ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 1997, том 37, № 2, с. 188–192

УДК 519.633

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ ДЛЯ ЗАДАЧ КОНВЕКЦИИ-ДИФФУЗИИ[1)]

© 1997 г. П. Н. Вабищевич, А. А. Самарский

(Москва)

Поступила в редакцию 17.11.95 г.

Для несамосопряженных параболических задач устанавливаются достаточные условия устойчивости в пространствах L_∞ и L_1. Исследование базируется на использовании логарифмической нормы соответствующих сеточных операторов. Рассмотрены разностные схемы с направленными разностями и схемы с центральными разностными производными для аппроксимации членов конвективного переноса.

В вычислительной гидродинамике [1], [2] проблемам приближенного решения задач конвекции-диффузии уделяется самое пристальное внимание. При аппроксимации конвективных слагаемых используются схемы с направленными разностями, гибридные схемы, схемы с направленными разностями высокого порядка. Основной недостаток классических схем второго порядка аппроксимации с помощью центральных разностей связывается с нарушением устойчивости.

Теоретическое исследование устойчивости разностных схем для нестационарных задач конвекции-диффузии в гильбертовых сеточных пространствах проводится на основе общей теории устойчивости разностных схем [3], [4]. При рассмотрении задач конвекции-диффузии с конвективными членами в недивергентной форме устойчивость в равномерной норме исследуется на основе принципа максимума для разностных уравнений [3], [4]. Для задач с дивергентными конвективными слагаемыми принцип максимума устанавливается в [5], [6]. Для таких задач наиболее естественно изучать устойчивость в L_1. Оценки такого типа получены в [7] на основе рассмотрения сопряженного разностного оператора.

В данной работе достаточные условия устойчивости получены с привлечением понятия логарифмической нормы [8], [9] оператора. С этих позиций вначале рассматривается двухслойная разностная схема для системы ОДУ, а затем полученные общие условия конкретизируются на примере двумерного модельного уравнения конвекции-диффузии с конвективными слагаемыми в недивергентной и дивергентной формах. Обсуждаются консервативные и неконсервативные схемы с направленными разностями, а также условия устойчивости стандартных схем второго порядка аппроксимации по пространству.

1. ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ СИСТЕМЫ ОДУ

Рассмотрим вначале следующую систему линейных обыкновенных уравнений первого порядка:

$$\frac{dv_i}{dt} + \sum_{j=1}^{N} a_{ij} v_j = f_i, \quad j = 1, 2, \ldots, N. \tag{1.1}$$

Полагая $v = v(t) = (v_1, \ldots, v_N)$, $A = (a_{ij})$, записываем (1.1) в матричном виде:

$$dv/dt + A(t)v = f(t). \tag{1.2}$$

Будем строить разностные схемы для приближенного решения задачи Коши, когда (1.2) рассматривается при $t > 0$ и начальных условиях

$$v(0) = v^0. \tag{1.3}$$

Нас будет интересовать устойчивость разностного решения задачи (1.2), (1.3) в L_∞ (в C) и L_1. Для нормы вектора и согласованной с ней нормы матрицы в L_∞ имеем (см. [10])

$$\|v\|_\infty = \max_{1 \le i \le N} |v_i|, \quad \|A\|_\infty = \max_{1 \le i \le N} \sum_{j=1}^{N} |a_{ij}|. \tag{1.4}$$

[1)] Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 95-01-01298, 96-01-00657).

Аналогично, в L_1

$$\|v\|_1 = \sum_{i=1}^{N} |v_i|, \quad \|A\|_1 = \max_{1 \le j \le N} \sum_{i=1}^{N} |a_{ij}|. \tag{1.5}$$

Задачу (1.2), (1.3) будем рассматривать при следующих ограничениях. Диагональные элементы матрицы A предполагаются неотрицательными, и имеется диагональное преобладание по строкам или столбцам, т.е. справедливо

$$a_{ii} \ge \sum_{j=1, j \ne i}^{N} |a_{ij}|, \quad i = 1, 2, \ldots, N \tag{1.6}$$

(диагональное преобладание по строкам), либо имеет место

$$a_{jj} \ge \sum_{i=1, i \ne j}^{N} |a_{ij}|, \quad j = 1, 2, \ldots, N \tag{1.7}$$

(диагональное преобладание по столбцам).

Логарифмическая норма матрицы A есть (см. [8], [9]) число

$$\mu[A] = \lim_{h \to 0+} \frac{\|E + hA\| - 1}{h},$$

где E – единичная матрица. Для логарифмической нормы матрицы в L_∞ (согласованной с (1.4)) и в L_1 (согласованной с (1.5)) имеют место выражения

$$\mu_\infty[A] = \max_{1 \le i \le N}\left(a_{ii} + \sum_{j=1, j \ne i}^{N} |a_{ij}|\right), \quad \mu_1[A] = \max_{1 \le j \le N}\left(a_{jj} + \sum_{i=1, i \ne j}^{N} |a_{ij}|\right).$$

В силу ограничений (1.6), (1.7), в задаче Коши (1.2), (1.3) для логарифмической нормы матрицы $-A$ имеем

$$\mu[-A] \le 0 \tag{1.8}$$

в соответствующем пространстве (в L_∞ при выполнении (1.6) и в L_1 – при (1.7)).

Из свойств логарифмической нормы (см. [8], [11]) отметим следующие:

1) $\mu[cA] = c\mu[A], \quad c \ge 0$;

2) $\mu[cE + A] = c + \mu[A]$;

3) $\|Av\| \ge \max(-\mu[-A], -\mu[A])\|v\|$.

Наибольшего внимания заслуживает свойство 3), которое позволяет получить легко вычисляемую по элементам матрицы оценку нормы Av снизу. Такая оценка комбинируется с обычной оценкой нормы Av сверху: $\|Av\| \le \|A\|\|v\|$.

2. СХЕМА С ВЕСАМИ

Построим и исследуем на устойчивость разностные схемы для приближенного решения задачи (1.2), (1.3). Обозначим через y^n разностное решение на момент времени $t^n = n\tau$, где $\tau > 0$ – шаг по времени. Запишем для (1.2), (1.3) двухслойную разностную схему с весами:

$$(y^{n+1} - y^n)/\tau + A^n[\sigma y^{n+1} + (1 - \sigma)y^n] = f^n, \quad n = 0, 1, \ldots, \tag{2.1}$$

где, например, $A^n = A[\sigma t^{n+1} + (1 - \sigma)t^n]$, при начальном условии

$$y^0 = v^0. \tag{2.2}$$

Достаточные условия устойчивости разностной схемы (2.1), (2.2) формулируются в виде следующего утверждения.

Теорема 1. *Для задачи Коши* (1.2), (1.3) *с матрицей* A, *удовлетворяющей условиям* (1.6) (*или* (1.7)), *разностная схема с весами* (2.1), (2.2) *условно устойчива в* L_∞ (*в* L_1) *при* $0 \le \sigma < 1$ *и*

$$\tau \le \frac{1}{1 - \sigma}(\max_{1 \le i \le N} a_{ii})^{-1} \tag{2.3}$$

и безусловно устойчива при $\sigma = 1$. *При этом для разностного решения верна априорная оценка*

$$\|y^{n+1}\| \le \|y^0\| + \sum_{k=0}^{n} \tau \|f^k\|. \tag{2.4}$$

Доказательство. Из (2.1) следует

$$(E + \sigma\tau A^n)y^{n+1} = [E - (1-\sigma)\tau A^n]y^n + \tau f^n$$

и тем самым

$$\|(E + \sigma\tau A^n)y^{n+1}\| \le \|[E - (1-\sigma)\tau A^n]y^n\| + \tau\|f^n\|. \tag{2.5}$$

Для левой части неравенства (2.5) в силу отмеченных выше свойств логарифмической нормы и с учетом (1.8) имеем

$$\|(E + \sigma\tau A^n)y^{n+1}\| \ge -\mu(-E - \sigma\tau A^n)\|y^{n+1}\| = [1 + \sigma\tau\mu(-A^n)]\|y^{n+1}\| \ge \|y^{n+1}\|.$$

Для первого слагаемого в правой части (2.5) получим

$$\|[E - (1-\sigma)\tau A^n]y^n\| \le \|[E - (1-\sigma)\tau A^n]\|\|y^n\|.$$

Рассмотрим подробнее эту оценку при исследовании устойчивости в L_∞. Случай L_1 изучается аналогично. Принимая во внимание (1.4) и условие диагонального преобладания (1.6), имеем

$$\|E - (1-\sigma)\tau A^n\| = \max_{1\le i\le N}\left|1 - (1-\sigma)\tau\left(a_{ii}^n + \sum_{j=1, j\ne i}^{N} a_{ij}^n\right)\right| \le$$

$$\le \max_{1\le i\le N}\left(\left|1 - (1-\sigma)\tau a_{ii}^n\right| + (1-\sigma)\tau \sum_{j=1, j\ne i}^{N} \left|a_{ij}^n\right|\right) \le \max_{1\le i\le N}\left(\left|1 - (1-\sigma)\tau a_{ii}^n\right| + (1-\sigma)\tau a_{ii}^n\right) \le 1$$

при ограничениях на шаг по времени (2.3).

Подстановка в (2.5) дает неравенство

$$\|y^{n+1}\| \le \|y^n\| + \tau\|f^n\|,$$

из которого непосредственно вытекает искомая оценка устойчивости по правой части и начальным данным (2.4).

3. МОДЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ КОНВЕКЦИИ-ДИФФУЗИИ

В качестве базовых задач гидродинамики выделим нестационарные задачи с конвективными слагаемыми в недивергентном (неконсервативном) и дивергентном (консервативном) видах. Ограничимся для простоты изложения задачами в прямоугольнике

$$\Omega = \{x | x = (x_1, x_2), 0 < x_\alpha < l_\alpha, \alpha = 1, 2\}.$$

Будем искать решение параболического уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{\alpha=1}^{2} c_\alpha(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha} - \sum_{\alpha=1}^{2}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}k(x)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha} = \varphi(x,t), \quad x \in \Omega, \ t > 0, \tag{3.1}$$

где $k(x) \ge k_0 > 0$ – коэффициент диффузии, а компоненты скорости $c_\alpha(x, t)$, $\alpha = 1, 2$, определяют конвективный перенос. Дополним уравнение (3.1) простейшими однородными граничными условиями

$$u(x,t) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \ t > 0, \tag{3.2}$$

и начальным условием

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \Omega. \tag{3.3}$$

Уравнение конвекции-диффузии может иметь и консервативную форму, когда конвективные слагаемые имеют дивергентную форму:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{\alpha=1}^{2}\frac{\partial(c_\alpha u)}{\partial x_\alpha} - \sum_{\alpha=1}^{2}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}k\frac{\partial u}{\partial x_\alpha} = \varphi(x,t), \quad x \in \Omega, \ t > 0. \tag{3.4}$$

Сформулируем соответствующую дифференциально-разностную задачу, проведя дискретизацию по пространству. В прямоугольнике Ω введем равномерную по обеим переменным разностную сетку с шагами h_α, $\alpha = 1, 2$. Обозначим через ω множество внутренних узлов сетки, а через $\partial\omega$ – множество граничных узлов, так что

$$\omega = \{x | x = (x_1, x_2), x_\alpha = i_\alpha h_\alpha, i_\alpha = 1, 2, \ldots, N_\alpha - 1, N_\alpha h_\alpha = l_\alpha, \alpha = 1, 2\}.$$

Пусть $v(x, t)$, $x \in \bar{\omega} = \omega \cup \partial\omega$, $t > 0$, – решение дифференциально-разностной задачи на момент времени t.

На множестве сеточных функций, обращающихся в нуль на $\partial\omega$, определим разностный оператор диффузионного переноса выражением

$$Dv = -\sum_{\alpha=1}^{2} (a_\alpha(x) v_{\bar{x}_\alpha})_{x_\alpha},$$

где, например,

$$a_1(x) = k(x_1 - 0.5h_1, x_2), \quad a_2(x) = k(x_1, x_2 - 0.5h_2).$$

Конвективные слагаемые в уравнении конвекции-диффузии (3.1) аппроксимируем со вторым порядком на основе использования центральных разностных производных

$$Cv = \sum_{\alpha=1}^{2} b_\alpha v_{\overset{\circ}{x}_\alpha}, \tag{3.5}$$

полагая в простейшем случае достаточно гладких компонент скорости и достаточно гладких решений дифференциальной задачи $b_\alpha(x, t) = c_\alpha(x, t)$, $\alpha = 1, 2$. Для консервативного уравнения конвекции-диффузии (3.2) положим, аналогично (3.5),

$$Cv = \sum_{\alpha=1}^{2} (b_\alpha(x, t) v)_{\overset{\circ}{x}_\alpha}. \tag{3.6}$$

Отметим также широко используемые в вычислительной практике аппроксимации конвективных слагаемых в задачах конвекции-диффузии простейшими направленными разностями. Определим сеточные функции $b_\alpha^{\pm}(x)$, $\alpha = 1, 2$, следующим образом:

$$b_\alpha(x) = b_\alpha^+(x) + b_\alpha^-(x), \quad b_\alpha^+(x) = 0.5[b_\alpha(x) + |b_\alpha(x)|] \geq 0, \quad b_\alpha^-(x) = 0.5[b_\alpha(x) - |b_\alpha(x)|] \leq 0.$$

Вместо (3.5) рассмотрим разностный оператор конвективного переноса в форме

$$Cv = \sum_{\alpha=1}^{2} [b_\alpha^+(x, t) v_{\bar{x}_\alpha} + b_\alpha^-(x, t) v_{x_\alpha}]. \tag{3.7}$$

Аналогично, вместо (3.6) используется

$$Cv = \sum_{\alpha=1}^{2} [(b_\alpha^+ v)_{\bar{x}_\alpha} + (b_\alpha^- v)_{x_\alpha}]. \tag{3.8}$$

Задачам (3.1)–(3.3) и (3.2)–(3.4) ставится в соответствие задача Коши

$$dv/dt + Cv + Dv = f(x, t), \quad x \in \omega, \ t > 0, \tag{3.9}$$

$$v(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \omega, \tag{3.10}$$

где, например, $f(x, t) = \varphi(x, t)$, $x \in \omega$.

Для приближенного решения задачи (3.9), (3.10) будем использовать схему

$$\frac{y^{n+1} - y^n}{\tau} + (C^n + D)[\sigma y^{n+1} + (1 - \sigma) y^n] = f^n, \quad n = 0, 1, \ldots, \tag{3.11}$$

для исследования которой привлекается теорема 1. Будем рассматривать сначала устойчивость в $L_\infty(\omega)$, когда

$$\|y\| = \|y\|_\infty = \max_{x \in \omega} |y(x)|.$$

В соответствии с теоремой 1, необходимо ориентироваться на условие диагонального преобладания по строкам (1.4). Применительно к задаче (3.9), (3.10) (при естественной нумерации узлов

сетки ω) при использовании аппроксимаций второго порядка (3.5) условие (1.4) записывается в виде

$$h_1^{-2}[a_1(x_1+h_1,x_2)+a_1(x)]+h_2^{-2}[a_2(x_1,x_2+h_2)+a_2(x)]\geq$$
$$\geq\left|h_1^{-2}a_1(x_1+h_1,x_2)-0.5h_1^{-1}b_1(x,t)\right|+\left|h_1^{-2}a_1(x)+0.5h_1^{-1}b_1(x,t)\right|+$$
$$+\left|h_2^{-2}a_2(x_1,x_2+h_2)-0.5h_2^{-1}b_2(x,t)\right|+\left|h_2^{-2}a_2(x)+0.5h_2^{-1}b_2(x,t)\right|.$$

В силу этого мы вынуждены ограничиться случаем, когда

$$2a_1(x_1+h_1,x_2)\geq h_1b_1(x,t),\ \ 2a_1(x)\geq -h_1b_1(x,t),\ \ 2a_2(x_1,x_2+h_2)\geq h_2b_2(x,t),\ \ 2a_2(x)\geq -h_2b_2(x,t).$$

Эти неравенства будут выполнены при следующих ограничениях:

$$\begin{gathered}h_1|b_1(x,t)|\leq\min(a_1(x),a_1(x_1+h_1,x_2)),\\ h_2|b_2(x,t)|\leq\min(a_2(x),a_2(x_1,x_2+h_2)),\quad x\in\omega.\end{gathered}\tag{3.12}$$

Ограничения на шаг по времени (2.3) принимают вид

$$\tau\leq\frac{1}{1-\sigma}[\max_{x\in\omega}d(x,t)]^{-1},\tag{3.13}$$

где

$$d(x,t)=d_0(x)=h_1^{-2}[a_1(x_1+h_1,x_2)+a_1(x)]+h_2^{-2}[a_2(x_1,x_2+h_2)+a_2(x)].\tag{3.14}$$

При аппроксимации направленными разностями (3.7) условие диагонального преобладания (1.4) всегда выполнено, а в ограничениях на шаг по времени (3.13)

$$d(x,t)=d_1(x,t)=d_0(x)+h_1^{-1}|b_1(x,t)|+h_2^{-1}|b_2(x,t)|.\tag{3.15}$$

Тем самым приходим к следующему утверждению.

Теорема 2. *Разностная схема с весами* (3.11) *при аппроксимации конвективных слагаемых согласно* (3.5) *устойчива в* $L_\infty(\omega)$ *при ограничениях* (3.12)–(3.14), *а при использовании аппроксимаций* (3.7) – *при ограничениях* (3.13), (3.15). *Для разностного решения справедлива оценка* (2.4).

Аналогичное утверждение имеет место и при рассмотрении консервативных разностных схем. В этом случае устойчивость устанавливается в $L_1(\omega)$, для которого

$$\|y\|=\|y\|_1=\sum_{x\in\omega}|y(x)|h_1h_2.$$

Теорема 3. *Разностная схема с весами* (3.11) *при аппроксимации конвективных слагаемых согласно* (3.6) *устойчива в* $L_1(\omega)$ *при ограничениях* (3.12)–(3.14), *а при использовании аппроксимаций* (3.8) – *при ограничениях* (3.13), (3.15). *Для разностного решения справедлива оценка* (2.4).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Роуч П.* Вычислительная гидродинамика. М.: Мир, 1980.
2. *Патанкар С.* Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости. М.: Энергоатомиздат, 1984.
3. *Самарский А.А.* Теория разностных схем. М.: Наука, 1989.
4. *Самарский А.А., Гулин А.В.* Устойчивость разностных схем. М.: Наука, 1973.
5. *Кареткина Н.В.* Безусловно устойчивая разностная схема для параболических уравнений, содержащих первые производные // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1980. Т. 20. № 1. С. 236–240.
6. *Вабищевич П.Н.* Монотонные разностные схемы для задач конвекции / диффузии // Дифференц. ур-ния. 1994. Т. 30. № 3. С. 503–513.
7. *Голант Е.И.* О сопряженных семействах разностных схем для уравнений параболического типа с младшими членами // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1978. Т. 18. № 5. С. 1162–1169.
8. *Деккер К., Вервер Я.* Устойчивость методов Рунге–Кутты для жестких нелинейных дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1988.
9. *Хайрер Э., Нерсетт С., Ваннер Г.* Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи. М.: Мир, 1990.
10. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. М.: Наука, 1988.
11. *Desoer C., Haneda H.* The measure of a matrix as a tool to analyze computer algorithms for circuit analysis // IEEE Trans. Circuit Theory. 1972. V. 19. P. 480–486.