m_1^j}, \ i = \overline{m_2^j-2, N-1}, \\ \overline{\sigma}\tau_0/h^2, & i = \overline{m_1^j+1, m_2^j-3}, \end{cases}$$

$$C_i = \begin{cases} 1 + 2\alpha\tau_0/h^2, & i = \overline{1, m_1^j+1}, \ i = \overline{m_2^j-1, N-1}, \\ 1 + 2\overline{\sigma}\tau_0/h^2, & i = \overline{m_1^j+2, m_2^j-2}, \end{cases}$$

$$F_i = \begin{cases} y_{(0)i} + \alpha\tau_0\overline{\varphi}_{(\alpha)i}, & i = \overline{1, m_1^j}, \ i = \overline{m_2^j, N-1}, \\ y_{(\alpha)i-1} + \tau_0(\varphi_{(\alpha)i} + ((1-\sigma_\alpha)y_{(\alpha)i-1})_{\bar{x}x,i}), & i = \overline{m_1^j+1, m_2^j-1}. \end{cases} \tag{7.10}$$

Проверим условие монотонности прогонки: $D_i = C_i - A_i - B_i \geq 0$, $C_i > 0$, $A_i > 0$, $B_i > 0$. Имеем

$$D_i = \begin{cases} 1, & i = \overline{1, m_1^j},\ i = \overline{m_1^j + 3, m_2^j - 3},\ i = \overline{m_2^j, N-1}, \\ 1 + \tau_0(\alpha - \overline{\sigma})/h^2, & i = m_1^j + 1, m_2^j - 1, \\ 1 + \tau_0(\overline{\sigma} - \alpha)/h^2, & i = m_1^j + 2, m_2^j - 2, \end{cases} \tag{7.11}$$

откуда видно, для того чтобы $D_i \geq 0$, необходимо потребовать $\tau_0 \leq h^2/|\overline{\sigma} - \alpha|$, что является неприемлемым. Замена переменных $v = \sigma_\alpha y_{(\alpha)}$ приводит систему алгебраических уравнений (7.9) к системе уравнений

$$h^{-2}\tau_0\sigma_{\alpha,i}v_{i-1} - (1 + h^{-2}\cdot 2\tau_0\sigma_{\alpha,i})v_i + h^{-2}\tau_0\sigma_{\alpha,i}v_{i+1} = -\sigma_{\alpha,i}F_i, \quad i = \overline{1, N-1}, \quad v_0 = v_N = 0, \tag{7.12}$$

где F_i из (7.10), а $D_i = 1$. Таким образом, для новой системы достаточное условие устойчивости метода прогонки выполнено без ограничения на шаги τ и h (схема безусловно монотонна).

Как можно заметить, в системе трехточечных уравнений (7.12) коэффициенты не зависят от сеточной функции $y_{(\alpha-1)}$ в области ω_1^j. Для нахождения решения при $\alpha < p$ только в области $\tilde{\omega}_2^j$ необходимо использовать метод встречных прогонок, согласно которому, вначале определяем граничное условие $v_{m_1^j}$, а затем решение v_i при $i = \overline{m_1^j + 1, m_2^j}$ находим по формулам левой прогонки и делаем обратную замену $y_{(\alpha)} = v/\sigma_\alpha$. При $\alpha = p$ решение y^{j+1} требуется вычислять уже при всех $x \in \omega_h$, что делается стандартным образом.

Нетрудно показать, что при выполнении условий $\overline{\sigma} \geq \sigma_\varepsilon > 0$, $2/3 < \varepsilon < 2$, для разностной схемы (7.1), (7.2) справедливо неравенство $\sigma(x, t+\tau_0) - \sigma(x,t) \leq \Delta = 1$ и поэтому верны следующие априорные оценки, выражающие устойчивость по правой части и начальным данным:

$$\|y(t)\|_h \leq \|y_0\|_h + \|A^{-1}\varphi(t)\|_h + \|A^{-1}\varphi(0)\|_h + \|A^{-1}\varphi_{\bar{t}}(t)\|_{h\tau_0}, \quad (x,t) \in \omega_{h\tau_0},$$

$$\|y\|_{h\tau_0} \leq M_1(\|y_0\|_{A^{-1},h} + \|y_0\|_h) + M_2\|A^{-1}\varphi\|_{h\tau_0},$$

которые вытекают непосредственно из теорем 3 и 4.

Аналогично устанавливается оценка для погрешности разностной схемы (7.1), (7.2) вида (6.7) с $\tau = \tau_0$.

8. Заключение. Итак, для разностных схем с переменными весовыми множителями на основе общей теории операторно-разностных схем получены согласованные с гладкостью искомого решения оценки скорости сходимости. Для этого существенно использовалось специальное представление погрешности аппроксимации в виде $\psi = A\eta$. На основе полученных результатов построены и исследованы новые классы безусловно устойчивых разностных схем на адаптивно-временных сетках для параболического уравнения с обобщенными решениями.

Отдельного рассмотрения заслуживают нестационарные задачи с переменными коэффициентами.

Авторы выражают благодарность П. Н. Вабищевичу за ряд ценных замечаний и полезные обсуждения.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского, Белорусского и Сербского фондов фундаментальных исследований.

Литература

1. *Самарский А. А.* Теория разностных схем. М., 1977.
2. *Матус П. П.* // Дифференц. уравнения. 1990. Т. 26, № 7. С. 1241 — 1254.
3. *Матус П. П.* // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 1994. Т. 34, № 6. С. 870 — 885.
4. *Самарский А. А., Гулин А. В.* // Дифференц. уравнения. 1993. Т. 29, № 7. С. 1163 — 1173.
5. *Вабищевич П. Н., Матус П. П.* // Докл. АН Беларуси. 1993. Т. 37, № 6. С. 15 — 17.
6. *Вабищевич П. Н., Матус П. П., Щеглик В. С.* // Докл. АН Беларуси. 1994. Т. 38, № 3. С. 13 — 15.
7. *Вабищевич П. Н., Матус П. П., Щеглик В. С.* // Дифференц. уравнения. 1994. Т. 30, № 7. С. 1175 — 1186.
8. *Матус П. П., Михайлюк И. А.* // Математическое моделирование. 1993. Т. 5, № 12. С. 35 — 60.
9. *Матус П. П.* // Дифференц. уравнения. 1993. Т. 29, № 4. С. 700 — 710.
10. *Самарский А. А., Лазаров Р. Д., Макаров В. Л.* Разностные схемы для дифференциальных уравнений с обобщенными решениями. М., 1987.

11. *Самарский А. А.* // Актуальные проблемы мат. физики и вычислит. математики. М., 1984. С. 174 — 183.

12. *Лазаров Р. Д., Самарский А. А.* // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 1980. Т. 20, № 2. С. 371 — 387.

13. *Лазаров Р. Д., Макаров В. Л.* // Докл. АН СССР. 1981. Т. 259, № 3. С. 282 — 286.

14. *Лазаров Р. Д.* // Докл. Болг. АН. 1982. Т. 35, № 1. С. 7 — 10.

15. *Злотник А. А.* // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 1978. Т. 18, № 6. С. 1454 — 1465.

16. *Йованович Б. С.* // Математички Весник. Белград. 1982. Т. 34. С. 279 — 292.

17. *Иванович Л. Д., Йованович Б. С., Шили Э. Э.* // Математички Весник. Белград, 1984. Т. 36. С. 206 — 212.

18. *Вабищевич П. Н., Матус П. П.* // Весцi АН Беларусi. Сер. фiз.-мат. навук. 1994. № 4. С. 5 — 11.

19. *Вабищевич П. Н.* // Изв. вузов. Математика. 1995. № 4. С. 22 — 28.

20. *Самарский А. А., Гулин А. В.* Устойчивость разностных схем. М., 1973.

21. *Ладыженская О. А.* Краевые задачи математической физики. М., 1973.

22. *Михайлов В. П.* Дифференциальные уравнения в частных производных. М., 1983.

23. *Lions J. L., Magenes E.* Problèmes aux limites non homogènes et applications. Paris, 1968.

Институт математического моделирования РАН,
Белградский университет,
Институт математики АН Беларуси

Поступила в редакцию
30 декабря 1996 г.