

УДК 519.63

ИТЕРАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ МНОГОКОМПОНЕНТНОГО РАСЩЕПЛЕНИЯ

© 1997 г. Академик А. А. Самарский, П. Н. Вабищевич

Поступило 16.01.97 г.

При исследовании стационарных задач математической физики большое внимание уделяется построению эффективных итерационных методов решения сеточных задач [1–3]. Оптимизация итерационных методов (минимизация вычислительной работы) достигается за счет выбора итерационных параметров и переобусловливателя. В настоящее время наибольшее внимание уделяется выбору переобусловливателя в виде произведения двух экономичных операторов. Фактически речь идет о применении в тех или иных вариантах итерационных методов типа классического двухкомпонентного итерационного метода переменных направлений.

При рассмотрении трехмерных задач, использовании методов декомпозиции области, “многоцветных” итерационных методов приходится часто ориентировать не на двухкомпонентное, а на многокомпонентное расщепление. Теория итерационных методов рассматривается как один из разделов общей теории устойчивости разностных схем [1–4]. При ориентации на итерационные методы многокомпонентного расщепления речь идет о построении схем полной аппроксимации при многокомпонентном расщеплении. Построение таких итерационных методов в рамках общей теории итерационных методов [1, 2], так же как и схем многокомпонентного расщепления при решении нестационарных задач [3, 4], затруднительно. В работах [5, 6] строятся итерационные методы декомпозиции области типа альтернирующего метода Шварца, ориентируясь на различные схемы суммарной аппроксимации.

В данном сообщении на общем операторном уровне отмечаются возможности построения двух основных вариантов итерационных методов многокомпонентного расщепления. В первом из них (итерационные методы с мультипликативным переобусловливателем) новое приближение строится на основе последовательного решения элементарных задач. Во втором варианте (адди-

тивные алгоритмы) допускается параллельная организация вычислений.

Принципиальный момент связан с тем, что в классе рассматриваемых итерационных методов при решении задач с самосопряженным положительным оператором можно использовать трехслойные итерационные методы вариационного типа, т.е. допускается стандартное ускорение по сопряженным градиентам.

1. Пусть A – вещественная невырожденная квадратная ($n \times n$)-матрица, f, y – заданный и искомый вещественные векторы с компонентами $f_i, y_i, i = 1, 2, \dots, n$, соответственно. Ищется решение системы линейных уравнений

$$Ay = f. \quad (1)$$

Определим через H конечномерное вещественное гильбертово пространство со скалярным произведением и нормой соответственно

$$(u, v) = \sum_{i=1}^n u_i v_i, \quad \|u\| = (u, u)^{1/2}.$$

Ограничимся случаем, когда в (1) A – линейный самосопряженный и положительный в H оператор, т.е. $A = A^* > 0$. При $G = G^* > 0$ через H_G будем обозначать гильбертово пространство, снабженное скалярным произведением $(u, v)_G = (Gu, v)$ и нормой $\|u\|_G = (u, u)_G^{1/2}$.

Рассмотрим двухслойный итерационный метод для решения задачи (1):

$$B \frac{y_{k+1} - y_k}{\tau_{k+1}} + Ay_k = f \quad (2)$$

при некотором заданном начальном приближении y_0 . Будем считать, что в (2) $B = B^* > 0$. Скорость сходимости итерационного метода (2) в $H_G, G = A, AB^{-1}A$ определяется “близостью” переобусловливателя B к оператору A , а именно величиной $\xi = \gamma_1/\gamma_2$, где γ_1, γ_2 – постоянные энергетической эквивалентности операторов A и B :

$$\gamma_1 B \leq A \leq \gamma_2 B, \quad \gamma_1 > 0.$$

При использовании чебышевского набора итерационных параметров или трехслойных вариационных итерационных методов (методов сопряженных градиентов) для числа итераций, необходимых для достижения относительной точности ε , справедлива оценка

$$n_0(\varepsilon) = \frac{1}{\ln \rho} \ln \left(\frac{\varepsilon}{2} \right), \quad \rho = \frac{1 - \sqrt{\xi}}{1 + \sqrt{\xi}}.$$

2. При построении переобусловливателя B естественно ориентироваться на аддитивное расщепление оператора A :

$$A = \sum_{\alpha=1}^p A_{\alpha}. \quad (3)$$

В вычислительной практике широко представлены итерационные методы, основанные на двухкомпонентном расщеплении ($p = 2$ в представлении (3)). При разложении матрицы $A = L + D + L^*$, где D – диагональная матрица, L – нижняя, а L^* – верхняя треугольная матрицы, положим

$$A_1 = L + \frac{1}{2}D, \quad A_2 = L^* + \frac{1}{2}D.$$

При использовании такого расщепления для оператора B в классе попеременно-треугольных итерационных [1, 2] методов имеем

$$B = (G + A_1)G^{-1}(G + A_2), \quad G = G^* > 0,$$

причем $B = B^* > 0$. Получили также распространенные варианты попеременно-треугольного итерационного метода с

$$B = (G + L)G^{-1}(G + L^*), \quad G = G^* > 0.$$

В методах переменных направлений в представлении (3) операторы

$$A_{\alpha} = A_{\alpha}^* \geq 0, \quad \alpha = 1, 2, \dots, p. \quad (4)$$

Для оператора B используется мультипликативное представление

$$B = \prod_{\alpha=1}^p (E + \omega_{\alpha} A_{\alpha}) \quad (5)$$

с некоторыми положительными постоянными ω_{α} , $\alpha = 1, 2, \dots, p$. Оптимизация методов (2)–(5) за счет выбора итерационных параметров достигается только при предположении о попарной перестановочности операторов A_{α} , $\alpha = 1, 2, \dots, p$ (см., например, [7, 8]). В общем случае перестановочных операторов даже при двухкомпонентном расщеплении $B \neq B^*$.

3. Будем вначале ориентироваться на построение итерационных методов многокомпонентного расщепления (3), (4) с мультипликативными пере-

обусловливателями (класс факторизованных операторов B). Рассмотрим итерационный метод

$$\prod_{\alpha=1}^p (E + \omega_{\alpha} A_{\alpha}) \frac{y_{k+1} - y_k}{\tau_{k+1}} + \prod_{\alpha=1}^p (E + \omega_{\alpha} A_{\alpha})^{-1} (A y_k - f) = 0. \quad (6)$$

При записи (6) в канонической форме (2) имеем

$$B = \prod_{\alpha=1}^p (E + \omega_{p+1-\alpha} A_{p+1-\alpha}) \prod_{\alpha=1}^p (E + \omega_{\alpha} A_{\alpha}) \quad (7)$$

и тем самым $B = B^* > 0$.

По сравнению с традиционным итерационным методом многокомпонентного расщепления (2)–(5) за счет двукратного увеличения вычислительной работы на одном итерационном шаге в симметризованном итерационном методе (2)–(4), (7) предоставляется возможность оптимизации выбора итерационных параметров для общего случая перестановочных операторов A_{α} , $\alpha = 1, 2, \dots, p$.

Предложенный итерационный метод (2)–(4), (7) естественно связать с факторизованной схемой

$$\prod_{\alpha=1}^p (E + \sigma \tau A_{p+1-\alpha}) \times \prod_{\alpha=1}^p (E + \sigma \tau A_{\alpha}) \frac{y_{k+1} - y_k}{\tau} + A y_k = f_k$$

решения задачи Коши для уравнения

$$\frac{dy}{dt} + A y = f.$$

Исследование устойчивости проводится на основе общей теории устойчивости разностных схем [1]. Нетрудно убедиться, что эта факторизованная схема безусловно устойчива при значениях весового параметра $\sigma \geq 0.25$.

4. При ориентации на современные параллельные компьютеры особого внимания заслуживают итерационные методы не с мультипликативным, а с аддитивным представлением оператора B^{-1} . Вместо (6) будем использовать итерационный метод

$$\frac{y_{k+1} - y_k}{\tau_{k+1}} + \sum_{\alpha=1}^p (E + \omega_{\alpha} A_{\alpha})^{-1} (A y_k - f) = 0. \quad (8)$$

В представлении (2) для итерационного метода (8) имеем

$$B^{-1} = \sum_{\alpha=1}^p (E + \omega_{\alpha} A_{\alpha})^{-1} \quad (9)$$

и снова $B = B^* > 0$.

Реализация итерационного метода (8) может быть проведена по схеме

$$(E + \omega_\alpha A_\alpha) \frac{y_{k+1}^{(\alpha)} - y_k}{\tau_{k+1}} + Ay_k - f = 0, \quad (10)$$

$$y_{k+1} = \frac{1}{p} \sum_{\alpha=1}^p y_{k+1}^{(\alpha)}. \quad (11)$$

Подобная схема организация присуща аддитивно-усредненным схемам [4, 9]. Можно рассматривать (10), (11) как векторную схему расщепления [10]. Наиболее близкими прототипами итерационного метода (10), (11) являются векторные аддитивные схемы [11, 12].

Как и в классическом двухкомпонентном итерационном методе переменных направлений (см., например, [13]) заслуживают отдельного упоминания модификации с выделением диагональных частей D_α операторов A_α , $\alpha = 1, 2, \dots, p$. Например, вместо (9) можно взять

$$B^{-1} = \sum_{\alpha=1}^p \left(\sum_{\beta \neq \alpha} D_\beta + \omega_\alpha A_\alpha \right)^{-1}.$$

Здесь мы ограничились описанием общей возможной конструкции итерационных схем многокомпонентного расщепления. В достаточно общих предположениях (3), (4) отмечена возможность использования последовательных (мультипликативных) и параллельных (аддитивных) вычислительных алгоритмов с самосопряженным и положительно-определенным переобусловливателем. Для более конкретных классов расщепления необхо-

димо ставить и решать задачу оптимизации итерационных методов, исследования скорости сходимости.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 96-01-00657).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Самарский А.А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1989.
2. Самарский А.А., Николаев Е.С. Методы решения сеточных уравнений. М.: Наука, 1978.
3. Hageman L.A., Young D.M. Applied Iterative Methods. N.Y.: Acad. Press, 1981.
4. Samarskii A.A., Vabishchevich P.N. Computational Heat Transfer. Chichester: Wiley, 1995.
5. Самарский А.А., Вабищевич П.Н. // ДАН. 1996. Т. 349. № 1. С. 22–25.
6. Vabishchevich P.N. // Iterative Methods in Linear Algebra. II. IMACS. 1996. P. 281–291.
7. Николаев Е.С., Самарский А.А. // ДАН. 1972. Т. 206. № 4. С. 815–818.
8. Hadjidimos A. // Comput. J. 1971. V. 14. № 2. P. 179–183.
9. Гордезиани Д.Г., Меладзе Г.В. // ЖВМиМФ. 1974. Т. 14. № 1. С. 246–250.
10. Самарский А.А., Фрязинов И.В. // УМН. 1976. В. 6(192). С. 167–197.
11. Абрашин В.Н. // Дифференц. уравнения. 1990. Т. 26. № 2. С. 314–323.
12. Вабищевич П.Н. // ЖВМиМФ. 1996. Т. 36. № 3. С. 44–51.
13. Widlund O. // Math. Comput. 1971. V. 25. № 113. P. 33–41.