ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 1997, том 354, № 6, с. 745–747

## МАТЕМАТИКА

УДК 519.63

# УСТОЙЧИВОСТЬ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ В ИНТЕГРАЛЬНЫХ ПО ВРЕМЕНИ НОРМАХ

© 1997 г. Академик А. А. Самарский, П. Н. Вабищевич, П. П. Матус

Поступило 10.02.97 г.

При исследовании сходимости разностных схем для нестационарных задач математической физики важнейшее значение имеет устойчивость приближенного решения по начальным данным и правой части. В настоящее время создана и получила широкое развитие общая теория устойчивости (корректности) операторно-разностных схем [1, 2]. Получены точные (совпадающие необходимые и достаточные) условия широкого класса двух- и трехслойных разностных схем в конечномерных гильбертовых пространствах. Основные теоретические результаты теории устойчивости суммированы в книгах [3, 4].

Подчеркнем конструктивность общей теории устойчивости операторно-разностных схем, в которой критерии устойчивости формулируются в виде легко проверяемых неравенств для операторов. Среди наиболее важных обобщений отметим использование общей теории устойчивости для некорректных эволюционных задач [5] и исследования проекционно-разностных схем (схем конечных элементов) [6].

Сходимость разностных схем устанавливается в различных нормах, которые должны согласовываться с классом гладкости решений дифференциальной задачи. В силу этого необходимо иметь спектр оценок для разностного решения. При рассмотрении разностных схем для нестационарных краевых задач с обобщенными решениями [7] особого внимания заслуживают оценки разностного решения в интегральных по времени нормах. В теории устойчивости разностных схем обычно ограничиваются [3, 4] оценками в равномерных по времени нормах.

В данном сообщении отмечается возможность получения условий устойчивости в интегральных по времени нормах. Получены априорные оценки для двухслойных разностных схем, записанных в канонической форме. Принципиальный момент связан с получением оценки для разностного решения в полуцелых узлах по времени, которое определяется линейной интерполяцией по сеточным функциям в узлах. Аналогичные условия устойчивости в интегральных нормах можно получить и для трехслойных разностных схем.

1. Пусть $H$ – конечномерное гильбертово пространство, $D$, $A$ – линейные операторы в $H$. Скалярное произведение и норма в $H$ суть $(\cdot,\cdot)$, $\|\cdot\|$ соответственно. Через $H_R$, где $R = R^* > 0$, обозначим пространство $H$ со скалярным произведением и нормой

$$(y, v)_R = (Ry, v), \quad \|y\| = \sqrt{(Ry, y)}.$$

Рассмотрим дифференциально-разностное уравнение

$$D\frac{du}{dt} + Au = f(t), \quad 0 < t < T. \tag{1}$$

Операторы этого уравнения предполагаются постоянными $D \neq D(t)$, $A \neq A(t)$ и в $H$

$$D = D^* > 0, \quad A = A^* > 0. \tag{2}$$

Ориентируясь на получение оценок сходимости разностного решения, будем рассматривать задачу Коши для уравнения (1) с однородным начальным условием

$$u(0) = 0. \tag{3}$$

Домножая скалярно в $H$ на $u(t)$ и интегрируя по времени от 0 до $t$, с учетом (2), (3) получим априорную оценку

$$\|u(t)\|_D^2 + \int_0^t \|u(\theta)\|_A^2 d\theta \le \int_0^t \|f(\theta)\|_{A^{-1}}^2 d\theta. \tag{4}$$

При получении априорных оценок для разностных аналогов задачи (1)–(3) обычно ориентируются на более простую оценку

$$\|u(t)\|_D^2 \le \int_0^t \|f(\theta)\|_{A^{-1}}^2 d\theta,$$

которая непосредственно следует из (4). Во многих случаях, в частности при исследовании задач

Институт математического моделирования Российской Академии наук, Москва

Институт математики Академии наук Беларуси, Минск

с обобщенными решениями, большего внимания заслуживает оценка

$$\int_0^t \|u(\theta)\|_A^2 d\theta \le \int_0^t \|f(\theta)\|_{A^{-1}}^2 d\theta \qquad (5)$$

решения задачи в интегральных по времени нормах.

Аналогично домножением уравнения (1) на $\dfrac{du}{dt}$ приходим к оценке

$$\|u(t)\|_A^2 + \int_0^t \left\|\frac{du(\theta)}{d\theta}\right\|_D^2 d\theta \le \int_0^t \|f(\theta)\|_{D^{-1}}^2 d\theta. \qquad (6)$$

Из (6) следует стандартная оценка для решения задачи (1)–(3):

$$\|u(t)\|_A^2 \le \int_0^t \|f(\theta)\|_{D^{-1}}^2 d\theta.$$

Кроме этого заслуживает отдельного упоминания и оценка

$$\int_0^t \left\|\frac{du(\theta)}{d\theta}\right\|_D^2 d\theta \le \int_0^t \|f(\theta)\|_{D^{-1}}^2 d\theta. \qquad (7)$$

Приведем некоторые результаты по получению разностных аналогов априорных оценок (5), (7).

2. Пусть $\tau > 0$ – шаг сетки по времени и $y_n = y(t_n)$, $t_n = n\tau$. Рассмотрим двухслойную операторно-разностную схему, записанную в канонической форме:

$$B\frac{y_{n+1} - y_n}{\tau} + Ay_n = f_n, \quad n = 0, 1, \ldots, \qquad (8)$$

в которой оператор $B = B^* > 0$. Будем рассматривать устойчивость разностной схемы по правой части, т.е. при

$$y_0 = 0. \qquad (9)$$

Теорема 1. *Для разностной схемы* (8), (9) *с операторами* $A = A^* > 0$, $B = B^* > 0$ *при*

$$B \ge \frac{\tau}{2}A \qquad (10)$$

*имеет место априорная оценка*

$$\sum_{k=0}^{n} \tau\left\|\frac{1}{2}(y_{k+1} + y_k)\right\|_A^2 \le \sum_{k=0}^{n} \tau\|f_k\|_{A^{-1}}^2. \qquad (11)$$

Оценка (11) является разностным аналогом априорной оценки (5), причем она получена для разностного решения в полуцелых узлах, где решение определяется выражением $y_{k+1/2} = (y_{k+1} + y_k)/2$. Отметим, что устойчивость в такой интегральной по времени норме установлена при условиях (10), которые являются необходимыми и достаточными для устойчивости в равномерных по времени нормах [3, 4].

При загрублении неравенства (10) можно получить априорную оценку устойчивости по правой части в интегральных по времени нормах для разностного решения на целых временных шагах. Соответствующее утверждение формулируется следующим образом.

Теорема 2. *Для разностной схемы* (8), (9) *с операторами* $A = A^* > 0$, $B = B^* > 0$ *при*

$$B \ge (1 + \varepsilon)\frac{\tau}{2}A, \quad 0 < \varepsilon < 2, \qquad (12)$$

*имеет место априорная оценка*

$$\sum_{k=0}^{n} \tau\|y_k\|_A^2 \le \frac{2}{\varepsilon^2(2 - \varepsilon)}\sum_{k=0}^{n} \tau\|f_k\|_{A^{-1}}^2. \qquad (13)$$

Оценка (13) следует из доказанной в книге [4, с. 175] теоремы 7.

3. Приведем теперь разностный аналог оценки (7).

Теорема 3. *Для разностной схемы* (8), (9) *с операторами* $A = A^* \ge 0$, $B = B^*$ *при*

$$G = B - \frac{\tau}{2}A > 0 \qquad (14)$$

*имеет место априорная оценка*

$$\sum_{k=0}^{n} \tau\left\|\frac{y_{k+1} - y_k}{\tau}\right\|_G^2 \le \sum_{k=0}^{n} \tau\|f_k\|_{G^{-1}}^2. \qquad (15)$$

Заметим, что в данном случае мы требуем только неотрицательности оператора $A$, но усиливаем ограничения на оператор $B$ (ср. неравенства (10), (12) и (14)). Из оценки (15) с учетом (9) можно на основании теорем вложения для сеточных функций получить оценки для самого решения.

4. Применим сформулированные условия устойчивости для схемы с весами для уравнения (1), (2):

$$D\frac{y_{n+1} - y_n}{\tau} + A(\sigma y_{n+1} + (1 - \sigma)y_n) = f_n, \quad n = 0, 1, \ldots \qquad (16)$$

Схема (16) записывается в каноническом виде (8) с

$$B = D + \sigma\tau A. \qquad (17)$$

Оценка (11) для разностной схемы (8), (9), (17) в силу (10) будет справедлива при $A \le \Delta D$, если

$$\sigma \ge \frac{1}{2} - \frac{1}{\Delta\tau}.$$

Аналогично из (12), (17) следует, что при

$$\sigma \ge \frac{1 + \varepsilon}{2} - \frac{1}{\Delta\tau}$$

для схемы (8), (9), (17) справедлива оценка (13).

На основании теоремы 3 при стандартном ограничении $\sigma \geq 1/2$ из (15) можно получить неравенство

$$\sum_{k=0}^{n} \tau \left\| \frac{y_{k+1} - y_k}{\tau} \right\|_D^2 \leq \sum_{k=0}^{n} \tau \| f_k \|_{D^{-1}}^2. \tag{18}$$

Эта оценка является разностным аналогом оценки (7) для дифференциальной задачи.

На основании стандартных теорем вложения [4] из (18) следуют также оценки и для решения как в равномерной метрике

$$\| y_{n+1} \|_D^2 \leq t_{n+1} \sum_{k=0}^{n} \tau \| f_k \|_{D^{-1}}^2,$$

так и в интегральной норме по $t$:

$$\sum_{k=0}^{n+1} \tau \| y_k \|_D^2 \leq t_{n+1}^2 \sum_{k=0}^{n} \tau \| f_k \|_{D^{-1}}^2.$$

Работа выполнена при поддержке Российского (проект 96–01–00657) и Белорусского (проект Ф97–173) фондов фундаментальных исследований.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Самарский А.А.* // ЖВМиМФ. 1967. Т. 7. № 5. С. 1096–1133.
2. *Самарский А.А.* // ДАН. 1968. Т. 181. № 4. С. 808–811.
3. *Самарский А.А.* Теория разностных схем. М.: Наука, 1989.
4. *Самарский А.А., Гулин А.В.* Устойчивость разностных схем. М.: Наука, 1973.
5. *Самарский А.А., Вабищевич П.Н.* // Мат. моделирование. 1990. Т. 2. № 11. С. 89–98.
6. *Вабищевич П.Н., Самарский А.А.* // ЖВМиМФ. 1995. Т. 35. № 7. С. 1011–1021.
7. *Ладыженская О.А.* Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973.