ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 1997, том 356, № 4, с. 455–457

МАТЕМАТИКА

УДК 519.63

СИЛЬНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ОПЕРАТОРНЫХ И ОПЕРАТОРНО-РАЗНОСТНЫХ СХЕМ

© 1997 г. Академик А. А. Самарский, П. Н. Вабищевич, П. П. Матус

Поступило 29.05.97 г.

При исследовании корректности начально-краевых задач для нестационарных уравнений математической физики основное внимание уделяется устойчивости решения по начальным данным и правой части. В более общей ситуации необходимо требовать непрерывной зависимости решения и от возмущения операторов задачи, например от коэффициентов уравнения. В этом случае говорят [1] о сильной устойчивости. Априорные оценки, выражающие непрерывную зависимость решения задачи относительно возмущений правой части и оператора, получены (см., например, [1, 2]) в различных условиях для стационарных задач (операторных уравнений первого рода).

Данное сообщение посвящено получению оценок устойчивости при возмущении оператора задачи Коши, правой части и начального условия для эволюционных уравнений, рассматриваемых в гильбертовых пространствах. Получены априорные оценки для погрешности при естественных предположениях о возмущении оператора задачи. При дискретизации по времени мы приходим к операторно-разностному уравнению. Приведены простейшие априорные оценки сильной устойчивости для двухслойных операторно-разностных схем, согласованные с соответствующими оценками для дифференциально-операторного уравнения. Основные результаты иллюстрируются на примере начально-краевой задачи для одномерного параболического уравнения.

1. Пусть H – конечномерное гильбертово пространство, в котором скалярное произведение и норма суть $(\cdot,\cdot)$, $\|\cdot\|$ соответственно. Будем считать, что A – постоянный самосопряженный положительно-определенный линейный оператор в H, т.е.

$$A \neq A(t) = A^* \geq \delta E, \quad \delta = \text{const} > 0.$$

Через H_D, где $D = D^* > 0$, обозначим пространство со скалярным произведением и нормой

$$(y, v)_D = (Dy, v), \quad \|y\| = \sqrt{(Dy, y)}.$$

Рассмотрим задачу Коши для дифференциально-операторного уравнения первого порядка:

$$\frac{du}{dt} + Au = f(t), \quad 0 < t < T, \tag{1}$$

$$u(0) = u_0, \tag{2}$$

где $f(t)$, u_0 – заданные, а $u(t)$ – искомая функции со значениями в H. Через $\tilde{u}$ обозначим решение задачи с возмущенной правой частью, начальным условием и оператором:

$$\frac{d\tilde{u}}{dt} + \tilde{A}\tilde{u} = \tilde{f}(t), \quad 0 < t < T, \tag{3}$$

$$\tilde{u}(0) = \tilde{u}_0. \tag{4}$$

Ставится задача оценить величину возмущения решения

$$z(t) = \tilde{u}(t) - u(t)$$

через величины возмущений f, u_0 и A.

Относительно возмущенного оператора предполагаются выполненными те же предположения, что и для невозмущенного оператора:

$$\tilde{A} \neq \tilde{A}(t) = \tilde{A}^* \geq \delta E, \quad \delta = \text{const} > 0.$$

Мерой возмущения оператора будет служить положительная постоянная α в неравенстве

$$\|(\tilde{A} - A)v\| \leq \alpha\|\tilde{A}v\|. \tag{5}$$

Более слабые предположения связываются [1] с оценкой для энергии оператора при дополнительном предположении о неотрицательности оператора $\tilde{A} - A$:

$$0 \leq ((\tilde{A} - A)v, v) \leq \alpha(Av, v). \tag{6}$$

Институт математического моделирования Российской Академии наук, Москва

Институт математики Академии наук Беларуси, Минск

2. Для возмущения решения из (1), (2) и (3), (4) получим задачу

$$\frac{dz}{dt} + Az = (\tilde{f}(t) - f(t)) - (\tilde{A} - A)\tilde{u}, \quad 0 < t < T, \quad (7)$$

$$z(0) = \tilde{u}_0 - u_0. \quad (8)$$

Теорема 1. *При выполнении условия* (5) *на возмущение оператора A для возмущения решения справедлива априорная оценка*

$$\|z(t)\|_A^2 \le \|\tilde{u}_0 - u_0\|_A^2 + \int_0^t \|\tilde{f}(\theta) - f(\theta)\|^2 d\theta + \alpha^2\left(\|\tilde{u}_0\|_A^2 + \int_0^t \|\tilde{f}(\theta)\|^2 d\theta\right). \quad (9)$$

В условиях (6) *аналогичная оценка сильной устойчивости имеет вид*

$$\|z(t)\|^2 \le \|\tilde{u}_0 - u_0\|^2 + \int_0^t \|\tilde{f}(\theta) - f(\theta)\|_{A^{-1}}^2 d\theta + \alpha^2\left(\|\tilde{u}_0\|^2 + \int_0^t \|\tilde{f}(\theta)\|_{A^{-1}}^2 d\theta\right). \quad (10)$$

Для доказательства (9) домножим уравнение (7) скалярно на $2dz/dt$:

$$2\left\|\frac{dz}{dt}\right\|^2 + \frac{d}{dt}\|z\|_A^2 = 2\left((\tilde{f}(t) - f(t)), \frac{dz}{dt}\right) - 2\left((\tilde{A} - A)\tilde{u}, \frac{dz}{dt}\right). \quad (11)$$

Для оценки правой части имеем

$$2\left((\tilde{f}(t) - f(t)), \frac{dz}{dt}\right) - 2\left((\tilde{A} - A)\tilde{u}, \frac{dz}{dt}\right) \le 2\left\|\frac{dz}{dt}\right\|^2 + \|\tilde{f}(t) - f(t)\|^2 + \|(\tilde{A} - A)\tilde{u}\|^2.$$

С учетом этого из (11) следует оценка

$$\|z(t)\|_A^2 \le \|z(0)\|_A^2 + \int_0^t \|\tilde{f}(\theta) - f(\theta)\|^2 d\theta + \int_0^t \|(\tilde{A} - A)\tilde{u}(\theta)\|^2 d\theta. \quad (12)$$

Рассмотрим теперь возмущенную задачу (3), (4). Домножая скалярно уравнение (3) на $2\tilde{A}\tilde{u}$, получим

$$\frac{d}{dt}\|\tilde{u}\|_A^2 + 2\|\tilde{A}\tilde{u}\|^2 = 2(\tilde{f}, \tilde{A}\tilde{u}) \le \|\tilde{A}\tilde{u}\|^2 + \|\tilde{f}(t)\|^2.$$

Интегрирование этого неравенства от 0 до t дает

$$\int_0^t \|\tilde{A}\tilde{u}(\theta)\|^2 d\theta \le \|\tilde{u}(0)\|_A^2 + \int_0^t \|\tilde{f}(\theta)\|^2 d\theta. \quad (13)$$

Принимая во внимание (5) и (13), из (12) получим искомую оценку (9).

Доказательство оценки (10) проводится аналогично. В задаче (7), (8) для возмущения домножим скалярно уравнение на $2z$:

$$\frac{d}{dt}\|z\|^2 + 2\|z\|_A^2 = 2((\tilde{f}(t) - f(t)), z) - 2((\tilde{A} - A)\tilde{u}, z). \quad (14)$$

Принимая во внимание условия (6), имеем

$$2((\tilde{f}(t) - f(t)), z) \le \|\tilde{f}(t) - f(t)\|_{A^{-1}}^2 + \|z\|_A^2,$$

$$2((\tilde{A} - A)\tilde{u}, z) \le \alpha((\tilde{A} - A)\tilde{u}, \tilde{u}) + \frac{1}{\alpha}((\tilde{A} - A)z, z) \le \alpha^2(A\tilde{u}, \tilde{u}) + (Az, z) \le \alpha^2\|\tilde{u}\|_A^2 + \|z\|_A^2.$$

Подобно (13) устанавливается оценка

$$\int_0^t \|\tilde{u}(\theta)\|_A^2 d\theta \le \|\tilde{u}(0)\|^2 + \int_0^t \|\tilde{f}(\theta)\|_{A^{-1}}^2 d\theta.$$

Подстановка в (14) приводит к оценке (10).

3. Приведем оценки сильной устойчивости для операторно-разностных схем, ограничиваясь двухслойными операторно-разностными схемами. Пусть $\tau > 0$ – шаг сетки по времени и $y_n = y(t_n)$, $t_n = n\tau$. Задаче Коши (1), (2) для дифференциально-операторного уравнения поставим в соответствие схему с весами

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{\tau} + A(\sigma y_{n+1} + (1-\sigma)y_n) = f_n, \quad n = 0, 1, \ldots, \quad (15)$$

$$y_0 = u_0. \quad (16)$$

Запишем также разностную схему для возмущенной задачи (3), (4):

$$\frac{\tilde{y}_{n+1} - \tilde{y}_n}{\tau} + \tilde{A}(\sigma\tilde{y}_{n+1} + (1-\sigma)\tilde{y}_n) = \tilde{f}_n, \quad n = 0, 1, \ldots, \quad (17)$$

$$\tilde{y}_0 = \tilde{u}_0. \quad (18)$$

Аналогично теореме 1 формулируется утверждение о сильной устойчивости рассматриваемой разностной схемы.

Теорема 2. *Для возмущения решения* $z_n = \tilde{y}_n - y_n$ *разностных схем* (15), (16) *и* (17), (18) *при*

$\sigma \ge 0.5$ *и выполнении условия* (5) *имеет место априорная оценка*

$$\|z_{n+1}\|_A^2 \le \|\tilde{y}_0 - y_0\|_A^2 + \sum_{k=0}^{n} \tau \|\tilde{f}_k - f_k\|^2 +$$
$$+ \alpha^2 \left(\|\tilde{y}_0\|_{\tilde{A}}^2 + \sum_{k=0}^{n} \tau \|\tilde{f}_k\|^2 \right), \qquad (19)$$

а при выполнении условий (6)

$$\|z_{n+1}\|^2 \le \|\tilde{y}_0 - y_0\|^2 + \sum_{k=0}^{n} \tau \|\tilde{f}_k - f_k\|_{A^{-1}}^2 +$$
$$+ \alpha^2 \left(\|\tilde{y}_0\|^2 + \sum_{k=0}^{n} \tau \|\tilde{f}_k\|_{\tilde{A}^{-1}}^2 \right). \qquad (20)$$

Оценки (19), (20) для возмущения разностного решения являются полными аналогами оценок (9), (10) для решения задачи Коши для дифференциально-разностного уравнения.

Докажем, например, оценку (19). Для возмущения решения имеем задачу

$$\frac{z_{n+1} - z_n}{\tau} + A(\sigma z_{n+1} + (1-\sigma) z_n) =$$
$$= (\tilde{f}_n - f_n) - (\tilde{A} - A)\tilde{y}_n^{(\sigma)}, \quad n = 0, 1, \ldots, \qquad (21)$$
$$z_0 = \tilde{u}_0 - u_0, \qquad (22)$$

где $y_n^{(\sigma)} = \sigma \tilde{y}_{n+1} + (1-\sigma)\tilde{y}_n$. Умножая (21) на $2(z_{n+1} - z_n)$, подобно (12), получим оценку

$$\|z_{n+1}\|_A^2 \le \|z_0\|_A^2 + \sum_{k=0}^{n} \tau \|\tilde{f}_k - f_k\|^2 +$$
$$+ \sum_{k=0}^{n} \tau \|(\tilde{A} - A)\tilde{y}_k^{(\sigma)}\|^2. \qquad (23)$$

Уравнение для возмущенной задачи (17) домножим скалярно в H на $2\tau \tilde{A}\, \tilde{y}_n^{(\sigma)}$, что дает равенство

$$(\tilde{A}\tilde{y}_{n+1}, \tilde{y}_{n+1}) + 2\tau^2 \left(\sigma - \frac{1}{2}\right)\left(\tilde{A}\frac{\tilde{y}_{n+1} - \tilde{y}_n}{\tau}, \frac{\tilde{y}_{n+1} - \tilde{y}_n}{\tau}\right) +$$
$$+ 2\tau \|\tilde{A}\tilde{y}_n^{(\sigma)}\|^2 = 2\tau(\tilde{A}\tilde{y}_n^{(\sigma)}, \tilde{f}_n) + (\tilde{A}\tilde{y}_n, \tilde{y}_n).$$

Отсюда следует оценка

$$\sum_{k=0}^{n} \tau \|\tilde{A}\tilde{y}_k^{(\sigma)}\|^2 \le (\tilde{A}\tilde{y}_0, \tilde{y}_0) + \sum_{k=0}^{n} \tau \|\tilde{f}_k\|^2.$$

Подставляя в (23), приходим к оценке (19) для разностной схемы (21), (22).

4. В качестве примера рассмотрим первую краевую задачу для одномерного параболического уравнения:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + f(x, t), \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \qquad (24)$$
$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0, \quad t > 0, \qquad (25)$$
$$u(x, 0) = u_0(x), \quad 0 < x < l \qquad (26)$$

при естественном предположении $k(x) \ge c > 0$.

При использовании равномерной сетки

$$\bar{\omega} = \{x \mid x = x_i = ih, \quad i = 0, 1, \ldots, N, \quad Nh = l\}$$

определим через H множество сеточных функций, заданных на $\bar{\omega}$ и обращающихся в нуль при $x = 0$ и l. Скалярное произведение и норму зададим выражениями

$$(u, v) = \sum_{i=1}^{N-1} u_i v_i h, \quad \|u\| = \sqrt{(u, u)}.$$

Определим разностный оператор

$$A y_i = \begin{cases} 0, & i = 0, \\ -(a y_{\bar{x}})_x, & i = 1, 2, \ldots, N-1, \\ 0, & i = N, \end{cases}$$

где a – некоторый шаблонный функционал. Свойства оператора A хорошо изучены [1], в частности,

$$A = A^* \ge \delta E, \quad \delta = \frac{8c}{l^2}.$$

Для оператора

$$(\tilde{A} - A)v = ((\tilde{a} - a)v_{\bar{x}})_x$$

условие (6) будет выполнено при

$$0 \le \tilde{a}(x) - a(x) \le \alpha a(x).$$

Аналогично, используя вложение

$$\|v\|_A \le \frac{l}{2\sqrt{2c}}\|Av\|,$$

можно показать, что условие (5) выполнено при

$$|\tilde{a}(x) - a(x)| \le \alpha_1 \tilde{a}(x), \quad |\tilde{a}_x(x) - a_x(x)| \le \alpha_2,$$

так что $\alpha = c_0(\alpha_1 + \alpha_2)$, где $c_0 = \mathrm{const} > 0$. Тем самым для оценки возмущения решения в более сильной норме привлекаются более жесткие ограничения на коэффициенты уравнения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Самарский А.А.* Теория разностных схем. М.: Наука, 1989.
2. *Михлин С.Г.* Некоторые вопросы теории погрешностей. Л.: Изд-во ЛГУ, 1988.