ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 1997, том 352, № 5, с. 602–605

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

УДК 519.63

ИНВАРИАНТНЫЕ РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПРЕОБРАЗОВАНИЕМ НЕЗАВИСИМЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

© 1997 г. Академик А. А. Самарский, В. И. Мажукин, П. П. Матус

Поступило 10.10.96 г.

1. При численном решении дифференциальных задач широко используется преобразование независимых переменных, осуществляющее переход от одной системы координат к другой [1–3]. При этом дифференциальные задачи, записанные в различных системах координат, эквивалентны. Представляется вполне разумным требовать выполнения аналогичного свойства и для разностных схем.

Целью настоящего сообщения являются разработка математического аппарата и проведение с его помощью теоретических исследований свойств разностных схем, аппроксимирующих дифференциальные уравнения в различных системах координат. В связи с этим в данной работе вводится следующее понятие инвариантной разностной схемы.

Определение. Будем говорить, что *разностная схема инвариантна по какому-то свойству*, если она сохраняет это свойство в заданном классе дискретных преобразований независимых переменных.

Так, при переходе от одной системы координат к другой от разностной схемы разумно требовать сохранения (инвариантности) таких свойств, как аппроксимация, устойчивость, сходимость и др.

Выполненные исследования позволили получить необходимые условия сохранения в различных системах координат свойств аппроксимации и консервативности (квазиравномерность сетки в исходном физическом пространстве, аппроксимация метрического коэффициента $\psi = \dfrac{dx}{dq}$ из условий наилучшей разностной схемы [4]).

2. Модельное уравнение. Основные принципы построения и теоретического исследования таких схем проиллюстрируем на примере первой краевой задачи

$$(k(x)u')' - r(x)u = -f(x), \quad a < x < b,$$
$$u(a) = u(b) = 0, \quad k(x) \ge c_1 > 0. \tag{1}$$

На отрезке $[a, b]$ введем произвольную неравномерную сетку узлов $\hat{\bar{\omega}}_h = \{x_i = x_{i-1} + h_i, i = 1, \ldots, N: x_0 = a, x_N = b\}$. На сетке $\hat{\bar{\omega}}_h$ рассмотрим следующую однородную консервативную схему [4]:

$$(ay_{\bar{x}})_{\hat{x}} - d_i y_i = -\varphi_i, \quad y(a) = y(b) = 0, \tag{2}$$

$$a_i = \left[\frac{1}{h_i}\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i}\frac{dx}{k(x)}\right]^{-1}, \quad d_i = \frac{1}{\hbar_i}\int\limits_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} r(x)dx,$$
$$\varphi_i = \frac{1}{\hbar_i}\int\limits_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} f(x)dx. \tag{3}$$

Пусть существует дважды непрерывно дифференцируемая функция $x(q)$,

$$\frac{dx}{dq} = \psi(q) \ge c_2 > 0, \tag{4}$$

преобразующая отрезок $0 \le q \le 1$ в отрезок $a \le x \le b$ так, что каждой неравномерной сетке $\hat{\bar{\omega}}_h$ соответствует равномерная сетка $\bar{\omega}_{h_q} = \{q_i = ih_q, h_q = \dfrac{1}{N}, i = 0, \ldots, N\}$. После замены переменной (4) дифференциальная задача (1) преобразуется к виду

$$\frac{1}{\psi}\frac{d}{dq}\left(\frac{\bar{k}(q)}{\psi}\frac{d\bar{u}}{dq}\right) - \bar{r}(q)\bar{u} = -\bar{f}(q),$$
$$0 < q < 1, \quad \bar{u}(0) = \bar{u}(1) = 0. \tag{5}$$

Здесь $\bar{u} = \bar{u}(q) = u(x(q)) = u(x) = u$. Это означает, что задачи (1) и (5) на дифференциальном уровне эквивалентны. Естественно такое же требование предъявить и к разностным задачам. При построении таких инвариантных схем в общем случае естественно исходить из уравнения баланса с

Институт математического моделирования Российской Академии наук, Москва

Институт математики Академии наук Беларуси, Минск

Тогда для произвольного алгоритма вида (4), *при* $p \neq 0$ *или* $T \neq n\Delta t$ *имеет место равенство*

$$z_A(t|D_p;\ v_p^+(\cdot;\ T)) = \sum_m^* \mathcal{P}_m^p\left(\left\{\frac{T}{\Delta t}\right\} - \frac{1}{2}\right) \times$$

$$\times e^{\gamma\Delta t\left(\left\{\frac{T}{\Delta t}\right\} - \frac{1}{2} - m\right)} F_A\left(t - \Delta t\left[\frac{T}{\Delta t}\right] - \frac{\Delta t}{2} - m\frac{\Delta t}{2}\right),$$

где $[\cdot]$, $\{\cdot\}$ – *целая и дробная части числа. В случае* $p = 0$, $T = n\Delta t$

$$z_A(t|D_0;\ v_0^+(\cdot;\ T)) = \frac{1}{2}e^{\gamma\frac{\Delta t}{2}} F_A\left(t - T + \frac{\Delta t}{2}\right) +$$

$$+ \frac{1}{2}e^{-\gamma\frac{\Delta t}{2}} F_A\left(t - T - \frac{\Delta t}{2}\right).$$

Результат получается применением к (4) суммационной формулы Пуассона (см., например, [4]) с последующим вычислением суммы ряда. Поведение $F_A(t)$ описывает

Лемма 3. *Пусть* $A \in \mathcal{A}(p, S, h_S)$ *или* $A \in \mathcal{A}(W, h_W)$. *Тогда* $F_A(t)$ *ограничена равномерно по* t, Δt, *и (для достаточно малых* Δt) *имеет место оценка*

$$\left|F_A(t) - \frac{d^p}{dt^p}v_p^+(t)\right| \ll \frac{\Delta t}{|t|}.$$

Результат получается рассмотрением (9) с учетом свойств алгоритмов. Обратим внимание на то, что формальная замена $R_\alpha(\omega)\left(\dfrac{\frac{\Delta t}{2}(\omega + i\gamma)}{\sin\frac{\Delta t}{2}(\omega + i\gamma)}\right)^{p+1} \to$ $\to 1$ в (9) приводит к замене

$$F_A(t) \to z(t|D_p;\ v_p^+) \equiv \frac{d^p}{dt^p}v^+(t).$$

Лемма 4. *Если* $|t - T| > \frac{1}{2}(p + 1)\Delta t$, *то имеет место оценка*

$$\left|\sum_m^* \mathcal{P}_m^p\left(\left\{\frac{T}{\Delta t}\right\} - \frac{1}{2}\right) e^{\gamma\Delta t\left(\left\{\frac{T}{\Delta t}\right\} - \frac{1}{2} - \frac{m}{2}\right)} \frac{d^p}{dt^p} v_p^+\left(t - \Delta t\left[\frac{T}{\Delta t}\right] - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{\Delta t}{2} - m\frac{\Delta t}{2}\right) - \frac{d^p}{dt^p}v_p^+(t - T)\right| \ll \Delta t.$$

Результат получается прямым вычислением с учетом явного вида v_p^+ (6) и свойств полиномов $\mathcal{P}_m^k(x)$. Из лемм 2–4 вытекает

Лемма 5. *Пусть* $A \in \mathcal{A}(p, S, h_S)$ *или* $\in \mathcal{A}(W, h_W)$. *Тогда приближенное решение* $z_A(t|D_p;\ v^+(\cdot;\ T))$ *ограничено равномерно по* t *и* Δt. *Для всех (достаточно малых)* Δt *и всех* t *таких, что* $|t - T| \geq d > \frac{1}{2}(p + 1)\Delta t$, *имеет место оценка*

$$\left|z_A(t|D_p;\ v_p^+(\cdot;\ T)) - z(t|D_p;\ v_p^+(\cdot;\ T))\right| \ll$$

$$\ll \Delta t + \frac{\Delta t}{d - \frac{1}{2}(p + 1)\Delta t}.$$

Объединяя леммы 1 и 5, получаем основной результат.

Теорема. *Пусть* $L \in \mathcal{L}(p, \delta_L)$, $u \in \mathcal{U}(p, M)$. *Пусть* $A \in \mathcal{A}(p, S, h_S)$ *или* $A \in \mathcal{A}(W, h_W)$. *Тогда приближенное решение ограничено равномерно по* t *и* Δt. *Кроме того, для всех (достаточно малых)* Δt *и всех* t, *расстояние* r *до которых от точек* T_j *разрывов точного решения удовлетворяет условию* $r \geq d > \frac{1}{2}(p + 1)\Delta t$, *имеет место оценка*

$$|z_A(t) - z(t)| \ll \Delta t^\delta + \frac{\Delta t}{d - \frac{1}{2}(p + 1)\Delta t}, \qquad (10)$$

где $0 < \delta < \min\{1, M - p - 1, \delta_L\}$.

Из (10) *следует, что указанные алгоритмы*:

1) *сходящиеся при* $\Delta t \to 0$ *во всех точках непрерывности решения*;

2) *локализуют разрывы в смысле определения.*

Автор выражает признательность Д.А. Попову за многочисленные обсуждения, касающиеся темы данной работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Попов Д.А., Сушко Д.В.* // ДАН. 1990. Т. 315. № 2. С. 309–313.
2. *Сушко Д.В.* // Мат. заметки. 1996. Т. 59. № 6. С. 893–908.
3. *Popov D.A., Sushko D.V.* // Amer. Math. Soc. Trans. 1994. V. 162. (2). P. 43–127.
4. *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1967.

использованием интегро-интерполяционного метода [4]. Уравнение баланса тепла на отрезке $x_{i-1/2} \le x \le x_{i+1/2}$ имеет вид

$$w_{i-1/2} - w_{i+1/2} + \int\limits_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} f(x)dx = \int\limits_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} r(x)u(x)dx, \quad w = -ku'. \tag{6}$$

В новой системе координат уравнение (6) перепишется в виде

$$\bar{w}_{i-1/2} - \bar{w}_{i+1/2} + \int\limits_{q_{i-1/2}}^{q_{i+1/2}} \bar{f}\psi dq = \int\limits_{q_{i-1/2}}^{q_{i+1/2}} \bar{r}\psi\bar{u}dq, \quad \bar{w} = -\frac{\bar{k}\bar{u}'}{\psi}. \tag{7}$$

Чтобы получить из (7) разностное уравнение, следуя [4], заменим $\bar{w}$ и интеграл, содержащий $\bar{u}$, линейными комбинациями значений $\bar{u}$ в узлах:

$$\int\limits_{q_{i-1/2}}^{q_{i+1/2}} \bar{r}(q)\psi(q)\bar{u}(q)dq \approx h_q\psi_{hi}\tilde{d}_i\bar{u}_i, \quad \tilde{d}_i = \frac{1}{h_q\psi_{hi}}\int\limits_{q_{i-1/2}}^{q_{i+1/2}} \bar{r}\psi dq, \tag{8}$$

$$\psi_{hi} = \frac{x_{i+1/2} - x_{i-1/2}}{h_q}, \tag{9}$$

$$\bar{w}_{i-1/2} \approx \tilde{w}_{i-1/2} = -\tilde{a}_i\frac{\bar{u}_i - \bar{u}_{i-1}}{h_q}, \quad \tilde{a}_i = \left[\frac{1}{h_q}\int\limits_{q_{i-1}}^{q_i}\frac{\psi dq}{\bar{k}(q)}\right]^{-1}. \tag{10}$$

Подставляя (8)–(10) в (7) и обозначая через $\bar{y}_i$ искомую функцию, получим консервативную разностную схему

$$\frac{1}{h_q\psi_{hi}}\left[\tilde{a}_{i+1}\frac{\bar{y}_{i+1} - \bar{y}_i}{h_q} - \tilde{a}_i\frac{\bar{y}_i - \bar{y}_{i-1}}{h_q}\right] - \tilde{d}_i\bar{y}_i = -\tilde{\varphi}_i, \quad \bar{y}(0) = \bar{y}(1) = 0, \tag{11}$$

$$\tilde{\varphi}_i = \frac{1}{h_q\psi_{hi}}\int\limits_{q_{i-1/2}}^{q_{i+1/2}} \bar{f}(q)\psi(q)dq.$$

Так как коэффициенты $\tilde{a}_i$, $\tilde{d}_i$, $\tilde{\varphi}_i$ во всех узлах q_i, $i = 1, \ldots, N-1$, определяются по одним и тем же формулам, то схема (11) является однородной.

Докажем, что она является консервативной. Для этого достаточно показать, что сеточный аналог интегрального закона сохранения (7) для всей области ω_{h_q}:

$$\bar{w}_{1/2} - \bar{w}_{N-1/2} + \int\limits_{q_{1/2}}^{q_{N-1/2}} \bar{f}\psi dq = \int\limits_{q_{1/2}}^{q_{N-1/2}} \bar{r}\psi\bar{u}dq,$$

является алгебраическим следствием (11). Действительно, записывая равенство (11) в виде $\tilde{w}_{i-1/2} - \tilde{w}_{i+1/2} + \int\limits_{q_{i-1/2}}^{q_{i+1/2}} \bar{f}\psi dq = h_q\psi\tilde{d}_i\bar{y}_i$ и суммируя по $i = 1, 2, \ldots, N-1$, получим разностный закон сохранения тепла во всей сеточной области

$$\tilde{w}_{1/2} - \tilde{w}_{N-1/2} + \int\limits_{q_{1/2}}^{q_{N-1/2}} \bar{f}\psi dq = \sum_{i=1}^{N-1} h_q\psi\tilde{d}_i\bar{y}_i.$$

Он является разностной аппроксимацией интегрального закона сохранения для уравнения (5). Докажем, что схема (11) сохраняет свойство консервативности и в исходной системе координат. Для этого достаточно показать, что $\bar{y}_i = \bar{y}(q_i) = y(x_i) = y_i$, где y_i – решение эталонной разностной схемы (2), (3). Действительно, замечая, что шаблонные функционалы $\tilde{a}_i$, $\tilde{d}_i$, $\tilde{\varphi}_i$ задачи (11) связаны с соответствующими функционалами a_i, d_i, φ_i схемы (2), (3) соотношениями

$$\tilde{a}_i = \frac{a_i h_q}{h_i}, \quad \tilde{d}_i = d_i, \quad \tilde{\varphi}_i = \varphi_i, \tag{12}$$

из (11) находим

$$\frac{\dfrac{a_{i+1}(\bar{y}_{i+1} - \bar{y}_i)}{h_{i+1}} - \dfrac{a_i(\bar{y}_i - \bar{y}_{i-1})}{h_i}}{\hbar_i} - d_i\bar{y}_i = -\varphi_i.$$

Сравнивая последнее уравнение с (2), приходим к выводу, что $\bar{y}(q_i) = y(x_i)$. Итак, разностная схема (11) сохраняет свойство консервативности в заданном классе дискретных преобразований (9). Отметим, что соотношения (12) должны выполняться и при других способах задания шаблонных функционалов a_i, d_i, φ_i [4].

Покажем, что в случае постоянного коэффициента ($k = 1$) для инвариантности схемы по свойству консервативности необходимо, чтобы шаблонный функционал $\tilde{a}_i$ определялся из наилучшей разностной схемы. Действительно, согласно (10) имеем

$$\tilde{a}_i = \bar{a}_i = \left[\frac{1}{h_q}\int\limits_{q_{i-1}}^{q_i}\psi dq\right]^{-1} = \frac{h_q}{h_i},$$

что согласуется с требованием инвариантности (12).

Рассмотрим вопрос о погрешности аппроксимации. В силу алгебраической эквивалентности разностных задач (11) и (2) имеем

$$\bar{\delta}(q_i) = -\left(\frac{1}{\psi_{hi}}(\tilde{a}\bar{y}_{\bar{q}})_{q,i} - \tilde{d}_i\bar{u}_i + \tilde{\varphi}_i\right) -$$

$$-\left(\frac{1}{\psi}\frac{d}{dq}\left(\frac{\bar{k}(q)}{\psi}\frac{d\bar{u}}{dq}\right) - \bar{r}(q_i)\bar{u}(q_i) + \bar{f}(q_i)\right) =$$

$$= \left((au_{\bar{x}})_{\hat{x},i} - \frac{d}{dx}\left(k(x)\frac{du}{dx}\right)\right) -$$

$$-\left(\frac{1}{\hbar_i}\int\limits_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} r(x)dx - r(x_i)\right)u(x_i) +$$

$$+\left(\frac{1}{\hbar_i}\int\limits_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} f(x)dx - f(x_i)\right) = \delta(x_i) =$$

$$= O((h_{i+1} - h_i) + \hbar_i^2).$$

Итак, разностная схема (2) на произвольной неравномерной сетке $\hat{\bar{\omega}}_h$ аппроксимирует исходную задачу (1) с первым порядком: $\delta(x_i) = O((h_{i+1} - h_i) + \hbar_i^2)$. Для того чтобы оценить порядок аппроксимации схемы (11) на равномерной сетке ω_{h_q}, заметим, что

$$\begin{aligned} h_{i+1} - h_i &= h_q^2 x_{\bar{q}q} \approx h_q^2\psi'(q_i), \\ \hbar_i &\approx h_q(\psi(q_i) + h_q^2\psi''(q_i)), \end{aligned} \tag{13}$$

если только функция $x'''(q)$ ограничена при $q \in [0, 1]$. Следовательно, $\bar{\delta}(q_i) = O(h_q^2)$ и имеет место следующее утверждение.

Теорема. *Для того чтобы в новой системе координат на равномерной сетке ω_{h_q} инвариантная разностная схема аппроксимировала дифференциальную задачу со вторым порядком $O(h_q^2)$, необходимо, чтобы сетка $\hat{\bar{\omega}}_h$, заданная на отрезке $x \in [a, b]$, была квазиравномерной.*

Итак, для построения инвариантной разностной схемы второго порядка точности для задачи (5) необходимо, чтобы шаблонные функционалы $\tilde{a}_i$, $\tilde{d}_i$, $\tilde{\varphi}_i$ удовлетворяли соотношениям (12) и сетка $\hat{\bar{\omega}}_h$, заданная на отрезке $x \in [a, b]$ в исходной системе координат, была квазиравномерной.

3. Выбор сеточных норм. Исследование устойчивости и сходимости разностных схем обычно проводят в сеточных нормах, являющихся аналогами соответствующих норм в пространстве функций непрерывного изменения аргумента. Для функций одной переменной $u = u(x)$, $a \le x \le b$ и $\bar{u} = \bar{u}(q)$, $0 \le q \le 1$, где x и q связаны преобразованием переменных (4), нормы в пространстве непрерывных функций C и L_2 определяются так:

$$\|u\|_{C[a,b]} = \max_{a \le x \le b}|u(x)|,$$

$$\|\bar{u}\|_{C[0,1]} = \max_{0 \le q \le 1}|\bar{u}(q)|, \quad \|u\|_C = \|\bar{u}\|_C;$$

$$\|u\|_{L_2[a,b]} = \left\{\int\limits_a^b u^2(x)dx\right\}^{1/2} = \left\{\int\limits_0^1 \psi\bar{u}^2(q)dq\right\}^{1/2},$$

$$\|u\|^2 = (\psi, \bar{u}^2).$$

Покажем, что для инвариантной разностной схемы (2), (11) аналогичная согласованность норм имеет место и в дискретном случае.

Пусть H_h – пространство сеточных функций, заданных на неравномерной сетке $\hat{\bar{\omega}}_h$, с обычными скалярными произведениями и нормами [4]:

$$\|v\|_C = \max_{x \in \hat{\omega}_h}|v(x)|,$$

$$\|v\|_*^2 = (v, v)_* = \sum_{i=1}^{N-1}\hbar_i v_i^2;$$

$$\|v_{\bar{x}}\|^2 = (v_{\bar{x}}, v_{\bar{x}}] = \sum_{i=1}^{N} h_i v_{\bar{x},i}^2.$$

Пусть теперь H_{h_q} – пространство сеточных функций, заданных на равномерной сетке $\bar{\omega}_{h_q}$. Для произвольной сеточной функции $\bar{v} \in H_{h_q}$ определим соответствующие сеточные нормы с весовой функцией ψ_h, задаваемой формулой (9):

$$\|\bar{v}\|_C = \max_{q \in \omega_{h_q}}|\bar{v}(q)|, \quad (\psi_h, \bar{v}^2) = \sum_{i=1}^{N-1} h_q\psi_{hi}\bar{v}_i^2,$$

$$(\bar{a}, \bar{v}_{\bar{q}}^2] = \sum_{i=1}^{N} h_q\bar{a}_i\bar{v}_{\bar{q},i}^2, \quad \bar{a}_i = \frac{1}{x_{\bar{q},i}}.$$

Нетрудно убедиться, что для инвариантной разностной схемы имеет место согласованность сеточных норм в следующем смысле:

$$\|y\|_{C(\hat{\omega}_h)} = \|\bar{y}\|_{C(\omega_{h_q})}, \quad (\psi_h, \bar{y}^2) = \|y\|_*^2,$$
$$(\bar{a}, \bar{y}_q^2] = \|y_{\bar{x}}\|^2. \tag{14}$$

Лемма. *Для произвольной сеточной функции $\bar{y}(q_i)$, заданной на равномерной сетке ω_{h_q} и обращающейся в нуль при $q = 0$ и $q = 1$, справедливо неравенство*

$$(\psi_h, \bar{y}^2) \le 0.25 l^2 (\bar{a}, \bar{y}_{\bar{q}}^2], \quad l = b - a.$$

Доказательство. Из (14) и вложения $\|y\|_* \le 0.5l\|y_{\bar{x}}\|$ имеем $(\psi_h, \bar{y}^2) \le 0.25l\|y_{\bar{x}}\|^2$. Используя (14), приходим к требуемой оценке. Лемма доказана.

4. Априорные оценки. Перейдем теперь к вопросу об устойчивости. Методом энергетических неравенств нетрудно получить оценку $(\bar{a}, \bar{y}_{\bar{q}}^2] \le l^2/(4c_1)(\psi_h, \tilde{\varphi}^2)$, выражающую устойчивость разностной схемы (11) по правой части в сеточной полунорме W_2^1 с весовой функцией $\bar{a}(\psi)$. Любопытно отметить, что в силу инвариантности разностных схем, эквивалентности сеточных норм из последнего неравенства сразу же следует априорная оценка и для решения разностной задачи (2):

$$\|y_{\bar{x}}\| \le l/(2c_1)\|\varphi\|_*.$$

5. С точки зрения вычислительной практики требование инвариантности позволяет, таким образом, конструировать разностные схемы для дифференциальных задач, записанных в различных системах координат, что при этом относительно заданного класса преобразований независимых переменных сохраняются такие важные свойства, как консервативность, аппроксимация, устойчивость, сходимость и др.

Авторы выражают благодарность П.Н. Вабищевичу за полезные обсуждения и ряд ценных замечаний.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Головизнин В.М., Самарский А.А., Фаворский А.П.* // ДАН. 1977. Т. 235. № 6. С. 1285–1287.
2. *Thompson J.F.* // Appl. Math. and Comput. 1982. V. 10/11. P. 79–105.
3. *Дарьин Н.А., Мажукин В.И., Самарский А.А.* // ДАН. 1988. Т. 302. № 5. С. 1078–1081.
4. *Самарский А.А.* Теория разностных схем. М.: Наука, 1989. 616 с.