ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 1997, том 357, № 4, с. 458–461

МАТЕМАТИКА

УДК 519.63

L_2-КОНСЕРВАТИВИЫЕ СХЕМЫ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ КОРТЕВЕГА–ДЕ ФРИСА

© 1997 г. Академик А. А. Самарский, В. И. Мажукин, П. П. Матус, И. А. Михайлик

Поступило 29.07.97 г.

1. Нелинейные волновые процессы интенсивно изучаются в различных разделах физики и механики [1]. Для изучения волн малой амплитуды в качестве модельного уравнения часто используют уравнение Кортевега–де Фриса (КдФ)

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + \beta\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0, \quad \beta = \text{const} > 0, \qquad (1)$$

которое было впервые выведено в 1895 г. [2]. Изучению уравнения КдФ посвящена обширная литература [3, 4]. Анализ различных аспектов численного решения уравнения Кортвега–де Фриса выполнен в ряде работ [5–7].

В нашем сообщении проводится анализ разностных схем для уравнения КдФ с точки зрения интегральных законов сохранения. Вводится понятие L_2-консервативности схемы как свойство ее решения удовлетворять сеточному аналогу закона сохранения

$$E_1(t) = E_1(0), \quad E_1(t) = \int_0^l u^2(x,t)dx. \qquad (2)$$

На основе этого принципа для уравнения Кортевега–де Фриса: а) установлены неконсервативность и абсолютная неустойчивость явных двухслойных разностных схем; б) построены новые классы трехслойных полностью консервативных (консервативных и L_2-консервативных) разностных схем с весами; в) рассмотрен подход к построению явных L_2-консервативных разностных схем для нелинейного уравнения. Получены априорные оценки в нелинейном случае.

2. В прямоугольной области $\bar{Q} = \{(x, t): 0 \le x \le l, 0 \le t \le T\}$ для уравнения (1) будем рассматривать задачу Коши с периодическими по пространству условиями

$$u(x,0) = u_0(x), \quad 0 \le x \le l, \qquad u(x,t) = u(x+l,t), \quad t \ge 0. \qquad (3)$$

При построении эффективных алгоритмов необходимо следить за тем, чтобы в них выполнялись сеточные аналоги основных свойств дифференциальной задачи (1), (3)

$$(Lu, u) = 0, \quad E_k(t) = E_k(0), \quad k = 1, 2, \qquad (4)$$

где

$$Lu = u\frac{\partial u}{\partial x} + \beta\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}, \quad (u, v) = \int_0^l u(x,t)v(x,t)dx,$$

$$E_2(t) = \int_0^l u(x,t)dx.$$

Основные конструктивные моменты построения L_2-консервативных схем для нелинейного уравнения КдФ отразим на модельном примере линейного уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} + \beta\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0, \quad a = \text{const} > 0, \qquad (5)$$

сохраняющего основные свойства (4).

3. В области $\bar{Q}$ введем равномерные сетки $\omega_{h\tau} = \omega_h \times \omega_\tau$, $\bar{\omega}_h = \{x_i = ih, i = 0, 1, \ldots, N, hN = l\}$, $\bar{\omega}_\tau = \{t_n = n\tau, n = 0, 1, \ldots, N_0; \tau N_0 = T\} = \omega_\tau \cup \{T\}$. При построении соответствующих разностных схем будем ориентироваться на простейшую явную разностную схему

$$y_t + ay_{\mathring{x}} + \beta y_{\bar{x}x\mathring{x}} = 0, \quad i = 0, 1, \ldots, N, \quad t \in \omega_\tau, \qquad (6)$$

$$y_{i+N} = y_i, \quad y(x,0) = u_0(x), \quad x \in \bar{\omega}_h, \qquad (7)$$

в которой использована система обозначений [8];

$$y_{\bar{t}} = \check{y} = \frac{y^j - y^{j-1}}{\tau}, \quad y_t = \hat{y} = \frac{y^{j+1} - y^j}{\tau},$$

$$y_{\mathring{t}} = \frac{y^{j+1} - y^{j-1}}{2\tau}, \quad y_{\bar{x}} = \frac{y_i - y_{i-1}}{h},$$

Институт математического моделирования Российской Академии наук, Москва

Институт математики Академии наук Белоруссии, Минск

$$y_x = \frac{y_{i+1} - y_i}{h}, \quad y_{\overset{\circ}{x}} = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}.$$

Покажем, что семейство явных разностных схем (6) не удовлетворяет условию L_2-консервативности и, более того, является абсолютно неустойчивым в наиболее слабой норме L_2. Для анализа свойств разностной схемы (6) приведем ее к каноническому виду двухслойных операторно-разностных схем [8]

$$By_t + Ay_n = 0, \quad y_0 = u_0, \tag{8}$$

где $u_0 \in H$, $y = y(t_n) = y_n = (y_0^n, y_1^n, \ldots, y_N^n) \in H$, $H = \Omega_h$ – пространство сеточных функций, заданных на сетке $\overline{\omega}_h$ и удовлетворяющих условию периодичности $y_i = y_{i+N}$. Тогда в схеме (8) $B = E$, A: $\Omega_h \to \to \Omega_h$, $A = \alpha A_1 + \beta A_2$,

$$(A_1 y)_i = \begin{cases} \dfrac{y_1 - y_{N-1}}{2h}, & i = 0, N, \\ y_{\overset{\circ}{x}} = \dfrac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}, & i = 1, 2, \ldots, N-1, \end{cases} \tag{9}$$

$$(A_2 y)_i = \begin{cases} \dfrac{y_{\bar{x}x,1} - y_{\bar{x}x,N-1}}{2h}, & i = 0, N, \\ \dfrac{y_{\bar{x}x,2} - y_{\bar{x},1}/h + (y_0 - y_{N-1})/h^2}{2h}, & i = 1, \\ y_{\bar{x}x\overset{\circ}{x},i}, & i = 2, 3, \ldots, N-2, \\ -\dfrac{y_{\bar{x}x,N-2} + y_{\bar{x},N}/h + (y_N - y_1)/h^2}{2h}, \\ i = N-1. \end{cases} \tag{10}$$

Линейное пространство Ω_h снабдим скалярным произведением

$$(u, v)_h = (u, v) = hu_0v_0 + \sum_{i=1}^{N-1} hu_iv_i + hu_Nv_N$$

и нормой $\|y\| = \sqrt{(y, y)}$. Используя тождество $(y, v_{\overset{\circ}{x}}) = -(y_{\overset{\circ}{x}}, v)$, $y, v \in \Omega_h$, нетрудно доказать, что $(A_k y, y) = 0$, $k = 1, 2$, т.е. оператор $L_h = A = -A^*$ является кососимметрическим. Так как $y_{\overset{\circ}{x},0} = y_{\overset{\circ}{x},N}$, $y_{\bar{x}x\overset{\circ}{x},0} = y_{\bar{x}x\overset{\circ}{x},N}$, то, суммируя (6) по $x \in \omega_h$, находим сеточный аналог (4)

$$E_{2,h}(t) = E_{2,h}(0), \quad t \in \omega_\tau, \quad E_{2,h} = (y, 1). \tag{11}$$

Из (11) следует, что разностная схема (6), (7) консервативна.

Определение. Разностную схему назовем L_2-консервативной, если для нее имеет место сеточный аналог интегрального закона сохранения (2), справедливого для исходной дифференциальной задачи.

Исследуем теперь схему (6) на свойство L_2-консервативности. Для этого умножим скалярно операторное уравнение (8) на $2\tau y$. Получим

$$\|y(t)\|^2 - \sum_{t'=\tau}^{t} \tau \left\| y_{\bar{t}}(t') \right\|^2 = \|y(0)\|^2, \quad t \in \omega_\tau.$$

Наличие отрицательного дисбаланса говорит не только о невыполнении соответствующего закона сохранения, но и ставит под сомнение вопрос вообще об устойчивости схемы в наиболее слабой норме L_2. Так как A и B – постоянные (не зависят от t) операторы, $B^{-1} = E$ существует, то в соответствии с работой [9] для устойчивости схемы (8) в H_{B*B} необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство $BA^* + AB^* \geq \tau A^*A$. Так как в нашем случае $A = -A^*$, то последнее неравенство эквивалентно требованию $A^*A \leq 0$. Итак, необходимое условие устойчивости в H не выполнено и схема (6) абсолютно неустойчива в норме L_2.

4. Выделим класс явных L_2-консервативных условно устойчивых трехслойных разностных схем. Для аппроксимации уравнения (5) воспользуемся трехслойной разностной схемой

$$y_{\overset{\circ}{t}} + Ay = 0, \quad t \in \omega_\tau, \quad y_0 = u_0, \quad y_1 = \bar{u}_0. \tag{12}$$

Нетрудно показать, что при $\tau\|A\| < 1$ схема (12) устойчива в норме $E_3 = \|\hat{y}\|^2 + 2\tau(\hat{y}, Ay) + \|y\|^2 > 0$. Так как в нашем случае $\|A\| \leq \dfrac{\alpha}{h} + \dfrac{\beta\sqrt{10}}{h^3}$, то схема (12) условно устойчива при $\tau \leq \tau_k$, $\tau_k = \dfrac{h^3}{\beta\sqrt{10} + \alpha h^2}$. При более жестком условии $\tau^2\|A\|^2 \leq 1 - \varepsilon$, $0 < \varepsilon < 1$ схема устойчива в норме L_2 и при любом $t \in \omega_\tau$ имеет место оценка $\|y\|^2 \leq \dfrac{E(0)}{1-\varepsilon}$. Умножая уравнение (12) скалярно в Ω_h на $2\tau y$, приходим к тождеству $E_{1,h}(t) = E_{1,h}(0)$, $t \in \omega_\tau$, $E_{1,h} = (\hat{y}, y)$. Следовательно, явная трехслойная схема (12), (7) консервативна, L_2-консервативна и устойчива в норме L_2 при выполнении критерия Куранта.

Итак, требование L_2-консервативности позволяет выделить класс устойчивых разностных схем в Ω_h. Аналогичные результаты можно получить и для трехслойных схем с весами

$$\begin{gathered} y_{\overset{\circ}{t}} + Ay^{(\sigma_1, \sigma_2)} = 0, \quad t \in \omega_\tau, \\ y_0 = u_0, \quad y_1 = u_1, \end{gathered} \tag{13}$$

где $y^{(\sigma_1, \sigma_2)} = \sigma_1\hat{y} + (1 - \sigma_1 - \sigma_2)y + \sigma_2\check{y}$, σ_1, σ_2 – вещественные параметры.

Теорема 1. *Пусть в схеме* (13) $\sigma_1 \ge \sigma_2$, $\sigma_1 + \sigma_2 \ge 1$, $A = -A^*$, A: $\Omega_h \to \Omega_h$. *Тогда разностная схема устойчива и имеют место равенства*

$$\|y_{n+1}\|_1^2 + \sum_{k=1}^{n} 2\tau^2(\sigma_1 - \sigma_2)\|y_{\bar{t},k}\|^2 = \|y_1\|_1^2, \quad (14)$$

$$\|y\|_1^2 = \frac{1}{2}(\|y\|^2 + \|\check{y}\|^2) + \frac{1}{2}\tau^2(\sigma_1 + \sigma_2 - 1)\|y_{\bar{t}}\|^2. \quad (15)$$

Из (14), (15) следует, что схема L_2-консервативна при $\sigma_1 = \sigma_2 = 0.5$.

Теорема 2. *При* $\sigma_1 = \sigma_2 = \frac{1}{4}$ *схема* (13) *консервативна*, L_2-*консервативна и имеют место энергетические равенства*

$$\begin{gathered}\left(\frac{1}{2}(y_n + y_{n+1}), 1\right) = \left(\frac{1}{2}(y_0 + y_1), 1\right), \\ \left\|\frac{1}{2}(y_n + y_{n+1})\right\| = \left\|\frac{1}{2}(y_0 + y_1)\right\|.\end{gathered} \quad (16)$$

Замечание 1. При $\tilde{y} = \frac{1}{2}(y_n + y_{n+1})$ схема (13) эквивалента двухслойной схеме $\tilde{y}_t + A\tilde{y}^{(1/2)} = 0$.

5. Рассмотрим один из возможных подходов к построению явных L_2-консервативных трехслойных разностных схем для нелинейного уравнения Кортевега–де Фриса. При построении консервативной схемы для нелинейного уравнения наряду с интегроинтерполяционным методом [8] воспользуемся усреднением по Стеклову функции u^2 [10]:

$$u^2 \sim \frac{1}{u_+ - u}\int_u^{u_+} u^2 du = \frac{1}{3}\frac{(u^3)_x}{u_x} = \frac{1}{3}(u_+^2 + uu_+ + u^2), \quad (17)$$

где $u_\pm = u(x_{i\pm1}, t)$, $t \in \omega_\tau$. Используя (17), построим явную трехслойную схему [5] второго порядка аппроксимации $O(h^2 + \tau^2)$

$$y_{\overset{\circ}{t}} + Ay = 0, \quad Ay = \bar{y}A_1y + \beta A_2 y. \quad (18)$$

Здесь нелинейный оператор A определяется формулами (9), (10), $\bar{y} = (y_+y + y_-)/3$. Так как разностное уравнение (18) может быть записано в дивергентном виде, то очевидно, что первое из соотношений (16) выполняется, т.е. разностная схема (18) является консервативной.

Теорема 3. *Нелинейная разностная схема* (18) L_2-*консервативна, и ее решение удовлетворяет сеточному аналогу* $E_{1_h}(t) = E_{1_h}(0)$, $t \in \omega_\tau$, *интегрального закона сохранения* (2).

Доказательство. Покажем, что, как и в случае дифференциальной задачи (см. равенства (4)), $(Ay, y) = 0$. Для этого достаточно убедиться в том, что $(\bar{y}A_1y, y) = 0$. Используя тождества $(y, v_{\overset{\circ}{x}}) = -(y_{\overset{\circ}{x}}, v)$, $\bar{y}\, y_{\overset{\circ}{x}} = (yy_{\overset{\circ}{x}} + (y^2)_{\overset{\circ}{x}})/3$, получим

$$\begin{aligned}(\bar{y}A_1y, y) &= (\bar{y}y_{\overset{\circ}{x}}, y) = \\ &= \frac{1}{3}((yy_{\overset{\circ}{x}}, y) - (y^2, y_{\overset{\circ}{x}})) = 0.\end{aligned} \quad (19)$$

Умножая теперь уравнение (18) скалярно в Ω_h на $2\tau y$ и применяя свойство (19), приходим к требуемому результату. Теорема доказана.

6. Для аппроксимации уравнения КдФ рассмотрим теперь трехслойные схемы с весами

$$y_{\overset{\circ}{t}} + \bar{y}^{(\sigma,\sigma)}y_{\overset{\circ}{x}}^{(\sigma,\sigma)} + \beta y_{\bar{x}x\overset{\circ}{x}}^{(\sigma,\sigma)} = 0. \quad (20)$$

Теорема 4. *Разностная схема* (20) *с периодическими по пространству решениями консервативна*, L_2-*консервативна и для ее решения имеют место следующие сеточные аналоги дифференциальных законов сохранения* (4):

$$\begin{gathered}E_k^{(\sigma)}(t) = E_k^{(\sigma)}(0), \quad k = 1, 2, 3; \quad t \in \omega_\tau, \\ E_2^{(\sigma)} = E_3^{(\sigma)},\end{gathered} \quad (21)$$

$$\begin{gathered}E_1^{(\sigma)} = \left(\frac{\hat{y} + y}{2}, 1\right), \\ E_2^{(\sigma)} = \frac{\|\hat{y}\|^2 + \|y\|^2}{2} + \tau^2\left(\sigma - \frac{1}{2}\right)\|y_t\|^2,\end{gathered} \quad (22)$$

$$E_3^{(\sigma)} = \left\|\frac{\hat{y} + y}{2}\right\|^2 + \tau^2\left(\sigma - \frac{1}{4}\right)\|y_t\|^2. \quad (23)$$

Доказательство теоремы проводится аналогично доказательству теоремы 3. L_2-консервативность схемы следует из формул (22), (23) соответственно при $\sigma = \frac{1}{2}$ и $\sigma = \frac{1}{4}$.

Энергетические соотношения (21) являются также априорными оценками соответственно при $\sigma \ge \frac{1}{2}$ и $\sigma \ge \frac{1}{4}$, причем равенство (21) при $k = 3$ можно интерпретировать как априорную оценку, полученную для разностного решения в полуцелых узлах $y_{n+1/2} = \frac{y_n + y_{n+1}}{2}$.

Замечание 2. Используя идею представления конвективных слагаемых в дивергентном и недивергентном виде, можно построить следующий класс L_2-консервативных разностных схем вида:

$$y_{\overset{\circ}{t}} + \frac{1}{3}(yy_{\overset{\circ}{x}}^{(\sigma_1,\sigma_2)} + (yy^{(\sigma_1,\sigma_2)})_{\overset{\circ}{x}}) + \beta y_{\bar{x}x\overset{\circ}{x}}^{(\sigma_1,\sigma_2)} = 0, \quad (24)$$

который уже не является нелинейным. При $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$ они совпадают с явной схемой (18). На основании тождества $(y, v_{\overset{\circ}{x}}) = -(y_{\overset{\circ}{x}}, v)$, $y, v \in \Omega_h$

$$(yy_{\overset{\circ}{x}}^{(\sigma_1, \sigma_2)} + (yy^{(\sigma_1, \sigma_2)})_{\overset{\circ}{x}}, y^{(\sigma_1, \sigma_2)}) = 0.$$

Следовательно, в силу теоремы 1 при $\sigma_1 \geq \sigma_2$, $\sigma_1 + \sigma_2 \geq 1$ для решения разностной задачи (24), (7) имеет место априорная оценка (14). Согласно теореме 4, схема (20) L_2-консервативна при $\sigma_1 = \sigma_2 = 1/4$, относительно функционала $E_3^{(1/4)}(t)$.

Замечание 3. К сожалению, схема (20) утратила свойство консервативности. Однако ее можно рассматривать как способ линеаризации

$$\overset{k+1}{v}_t + \frac{1}{3}(\overset{k}{v}\overset{k+1}{v}_{\overset{\circ}{x}} + (\overset{k}{v}\overset{k+1}{v})_{\overset{\circ}{x}}) + \beta^k \overset{k+1}{v}_{\bar{x}x\overset{\circ}{x}} = 0$$

нелинейного алгоритма (20) при $v = y^{(\sigma_1, \sigma_2)}$. Если итерационный процесс сходится, то он и дает решение консервативной и L_2-консервативной схемы (20).

Замечание 4. Приведем L_2-консервативную схему для параболического уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial u}{\partial x}\right), \quad k \geq k_0 > 0, \tag{25}$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad u(0, t) = u(l, t) = 0. \tag{26}$$

Пусть

$$E(t) = \int_0^l u^2(x, t)dx + 2\int_0^t\int_0^l k(x, t)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dxdt. \tag{27}$$

Умножая уравнение (25) скалярно на $2u$, получим интегральный закон сохранения

$$E(t) = E(0). \tag{28}$$

Нетрудно показать, что для консервативной разностной схемы с весами

$$y_t = (\alpha y_{\bar{x}}^{(\sigma)})_x, \quad y_0 = y_N = 0$$

сеточный аналог (28) имеет место при $\sigma = \frac{1}{2}$ [8].

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского и Белорусского фондов фундаментальных исследований.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Уизем Дж.* Линейные интегральные волны. М.: Мир, 1977.
2. *Korteweg D.J., de Vries G.* // Phil. Mag. 1895. V. 39. № 5. P. 422–443.
3. *Березин Ю.А.* Численное исследование нелинейных волн в разреженной плазме. Новосибирск: Наука, 1977.
4. *Карпман В.И.* Нелинейные волны в диспергирующих средах. М.: Наука, 1973.
5. *Zabusky N.J., Kruskal M.D.* // Phys. Rev. Lett. 1965. V. 15. № 6. P. 240–243.
6. *Самарский А.А., Попов Ю.П.* Разностные методы решения задач газовой динамики. М.: Наука, 1992.
7. *Туретаев И.Д.* // ЖВМиМФ. 1992. Т. 32. № 8. С. 1273–1290.
8. *Самарский А.А.* Теория разностных схем. М.: Наука, 1977.
9. *Гулин А.В., Дегтярев С.Л.* // Вестн. МГУ. Сер. 15. Вычисл. математика и кибернетика. 1994. № 3. С. 23–29.
10. *Абрашин В.Н.* // Дифференц. уравнения. 1986. Т. 22. № 7. С. 1107–1119.