1997. Т. 33, № 7. С. 967 — 974

УДК 519.63

ФАКТОРИЗОВАННЫЕ РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ ДЕКОМПОЗИЦИИ ОБЛАСТИ ДЛЯ ЗАДАЧ КОНВЕКЦИИ-ДИФФУЗИИ

А. А. Самарский, П. Н. Вабищевич

Введение. В настоящее время наиболее полные результаты получены при использовании метода декомпозиции области для эллиптических уравнений второго порядка [1 — 4]. Большое прикладное значение имеют задачи для несамосопряженных параболических уравнений — нестационарные задачи конвекции-диффузии. При применении методов декомпозиции для нестационарных задач рассматриваются два подхода. Первый класс методов связан с использованием стандартных неявных схем по времени. Для решения соответствующих дискретных эллиптических задач на каждом временном слое привлекаются итерационные методы декомпозиции в различных вариантах [3 — 5].

Второй класс методов связан с построением безытерационных методов декомпозиции области при решении нестационарных задач. Первой работой по данному направлению является статья [6]. Среди более поздних исследований отметим работы [7 — 14], в которых предложены различные варианты схем декомпозиции области типа разностных схем переменных направлений, локально-одномерных схем. К классу методов декомпозиции области тесно примыкают схемы с переменными шагами по времени (см., например, [15 — 17]). В работах [18, 19] для определения приближенного решения на интерфейсных границах используется своя разностная схема.

В отмеченных выше работах [7 — 14] рассматривались параболические задачи с самосопряженным эллиптическим оператором. В нашей работе обсуждаются проблемы применения методов декомпозиции для более общих эволюционных задач с несамосопряженными операторами. Некоторые разностные схемы декомпозиции области для задач конвекции-диффузии построены в [20, 21]. В настоящей работе для модельной задачи конвекции-диффузии предлагаются и исследуются факторизованные регионально-аддитивные схемы, для которых устанавливается безусловная устойчивость и условная сходимость. Для задач с минимальным наложением подобластей дается оценка для погрешности приближенного решения типа $O(\tau|h|^{-1/2})$, где τ, h — шаги сетки по времени и пространству соответственно. Результаты работы анонсированы в [22].

Модельная задача конвекции-диффузии. В двумерной области Ω ищется решение параболического уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{\alpha=1}^{2} v_\alpha(\mathbf{x}, t)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha} - \sum_{\alpha=1}^{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha^2} = 0, \quad \mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \Omega, \quad t > 0, \tag{1}$$

дополненного однородными граничными условиями Дирихле

$$u(\mathbf{x}, t) = 0, \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega, \quad t > 0, \tag{2}$$

и, кроме того, начальным условием

$$u(\mathbf{x}, 0) = u_0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega. \tag{3}$$

В (1) функции $v_\alpha(\mathbf{x}, t)$, $\alpha = 1, 2$ (компоненты скорости), определяют конвективный перенос и записаны в недивергентной форме.

Будем считать среду несжимаемой, т.е.

$$\sum_{\alpha=1}^{2} \frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\alpha} = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad t > 0. \tag{4}$$

С учетом (4) перепишем уравнение (1) в виде

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\sum_{\alpha=1}^{2}\frac{\partial(v_\alpha u)}{\partial x_\alpha}-\sum_{\alpha=1}^{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha^2}=0,\quad \mathbf{x}\in\Omega,\quad t>0,$$

который соответствует использованию дивергентной записи конвективных слагаемых. Основой нашего рассмотрения является применение симметричной формы конвективных слагаемых, когда уравнение конвекции-диффузии имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{2}v_\alpha(\mathbf{x},t)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}+\frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{2}\frac{\partial(v_\alpha u)}{\partial x_\alpha}-\sum_{\alpha=1}^{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha^2}=0,\quad \mathbf{x}\in\Omega,\quad t>0. \tag{5}$$

Для уравнения (5) наиболее просто строить консервативные безусловно устойчивые разностные схемы.

Дифференциально-разностная задача. Будем считать без ограничения общности, что в области Ω можно ввести согласованную с границей равномерную по каждому направлению x_α сетку с постоянными шагами h_α, $\alpha=1,2$, и обозначим через ω множество внутренних узлов, а через $\partial\omega$ множество граничных узлов.

Пусть $y(\mathbf{x},t)$, $\mathbf{x}\in\bar{\omega}=\omega\cup\partial\omega$, — разностное решение задачи конвекции-диффузии на момент времени t. Ограничимся случаем, когда расчетная область Ω — прямоугольник с длинами сторон l_α, $\alpha=1,2$. Построение разностных схем в более общих случаях проводится аналогично. Это замечание относится и к построению конечно-элементных аппроксимаций по пространству. Для того чтобы подчеркнуть это, используем операторную формулировку задачи.

Для построения разностных схем второго порядка аппроксимации по пространственным переменным для уравнений конвекции-диффузии (1) — (3), (5) используем обычный пятиточечный шаблон "крест". Будем применять стандартные безындексные обозначения теории разностных схем [23]. Для правой и левой разностных производных по переменной x_α, $\alpha=1,2$, имеем соответственно $w_{x_\alpha}=(w(x_\alpha+h_\alpha)-w(x_\alpha))/h_\alpha$, $w_{\bar{x}_\alpha}=(w(x_\alpha)-w(x_\alpha-h_\alpha))/h_\alpha$, $\alpha=1,2$. Для центральной производной используется выражение $w_{\overset{\circ}{x}_\alpha}=0{,}5(w_{x_\alpha}+w_{\bar{x}_\alpha})=$ $=(w(x_\alpha+h_\alpha)-w(x_\alpha-h_\alpha))/(2h_\alpha)$, $\alpha=1,2$.

Пусть Λ — двумерный разностный оператор Лапласа, $\Lambda y=-\sum\limits_{\alpha=1}^{2}y_{\bar{x}_\alpha x_\alpha}$. Поставим в соответствие задаче (2), (3), (5) дифференциально-разностную задачу

$$\begin{gathered}\frac{dy}{dt}+\frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{2}\left(b_\alpha y_{\overset{\circ}{x}_\alpha}+(b_\alpha y)_{\overset{\circ}{x}_\alpha}\right)+\Lambda y=0,\quad \mathbf{x}\in\omega,\\ y(\mathbf{x},t)=0,\quad \mathbf{x}\in\partial\omega,\quad t>0,\quad y(\mathbf{x},0)=u_0(\mathbf{x}),\quad \mathbf{x}\in\bar{\omega}.\end{gathered} \tag{6}$$

Для задач с достаточно гладкими коэффициентами можно ограничиться простейшими аппроксимациями конвективных слагаемых, для которых $b_\alpha(\mathbf{x},t)=v_\alpha(\mathbf{x},t)$, $\mathbf{x}\in\omega$, $t>0$.

Для сеточных функций, обращающихся в нуль на $\partial\omega$, определим гильбертово пространство H, скалярное произведение и норму в котором введем соотношениями: $(v,w)=$ $=\sum\limits_{\mathbf{x}\in\omega}v(\mathbf{x})w(\mathbf{x})h_1h_2$, $\|v\|=\sqrt{(v,v)}$. Дифференциально-разностную задачу в H запишем в виде эволюционного уравнения

$$dy/dt+Ay=0,\quad \mathbf{x}\in\omega,\quad t>0, \tag{7}$$

при заданном $y(\mathbf{x},0)$, $\mathbf{x}\in\omega$. Оператор A представим в виде

$$A=V(\mathbf{b})+\Lambda, \tag{8}$$

где $V(\mathbf{b})$ — сеточный оператор, соответствующий конвективному переносу. Принимая во внимание (6), имеем

$$V(\mathbf{b})y=\frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{2}\left(b_\alpha y_{\overset{\circ}{x}_\alpha}+(b_\alpha y)_{\overset{\circ}{x}_\alpha}\right). \tag{9}$$

Для сеточных функций $y\in H$ и любых векторов $\mathbf{b}=(b_1,b_2)$

$$V(\mathbf{b})=-V^*(\mathbf{b}), \tag{10}$$

т.е. разностный оператор конвективного переноса в форме (9) является кососимметричным.

Для несамосопряженного оператора A выделим симметричную (S) и кососимметричную (K) части:

$$A = S + K, \tag{11}$$

где $S = 0{,}5(A + A^*)$, $K = 0{,}5(A - A^*)$.

Для задачи (7) с учетом (8), (10) и самосопряженности сеточного оператора Лапласа Λ [23] имеем

$$S = \Lambda, \quad K = V(\mathbf{b}). \tag{12}$$

Таким образом, в разностной задаче конвекции-диффузии (6) симметричная часть сеточного оператора соответствует диффузии, а кососимметричная — конвективному переносу. Еще раз подчеркнем, что эти важнейшие свойства имеют место без какого-либо согласования уравнения конвекции-диффузии и уравнения неразрывности (4).

Разностные схемы с весами. Построим и исследуем на устойчивость простейшие разностные схемы для приближенного решения задачи (6), которые будут служить нам ориентиром в дальнейшем при рассмотрении схем декомпозиции области. Обозначим через y_n разностное решение на момент времени $t_n = n\tau$, где $\tau > 0$ — шаг по времени. Запишем для уравнения (7), (11) двухслойную разностную схему с весами

$$(y_{n+1} - y_n)/\tau + S(\sigma_1 y_{n+1} + (1-\sigma_1)y_n) + K(\sigma_2 y_{n+1} + (1-\sigma_2)y_n) = 0, \quad \mathbf{x} \in \omega, \quad n = 0, 1, \ldots, \tag{13}$$

которую дополним начальным условием $y(\mathbf{x}, 0) = u_0(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \omega$.

Для исследования устойчивости запишем схему (13) в каноническом виде [23]

$$B(y_{n+1} - y_n)/\tau + Ay_n = 0, \quad n = 0, 1, \ldots \tag{14}$$

Здесь сеточные операторы B и A имеют вид

$$B = E + \tau\sigma_1 S + \tau\sigma_2 K, \quad A = S + K > 0. \tag{15}$$

Исследуемая разностная схема с весами характеризуется тем, что оба оператора B и A несамосопряженные.

Рассмотрим класс схем (14), (15) с одинаковыми весами $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$, тогда сеточные операторы (15) примут вид

$$B = E + \tau\sigma A, \quad A \neq A^*. \tag{16}$$

Имеет место [23, 24]

Теорема 1. *Для устойчивости разностной схемы с весами (14), (16) с $A > 0$ в H необходимо и достаточно выполнения операторного неравенства*

$$A + \tau(\sigma - 1/2)A^*A \geq 0. \tag{17}$$

Очевидно, что последнее неравенство будет выполнено при $\sigma \geq 0{,}5$, т.е. в этом случае имеем абсолютно устойчивую разностную схему. При рассмотрении более общих задач (например, при использовании схем конечных элементов, граничных условий Неймана и т.д.) можно ориентироваться на достаточные условия устойчивости $\sigma \geq 0{,}5$.

Теорема 2. *Пусть в схеме (14)*

$$B = D + \tau\sigma A, \quad A \neq A^*, \tag{18}$$

где $D = D^* > 0$. Тогда при $A \geq 0$ условие $\sigma \geq 0{,}5$ достаточно для устойчивости схемы с весами (14), (18) в H_D.

Доказательство. Перепишем схему (14), (18) в виде

$$D(y_{n+1} - y_n)/\tau + Av_{n+1} = 0, \quad n = 0, 1, \ldots, \tag{19}$$

где $v_{n+1} = \sigma y_{n+1} + (1 - \sigma y_n) = (\sigma - 1/2)y_t + 0{,}5(y_{n+1} + y_n)$, $y_t = (y_{n+1} - y_n)/\tau$. Домножая скалярно уравнение (19) на v_{n+1}, получим $(\sigma - 1/2)\tau(Dy_t, y_t) + A(v_{n+1}, v_{n+1}) + (1/(2\tau))((Dy_{n+1}, y_{n+1}) - (Dy_n, y_n)) = 0$. Из этого равенства в условиях теоремы следует оценка $(Dy_{n+1}, y_{n+1}) \leq (Dy_n, y_n))$, т.е. схема (14), (18) устойчива в H_D.

При $\sigma < 0{,}5$ имеет место условная устойчивость схемы с весами (14), (16). Предположим, что справедлива оценка

$$\|Ay\|^2 \le \Delta(Ay, y). \tag{20}$$

Тогда неравенство (17) будет выполнено при $\sigma \ge 1/2 - 1/(\Delta\tau)$, или

$$\tau \le \tau_0 = 2/(\Delta(1-2\sigma)). \tag{21}$$

Конкретизируем условия (21) при использовании схемы (13). Для этого привлекается следующее утверждение о подчиненности оператора конвективного переноса K оператору диффузионного переноса S.

Лемма 1. *Для операторов K и S, определенных согласно (9), (12), имеет место неравенство*

$$\|Ky\|^2 \le M(Sy, y) \tag{22}$$

с

$$M = M(t) = 3\max_\alpha \|b_\alpha^2(\mathbf{x}, t)\|_C + M_0 \Big\|\sum_{\alpha=1}^{2} (b_\alpha(\mathbf{x}, t))_{\overset{\circ}{x}_\alpha}\Big\|_C^2, \quad M_0^{-1} = 8\left(\frac{1}{l_1^2} + \frac{1}{l_2^2}\right),$$

где l_α, $\alpha = 1, 2$, — длины сторон прямоугольника Ω и $\|w(\mathbf{x})\|_C = \max\limits_{\mathbf{x}\in\bar\omega} |w(\mathbf{x})|$.

Доказательство. Рассмотрим отдельно недивергентную и дивергентную части оператора конвективного переноса (9):

$$K = 0{,}5(K_1 + K_2). \tag{23}$$

Для недивергентной части имеем

$$\|K_1 y\|^2 = \sum_{\mathbf{x}\in\omega}\left(\sum_{\alpha=1}^{2} b_\alpha y_{\overset{\circ}{x}_\alpha}\right)^2 h_1 h_2 \le 2\sum_{\alpha=1}^{2}\sum_{\mathbf{x}\in\omega} b_\alpha^2 (y_{\overset{\circ}{x}_\alpha})^2 h_1 h_2 \le$$

$$\le 2\max_{\mathbf{x}\in\omega}\{\|b_\alpha^2\|_C\} \sum_{\alpha=1}^{2}\sum_{\mathbf{x}\in\omega} \frac{1}{4}(y_{x_\alpha} + y_{\bar{x}_\alpha})^2 h_1 h_2 \le$$

$$\le \max_\alpha\{\|b_\alpha^2\|_C\} \sum_{\alpha=1}^{2}\sum_{\mathbf{x}\in\omega}((y_{x_\alpha})^2 + (y_{\bar{x}_\alpha})^2) h_1 h_2 \le 2\max_\alpha\{\|b_\alpha^2\|_C\}(Sy, y).$$

Для дивергентной части K_2 соответствующую оценку получим на основе равенства $(w(\mathbf{x})y)_{\overset{\circ}{x}_1} = 0{,}5w(x_1 + h_1, x_2)y_{x_1} + 0{,}5w(x_1 - h_1, x_2)y_{\bar{x}_1} + y(\mathbf{x})w_{\overset{\circ}{x}_1}$. Непосредственные выкладки дают

$$\|K_2 y\|^2 = \sum_{\mathbf{x}\in\omega}\left(\sum_{\alpha=1}^{2}(b_\alpha y)_{\overset{\circ}{x}_\alpha}\right)^2 h_1 h_2 \le 4\max_\alpha\{\|b_\alpha^2\|_C\}(Sy, y) + 2\Big\|\sum_{\alpha=1}^{2}(b_\alpha)_{\overset{\circ}{x}_\alpha}\Big\|_C^2 \|y\|^2.$$

Имеет место (см., например, [25]) следующая оценка оператора Лапласа снизу (разностное неравенство Фридрихса): $\|y\|^2 \le M_0(Sy, y)$ с постоянной M_0 из условий леммы. С учетом (23) получим $\|Ky\|^2 \le 0{,}5(\|K_1 y\|^2 + \|K_2 y\|^2) \le M(Sy, y)$, что завершает доказательство леммы.

Принимая во внимание оценку сеточного оператора Лапласа сверху, установленное неравенство подчиненности (22), имеем $\|Ay\|^2 = \|(K+S)y\|^2 \le 2(\|Ky\|^2 + \|Sy\|^2) \le 2M(Sy, y) + 8(h_1^{-2} + h_2^{-2})(Sy, y)$, откуда с учетом кососимметричности оператора K для постоянной Δ в (20) получим $\Delta = 2M + 8(h_1^{-2} + h_2^{-2})$. Тем самым постоянная $\Delta = O(h_1^{-2} + h_2^{-2})$ и зависит от самой скорости конвективного переноса.

Среди схем с весами (13) заслуживает отдельного рассмотрения схема, когда конвективные слагаемые берутся с предыдущего временного слоя, т.е.

$$\sigma_1 = \sigma, \quad \sigma_2 = 0, \tag{24}$$

тогда явно-неявная схема (13), (24) записывается в каноническом виде (14) с

$$B = E + \tau\sigma S, \quad A = S + K. \tag{25}$$

Рассмотрим условия устойчивости схемы (14), (25). В общем случае положим

$$A = A_0 + A_1, \tag{26}$$

где $A_0 = 0{,}5(A + A^*)$, $A_1 = 0{,}5(A - A^*)$. Схема (14), (25) соответствует схеме (14), (26) и выбору оператора

$$B = E + \tau\sigma A_0, \quad A_0 > 0. \tag{27}$$

Исследование устойчивости схемы (14), (26), (27) проведем при дополнительном условии подчиненности кососимметричной части оператора A:

$$\|A_1 y\|^2 \le M(A_0 y, y). \tag{28}$$

Лемма 2. *Для разностной схемы (14), (26) при $A_0 > 0$, выполнении неравенства подчиненности (28) и условия*

$$B - 0{,}5\tau A \ge \varepsilon E, \quad \varepsilon > 0, \tag{29}$$

верна оценка

$$\|y_{n+1}\|_{A_0} \le (1 + M\tau/(4\varepsilon))\|y_n\|_{A_0}. \tag{30}$$

Доказательство. Умножим скалярно (14) на $2\tau y_t = 2(y_{n+1} - y_n)$ и с учетом (26) получим энергетическое тождество $\tau((2B - \tau A)y_t, y_t) + (A_0 y_{n+1}, y_{n+1}) - (A_0 y_n, y_n) + 2\tau(A_1 y_n, y_t) = 0$. Принимая во внимание неравенство (30) и условие (29), отсюда имеем неравенство

$$2\tau\varepsilon(y_t, y_t) + (A_0 y_{n+1}, y_{n+1}) - (A_0 y_n, y_n) \le 2\tau| - (A_1 y_n, y_t)|. \tag{31}$$

Для правой части (31) с учетом (28) получим оценку

$$| - (A_1 y_n, y_t)| \le \varepsilon\|y_t\|^2 + (1/(4\varepsilon))\|A_1 y_n\|^2 \le \varepsilon\|y_t\|^2 + (M/(4\varepsilon))(A_0 y_n, y_n), \tag{32}$$

подставляя которую в (31), приходим к неравенству $(A_0 y_{n+1}, y_{n+1}) \le (1 + M/(2\varepsilon))(A_0 y_n, y_n)$. Отсюда с учетом неравенства $\sqrt{1 + M/(2\varepsilon)} \le 1 + M/(4\varepsilon)$ и следует искомая оценка устойчивости (30).

Используем теперь доказанное утверждение для исследования явно-неявной разностной схемы (13), (24), которую записываем в каноническом виде (14), (25). Имеем $A_0 = S$, $A_1 = K$ и в силу леммы 1 справедлива оценка (22). При $\sigma \ge 0{,}5$ в неравенстве (29) можем положить $\varepsilon = 1$ и в этих условиях имеет место неравенство

$$\|y_{n+1}\|_S \le (1 + (M/4)\tau)\|y_n\|_S \tag{33}$$

для явно-неявной схемы (6), (24). Таким образом, справедлива

Теорема 3. *При $\sigma \ge 0{,}5$ явно-неявная разностная схема (13), (24) устойчива в H_S и для решения верна априорная оценка (33).*

Факторизованная регионально-аддитивная схема. Будем считать, что область Ω состоит из двух отдельных подобластей: $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$, каждая из которых может включать в себя несколько несвязанных друг с другом подобластей, что предполагается при организации параллельных вычислений. Отдельные подобласти, вообще говоря, могут налегать друг на друга.

Будем так же, как и в [10], строить разностные схемы декомпозиции (регионально-аддитивные схемы) на основе разбиения единицы области Ω. Определим функции

$$\chi_\alpha(\mathbf{x}) = \begin{cases} > 0, & \mathbf{x} \in \Omega_\alpha, \\ 0, & \mathbf{x} \notin \Omega_\alpha, \end{cases} \quad \alpha = 1, 2, \tag{34}$$

причем

$$\sum_{\alpha=1}^{2} \chi_\alpha(\mathbf{x}) = 1, \quad \mathbf{x} \in \Omega. \tag{35}$$

При построении адаптивных вычислительных алгоритмов декомпозиции области типичной является ситуация с изменением отдельных подобластей (динамическая адаптация). Поэтому естественно предполагать, что $\Omega_\alpha = \Omega_\alpha(t)$, $\alpha = 1, 2$, и ориентироваться на разбиения типа (34), (35) с $\chi_\alpha = \chi_\alpha(\mathbf{x}, t)$, $\alpha = 1, 2$.

Обычно (см., например, [7 — 14, 20, 21]) рассматривается класс схем декомпозиции, когда для оператора A имеет место аддитивное представление

$$A = \sum_{\alpha=1}^{2} D_\alpha, \tag{36}$$

причем операторы D_α, $\alpha = 1,2$, связываются с отдельными подобластями, разбиением (34), (35), решением отдельных подзадач в подобластях Ω_α, $\alpha = 1,2$. В работе [13] выделены три основных способа построения операторов декомпозиции, которые связаны с различными обменными условиями на границах подобластей. При этом сходимость приближенного решения устанавливается в различных нормах. Среди общих подходов к построению операторов декомпозиции отметим определение операторов D_α, $\alpha = 1,2$, в виде

$$D_\alpha = \chi_\alpha(\mathrm{x})A, \tag{37}$$

$$D_\alpha = A\chi_\alpha(\mathrm{x}), \tag{38}$$

для которых $D_\alpha \neq D_\alpha^*$, $\alpha = 1,2$.

Реализация рассматриваемых регионально-аддитивных разностных схем (схем декомпозиции области) связана с использованием неявных схем в отдельных подобластях, т.е. с обращением операторов $E + \sigma\tau D_\alpha$, где σ — весовой параметр. Для построения схемы декомпозиции применяем комбинированный выбор операторов декомпозиции. Для первой подобласти зададим оператор декомпозиции в соответствии с (38), для второй — в соответствии с (37), т.е. определим

$$D_1 = A^*\chi_1(\mathrm{x}), \quad D_2 = \chi_2(\mathrm{x})A. \tag{39}$$

При таком выборе операторов декомпозиции аддитивное представление (36) естественно не имеет места.

Для приближенного решения уравнения (7) будем использовать факторизованную схему

$$(E + \sigma\tau D_1)(E + \sigma\tau D_2)(y_{n+1} - y_n)/\tau + Ay_n = 0, \quad n = 0,1,\ldots, \tag{40}$$

где, например, в случае общей динамической декомпозиции $D_\alpha = D_\alpha(t_n)$.

Исследование регионально-аддитивной схемы (39), (40) проведем на основе общей теории устойчивости разностных схем [23, 24] с ориентацией на приведенные выше результаты по обычным схемам с весами. Схема (39), (40) записывается в канонической форме двухслойных разностных схем (14) с

$$B = E + \sigma\tau A + \sigma\tau(A^*\chi_1 - \chi_1 A) + \sigma^2\tau^2 A^*\chi_1(1 - \chi_1)A. \tag{41}$$

Оператор $A^*\chi_1 - \chi_1 A$ является кососимметричным, с учетом (34), (35) очевидна неотрицательность последнего слагаемого в (41) и поэтому $B \geq E + \sigma\tau A$. Однако прямого аналога теоремы 1 (или теоремы 2) для устойчивости факторизованной схемы (14), (41) в H получить не удается. Поэтому будем ориентироваться на аналоги явно-неявной разностной схемы (13), (24), для которой устойчивость имеет место в более сильной норме H_S (теорема 3).

Кроме (39), (40) рассмотрим более удобную для реализации факторизованную схему (40) с

$$D_1 = S\chi_1(\mathrm{x}), \quad D_2 = \chi_2(\mathrm{x})S. \tag{42}$$

Тем самым операторы декомпозиции строятся по самосопряженной части оператора A (по оператору диффузии).

Теорема 4. *Факторизованные разностные схемы (39), (40) и (40), (42) безусловно устойчивы в H_S при $\sigma \geq 0{,}5$, а для разностного решения верна оценка (33), где M — постоянная из оценки (22).*

Для доказательства достаточно проверить выполнимость леммы 2, положив $A_0 = S$ и $\varepsilon = 1$. Например, для схемы (39), (40) с учетом (41) имеем $B - \tau A/2 - E = (\sigma - 1/2)\tau A + \sigma\tau(A^*\chi_1 - \chi_1 A) + \sigma^2\tau^2 A^*\chi_1(1 - \chi_1)A$. Подобное неравенство имеет место и для схемы (40), (42). Неравенство (30) приводит нас к оценке (33), аналогичной той, которая имеет место для обычной явно-неявной схемы (13), (24).

Оценки скорости сходимости. Для оценки точности схем декомпозиции необходимо привлечь дополнительно к (33) оценки устойчивости и по правой части. Для погрешности решения $z_n = y_n - u_n$, $\mathrm{x} \in \omega$, имеем

$$B(z_{n+1} - z_n)/\tau + Az_n = \psi_n, \quad n = 0, 1, \ldots, \tag{43}$$

где погрешность аппроксимации

$$\psi_n = B(u_{n+1} - u_n)/\tau + Au_n. \tag{44}$$

Естественно считать, что $z_0 = 0$, т.е. можно ограничиться только соответствующей оценкой устойчивости разностного решения по правой части.

Рассмотрим разностную схему

$$B(y_{n+1} - y_n)/\tau + Ay_n = \varphi_n, \quad n = 0, 1, \ldots, \quad y_0 = 0. \tag{45}$$

Лемма 3. *Для разностной схемы (45), (26) при $A_0 > 0$, выполнении неравенства подчиненности (28) и условия (29) верна априорная оценка*

$$\|y_{n+1}\|^2_{A_0} \le 4 \exp\left((1 + M/\varepsilon)t_n\right)\left(\max_{0\le k\le n} \|\varphi_k\|^2_{A_0^{-1}} + \sum_{k=0}^{n-1} \tau\|\varphi_{t,k}\|^2_{A_0^{-1}}\right). \tag{46}$$

Подобные оценки содержатся в работах [23, 24], которым здесь и следуем. Записав разностное уравнение (45) при $n = k$ и домножив его на $2\tau y_{t,k} = y_{k+1} - y_k$, аналогично доказательству леммы 3 имеем $\|y_{k+1}\|^2_{A_0} \le (1 + M\tau/(2\varepsilon))\|y_k\|^2_{A_0} + 2\tau(\varphi_k, y_{t,k})$. Суммирование этих неравенств по k от 0 до n с учетом $y_0 = 0$ дает

$$\|y_{n+1}\|^2_{A_0} \le \frac{M}{2\varepsilon}\sum_{k=0}^{n} \tau\|y_k\|^2_{A_0} + 2\sum_{k=0}^{n} \tau(\varphi_k, y_{t,k}). \tag{47}$$

Для последнего слагаемого в (47) имеем

$$2\sum_{k=0}^{n} \tau(\varphi_k, y_{t,k}) = 2(\varphi_n, y_{n+1}) - 2\sum_{k=1}^{n} \tau(y_k, \varphi_{t,k-1}).$$

Для оценки членов в правой части привлекаются неравенства типа $|(\varphi_n, y_{n+1})| \le \|\varphi_n\|^2_{A_0^{-1}} + \|y_{n+1}\|^2_{A_0}/4$. Подстановка в (47) приводит к неравенству

$$\|y_{k+1}\|^2_{A_0} \le (1 + M/\varepsilon)\sum_{k=0}^{n} \tau\|y_k\|^2_{A_0} + 4\|\varphi_n\|^2_{A_0^{-1}} + 4\sum_{k=0}^{n-1} \tau\|\varphi_{t,k}\|^2_{A_0^{-1}}. \tag{48}$$

Положим $c = 1 + M/\varepsilon$, $R_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \tau\|y_k\|^2_{A_0^{-1}}$, $f_n = 4\|\varphi_n\|^2_{A_0^{-1}} + 4\sum\limits_{k=0}^{n-1} \tau\|\varphi_{t,k}\|^2_{A_0^{-1}}$ и перепишем (48) в виде $R_{n+1} \le \varrho R_n + \tau f_n$, $\varrho = 1 = c\tau$. Отсюда $R_{n+1} \le \tau \max\limits_{0\le k\le n} f_k(1 + \varrho + \cdots + \varrho^n)$, $\|y_{n+1}\|^2_{A_0} = (R_{n+1} - R_n)/\tau \le \max\limits_{0\le k\le n} f_k\varrho^n$. Принимая во внимание неравенство $\varrho = 1 + c\tau \le \exp(c\tau)$, от (48) приходим к доказываемой оценке (46).

На основании леммы 3 доказывается оценка скорости сходимости факторизованных схем (39), (40) и (40), (41).

Теорема 5. *Для погрешности решения факторизованных разностных схем декомпозиции области (39), (40) и (40), (42) при $\sigma \ge 0{,}5$ справедливы оценки*

$$\|z_{n+1}\|_S \le M_1(\tau^\nu + \tau\|\chi_1(\mathrm{x})\|_S + |h|^2), \tag{49}$$

где $|h|^2 = h_1^2 + h_2^2$, $\nu = 1$ при $\sigma \ne 0{,}5$ и $\nu = 2$, если $\sigma = 0{,}5$, а постоянная M_1 не зависит от шагов сетки.

В силу леммы 3 для разностной задачи (43) для погрешности имеем оценку

$$\|z_{n+1}\|_S^2 \le 4\exp\left((1+M)t_n\right)\left(\max_{0\le k\le n}\|\psi_k\|_{S^{-1}}^2 + \sum_{k=0}^{n-1}\tau\|\psi_{t,k}\|_{S^{-1}}^2\right). \tag{50}$$

Для схемы (39), (40) погрешность аппроксимации принимает вид $\psi_n = O(\tau^2+|h|^2)+(\sigma-1/2)\tau A\partial u/\partial t+\sigma\tau A^*\chi_1\partial u/\partial t+\ldots$ Тем самым выбор $\sigma = 0{,}5$ не позволяет, вообще говоря, рассчитывать на повышение точности. Оценка погрешности разностных схем декомпозиции области связана с рассмотрением выражения $A^*\chi_1 v$. С учетом неравенства подчиненности (22) имеем $\|A^*\chi_1 v\|_{S^{-1}} \le \|S\chi_1 v\|_{S^{-1}}+\|K\chi_1 v\|_{S^{-1}} \le (1+M/\delta)\|\chi_1 v\|_S$, где $\delta > 0$ — постоянная в неравенстве $S \ge \delta E$ $(\delta = O(1))$. Это и позволяет от (50) перейти к оценке погрешности разностного решения (49). Аналогично рассматривается факторизованная схема (40), (42).

Тем самым точность схем декомпозиции зависит от ширины области налегания подобластей Ω_1 и Ω_2 — слагаемые $\|\chi_1(\mathrm{x})\|_S$ в оценке (49). При построении разностных схем для параллельных компьютеров необходимо ориентироваться на декомпозицию с минимальным наложением подобластей, когда минимальны обмены между отдельными элементарными машинами (процессорами). При минимальном наложении подобластей (ширина области налегания $O(|h|)$) для скорости сходимости из оценки (49) имеем $O(|h|^{-1/2}\tau+|h|^2)$. Подобная оценка относится к классу оптимальных для регионально-аддитивных разностных схем.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 96 — 01 — 00657).

Литература

1. *Quarteroni A., Periaux J., Kuznetsov Yu., Widlund O. B.* (eds.) // Domain decomposition methods in Science and Engineering. Providence, 1994.
2. *Агошков В. И.* // Вычислительные процессы и системы. М., 1991. Вып. 8. С. 4 — 51.
3. *Quarteroni A.* // Surveys on Mathematics for Industry. 1991. Vol. 1. P. 75 — 118.
4. *Le Tallec P.* // Computational Mechanics Advances. 1994. Vol. 1. P. 121 — 220.
5. *Kuznetsov Yu. A.* // Sov. J. of Numer. Anal. and Math. Model. 1988. Vol. 3. P. 99 — 114.
6. *Загускин В. Л., Кондрашов В. Е.* // Докл. АН СССР. 1965. Т. 163, № 5. С. 1107 — 1109.
7. *Лаевский Ю. М.* // Вариационно-разностные методы в задачах численного анализа. Новосибирск, 1987. С.112 — 128.
8. *Вабищевич П. Н.* // Вестн. МГУ. Сер. 15. Вычислит. математика и кибернетика. 1989. № 3. С. 61 — 63.
9. *Вабищевич П. Н.* // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 1989. Т. 28. С. 1822 — 1829.
10. *Laevsky Yu. M.* // Sov. J. of Numer. Anal. and Math. Model. 1990. Vol. 5. P. 244 — 249.
11. *Dryja M.* // Proc. IV Intern. Simp. on Domain Decomposition Methods for Partial Differential Equations. Philadelphia, 1990. P. 264 — 271.
12. *Лаевский Ю. М.* // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 1992. Т. 32, № 11. С. 1744 — 1755.
13. *Vabishchevich P. N.* // Advances in Numerical Methods and Applications. Singapore, 1994. P. 293 — 299.
14. *Самарский А. А., Вабищевич П. Н.* // Дифференц. уравнения. 1995. Т. 31, № 9. С. 1563 — 1569.
15. *Ewing R. E., Lazarov R. D.* // Applied Numerical Mathematics. 1994. Vol. 14. P. 199 — 211.
16. *Вабищевич П. Н.* // Изв. вузов. Математика. 1995. № 4. С. 22 — 28.
17. *Вабищевич П. Н., Матус П. П.* // Весцi АН Беларусi. Сер. фiз.-мат. навук. 1995. № 4. С. 5 — 11.
18. *Dawson C. N., Du Q., Dupont T. F.* // Math. Comp. 1991. Vol. 57. P. 63 — 67.
19. *Dawson C. N., Dupont T. F.* // Math. Comp. 1992. Vol. 58. P. 21 — 34.
20. *Вабищевич П. Н.* // Дифференц. уравнения. 1996. Т.32, № 7. С. 923 — 927.
21. *Samarskii A. A., Vabishchevich P. N.* // Numerical Methods in Engineering'96. Paris, 1996. P. 464 — 468.
22. *Самарский А. А., Вабищевич П. Н.* // Докл. РАН. 1996. Т. 346, № 6. С. 742 — 746.
23. *Самарский А. А.* Теория разностных схем. М., 1989.
24. *Самарский А. А., Гулин А. В.* Устойчивость разностных схем. М., 1973.
25. *Самарский А. А., Николаев Е. С.* Методы решения сеточных уравнений. М., 1978.

Институт математического моделирования РАН

Поступила в редакцию 12 февраля 1997 г.