

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ АЛГОРИТМЫ И МЕТОДЫ

УДК 519.63

ИТЕРАЦИОННОЕ РЕШЕНИЕ РЕТРОСПЕКТИВНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

© *А.А. Самарский, П.Н. Вабищевич, В.И. Васильев*

Институт математического моделирования РАН, Москва,
Якутский государственный университет, Якутск

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда
фундаментальных исследований (проекты 96-01-00657, 94-01-00513)

Рассматривается задача с обратным временем для параболического уравнения. Для ее приближенного решения применяется итерационный метод уточнения начального условия. Рассмотрены проблемы выбора итерационных параметров и оператора перехода на новое приближение. Приведены примеры расчетов для модельной задачи со случайными погрешностями во входных данных.

ITERATIVE SOLUTION OF A RETROSPECTIVE INVERSE PROBLEM OF HEAT CONDUCTION

A.A. Samarskii, P.N. Vabishchevich, V.I. Vasil'ev

Institute for Mathematical Modelling RAS, Moscow
Yakutsk State University, Yakutsk

A problem with inverse time for a parabolic equation is considered. To solve it approximately, an iterative method for a more precise definition of the initial conditions is employed. Problems of selection of iterative parameters as well as operators of transition to a new iteration are considered. Examples of predictions of a model problem with random errors in the input data are provided.

Среди обратных задач теплообмена [1,2] можно выделить ретроспективную обратную задачу (задачу с обратным временем) по определению начального температурного состояния по температурным измерениям на конечный момент времени. Для ее приближенного устойчивого решения используются различные подходы. Среди основных можно отметить методы с возмущением исходного уравнения - методы квазиобращения в различных вариантах [3,4]. Второй класс методов связан с возмущением начальных условий. Такой подход реализуется при использовании формулировки задачи как задачи оптимального управления [5,6]. Аналогичная процедура фактически порождается при использовании процедур нелокального возмущения начальных условий [7,8].

В настоящее время в теории приближенных методов решения некорректных задач [9] сформировалось направление исследований, которое связано с использованием итерационных методов [10-12]. При таком подходе в качестве

параметра регуляризации выступает число итераций, которое согласуется с погрешностью входных данных. При решении обратных задач для уравнений математической физики широко используются градиентные итерационные методы при вариационной формулировке обратной задачи [13].

В данной работе рассматривается наиболее простой итерационный метод при приближенном решении ретроспективной обратной задачи теплопроводности. Для поставленной обратной задачи итерационно уточняется начальное условие, т.е. на каждой итерации решается обычная краевая задача для уравнения теплопроводности. На основе общей теории итерационных методов решения операторных уравнений [14,15] устанавливаются достаточные условия сходимости итерационного процесса, проводится выбор итерационных параметров. В таких задачах оператор перехода на новое итерационное приближение позволяет выделить приближенное решение искомого класса гладкости. Приведены примеры расчетов, которые демонстрируют возможности используемого вычислительного алгоритма.

1. Задача с обратным временем

Рассмотрим в качестве модельной двумерную задачу в прямоугольнике

$$\Omega = \{x \mid x = (x_1, x_2), \quad 0 < x_\alpha < l_\alpha, \alpha = 1, 2\}.$$

В Ω ищется решение параболического уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{\alpha=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(k_\alpha(x) \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} \right) = 0, \quad x = (x_1, x_2) \in \Omega, \quad 0 \leq t < T, \quad (1)$$

дополненного простейшими однородными граничными условия первого рода:

$$u(x, t) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad 0 \leq t < T. \quad (2)$$

В рассматриваемой обратной задаче вместо задания решения на начальный момент времени $t=0$ задается решение на конечный момент времени:

$$u(x, T) = \varphi(x), \quad x \in \Omega. \quad (3)$$

Такая обратная задача корректна, например, в классах ограниченных или положительных решений.

Возможность рассмотрения более общих чем (1)-(3) задач мы не будем здесь обсуждать; заметим, что в ряде важных частных случаев переход носит редакционный характер.

Поставим в соответствие дифференциальной задаче (1)-(3) дифференциально-разностную задачу, проведя дискретизацию по пространству. Будем считать, для простоты, что в области Ω можно ввести согласованную равномерную по каждому направлению x_α сетку с постоянными шагами h_α , $\alpha = 1, 2$, и обозначим через ω множество внутренних узлов. На множестве сеточных функций $u \in H$ таких, что $u(x) \equiv 0$, $x \notin \omega$, определим сеточный оператор A соотношением

$$Au = - \sum_{\alpha=1}^2 \left(a_\alpha(x) u_{\bar{x}_\alpha} \right)_{x_\alpha}, \quad x \in \omega, \quad (4)$$

положив, например, $a_1(x) = k_1(x_1 - 0.5h_1, x_2)$, $a_2(x) = k_2(x_1, x_2 - 0.5h_2)$.

В сеточном гильбертовом пространстве H скалярное произведение и норму введем соотношениями

$$(y, v) = \sum_{x \in \omega} yv h_1 h_2, \quad \|y\| = (y, y)^{1/2}.$$

В H имеем $A = A^* > 0$ [14,15].

От (1)-(3) перейдем к дифференциально-операторному уравнению

$$\frac{dy}{dt} + Ay = 0, \quad x \in \omega, \quad 0 \leq t < T \quad (5)$$

при заданном

$$y(x, T) = \varphi(x), \quad x \in \omega. \quad (6)$$

Для приближенного решения задачи (5),(6) используются итерационные методы, связанные с уточнением начального условия. Соответствующие корректные задачи решаются на основе использования стандартных двухслойных разностных схем [14]. Пусть вместо обратной задачи (5),(6) рассматривается прямая задача для уравнения (5), когда вместо (6) используется начальное условие

$$y(x, 0) = v(x), \quad x \in \omega. \quad (7)$$

Обозначим через y^n разностное решение на момент времени $t^n = n\tau$, где $\tau > 0$ – шаг по времени, причем $N\tau = T$. При использовании обычной двухслойной схемы с весами [14] переход на новый временной слой в задаче осуществляется в соответствии с

$$\frac{y^{n+1} - y^n}{\tau} + A(\sigma y^{n+1} + (1-\sigma)y^n) = 0, \quad n=0,1,\dots,N-1, \quad (8)$$

$$y_0 = v, \quad (9)$$

где $\sigma = \text{const} \geq 0$.

Хорошо известно [14], что схема с весами (8),(9) безусловно устойчива при $\sigma \geq 0.5$, и справедлива следующая оценка устойчивости:

$$\|y^{n+1}\| \leq \|y^n\| \leq \dots \leq \|y^0\| = \|v\|, \quad n=1,2,\dots,N-1. \quad (10)$$

Тем самым норма решения со временем убывает.

2. Итерационный метод

Для приближенного решения обратной задачи (5),(6) будем использовать простейший итерационный процесс, основанный на последовательном уточнении начального условия и решении на каждой итерации прямой задачи. Придадим этой задаче соответствующую операторную формулировку.

Из (8),(9) для заданного y^0 на конечный момент времени получим

$$y^N = S^N y^0, \quad (11)$$

где S - оператор перехода с одного временного слоя на другой:

$$S = (E + \sigma\tau A)^{-1} (E + (\sigma - 1)\tau A). \quad (12)$$

С учетом (5),(6) и (11) приближенному решению обратной задачи естественно сопоставить решение следующего сеточного операторного уравнения:

$$\mathcal{A}v = \varphi(x), \quad x \in \omega, \quad \mathcal{A} = S^N. \quad (13)$$

В силу самосопряженности оператора A , самосопряженными являются оператор перехода S и оператор \mathcal{A} в (13). Однозначная разрешимость сеточного уравнения (13) будет иметь место, например, при положительности оператора \mathcal{A} . Это условие будет выполнено для положительного оператора перехода S . Принимая во внимание представление (12), получим $S > 0$ при

$$\sigma \geq 1. \quad (14)$$

Условие (14) на вес схемы (8),(9) более жесткое, чем обычное условие устойчивости, когда выполнение оценки (10) связывается с выполнением двустороннего неравенства [14],[16] $-E \leq S \leq E$. В нашем случае (14) имеем $0 < S < E$ при любых $\tau > 0$. Тем самым в (13) при ограничениях (14)

$$0 < \mathcal{A} = \mathcal{A}^* < E. \quad (15)$$

Для решения уравнения (13),(15) можно использовать явный двуслойный итерационный метод, который записывается в виде [15]

$$\frac{v_{k+1} - v_k}{s_{k+1}} + \mathcal{A}v_k = \varphi, \quad k=0,1,\dots, \quad (16)$$

где s_{k+1} — итерационные параметры. Этот итерационный метод соответствует следующей организации вычислений при приближенном решении ретроспективной обратной задачи (1),(2).

1. При заданном $v_k(x)$, $x \in \omega$ ($v_0(x)$, $x \in \omega$ задается) решается прямая задача с использованием разностной схемы

$$\frac{y_k^{n+1} - y_k^n}{\tau} + A \left(\sigma y_k^{n+1} + (1-\sigma)y_k^n \right) = 0, \quad n=0,1,\dots,N-1, \quad (17)$$

$$y_k^0 = v_k, \quad x \in \omega \quad (18)$$

для определения y_k^N .

2. В соответствии с (16) уточняется начальное условие:

$$v_{k+1} = v_k - s_{k+1}(\varphi - y_k^N). \quad (19)$$

Как следует из общей теории итерационных методов [15], скорость сходимости метода (13) определяется постоянными энергетической эквивалентности γ_α , $\alpha=1,2$:

$$\gamma_1 E \leq \mathcal{A} \leq \gamma_2 E, \quad \gamma_1 > 0. \quad (20)$$

Принимая во внимание (15), имеем $\gamma_2 < 1$, и с хорошей точностью можно положить $\gamma_2 = 1$. Для оценки γ_1 привлечем информацию о спектре разностного оператора A . Обозначим через λ_m , $p_m(x)$, $m=1,2,\dots,M$, собственные значения и ортонормированные собственные функции оператора A соответственно, причем $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_M$. Принимая во внимание представление (12), для

$$y(x) = \sum_{m=1}^M y_m p_m(x)$$

при ограничениях (14) получим

$$(Sy, y) = \sum_{m=1}^M \left(1 - \frac{\tau \lambda_m}{1 + \sigma \tau \lambda_m} \right) y_m^2 \geq \sum_{m=1}^M \frac{1}{1 + \tau \lambda_m} y_m^2 \geq \exp(-\tau \lambda_M) (y, y).$$

Поэтому для нижней и верхней границ спектра оператора \mathcal{A} можно положить

$$\gamma_1 = \exp(-T \lambda_M), \quad \lambda_M = O(h_1^{-2} + h_2^{-2}), \quad \gamma_2 < 1. \quad (21)$$

Тем самым дискретизация по пространству позволяет отделить спектр оператора \mathcal{A} от нуля.

Для стационарного итерационного метода ($s_{k+1} = s = \text{const}$ в (16)) условия сходимости имеют вид $s < 2\gamma_2^{-1}$ [15], т.е. в условиях (21)

$$0 < s \leq 2. \quad (22)$$

Для оптимального значения итерационного параметра $s = 2(\gamma_1 + \gamma_2)^{-1}$ в условиях (21) имеем $s \approx 1$.

Для ускорения сходимости необходимо ориентироваться на применение итерационных методов вариационного типа. При использовании итерационного метода минимальных невязок для итерационных параметров имеем

$$s_{k+1} = \frac{(Ar_k, r_k)}{(Ar_k, Ar_k)}, \quad r_k = Av_k - \varphi, \quad k=0, 1, \dots \quad (23)$$

В этом случае на каждой итерации минимизируется норма невязки, т.е. верна оценка

$$\|r_{k+1}\| < \|r_k\|, \quad k=0, 1, \dots \quad (24)$$

При использовании более общего неявного итерационного метода вместо (16) имеем

$$B \frac{v_{k+1} - v_k}{s_{k+1}} + Av_k = \varphi, \quad (25)$$

где, например, $B = B^* > 0$. В этом случае (метод минимальных поправок) для итерационных параметров используются расчетные формулы

$$s_{k+1} = \frac{(Aw_k, w_k)}{(B^{-1}Aw_k, Aw_k)}, \quad w_k = B^{-1}r_k, \quad k=0, 1, \dots \quad (26)$$

Для этого случая минимизируется поправка w_k на каждой итерации в норме, порожденной оператором B , т.е. верна оценка

$$\|w_{k+1}\|_B < \|w_k\|_B, \quad k=0, 1, \dots \quad (27)$$

При $B = E$ из (26), (27) следуют (23), (24). Аналогично рассматриваются и более быстрые трехслойные вариационные итерационные методы.

Отметим некоторые особенности выбора оператора B при решении некорректных задач. В обычных итерационных методах выбор оператора B подчинен исключительно ускорению скорости сходимости итерационного метода, которая определяется постоянными γ_α , $\alpha=1, 2$, в неравенстве

$$\gamma_1 B \leq A \leq \gamma_2 B, \quad \gamma_1 > 0.$$

При решении некорректных задач итерационный процесс обрывается до достижения невязки, величина которой определяется погрешностью входных данных. Для нас важно не только с какой скоростью сходится итерационный процесс на этом участке убывания, но и в каком классе гладкости этот итерационный процесс сходится, в какой норме необходимый уровень невязки достигается. Принципиальная особенность приближенного решения некорректных задач итерационными методами состоит в том, что выделение приближенного решения из необходимого класса гладкости достигается выбором оператора B .

Каждое новое приближение рассчитывается по формуле

$$v_{k+1} = v_k - s_{k+1} w_k, \quad k=0, 1, \dots$$

В силу этого гладкость приближенного решения будет определяться гладкостью начального приближения и гладкостью поправок. В свою очередь (см. (27)), гладкость поправок напрямую зависит от B — поправка принадлежит классу H_B .

3. Примеры расчетов

Особенности предложенного метода удобно проиллюстрировать на примере простейшей одномерной ретроспективной задачи. Будем искать приближенное решение задачи

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad 0 < x < 1, \quad 0 \leq t < T, \quad (28)$$

$$u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = 0, \quad 0 \leq t < T, \quad (29)$$

$$u(x, T) = \varphi(x), \quad 0 < x < 1. \quad (30)$$

Пусть h — шаг равномерной сетки по пространству:

$$\omega = \{x \mid x = x_i = ih, \quad i = 1, 2, \dots, M-1, \quad Mh = 1\}.$$

В рамках квазиреального эксперимента ограничимся примером численного решения обратной задачи (28)-(30), которое соответствует решению прямой задачи для уравнения (28) с граничным условием (29) и следующим начальным условием:

$$u(x, 0) = v(x) = \begin{cases} x/0.3, & 0 < x \leq 0.3, \\ (1-x)/0.7, & 0.3 < x < 1 \end{cases}$$

при $T = 0.1$. Из решения этой задачи находится функция $\varphi(x)$, которая фигурирует в формулировке обратной задачи (28)-(30). Функции $v(x)$ и $\varphi(x)$ показаны на рис.1. Расчеты выполнены на сетке $M = 100$ при использовании чисто неявной схемы с шагом по времени $\tau = 0.001$.

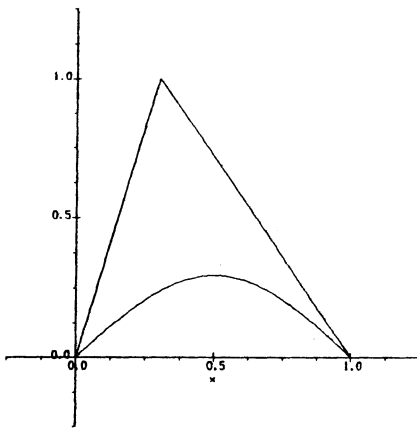


Рис.1.

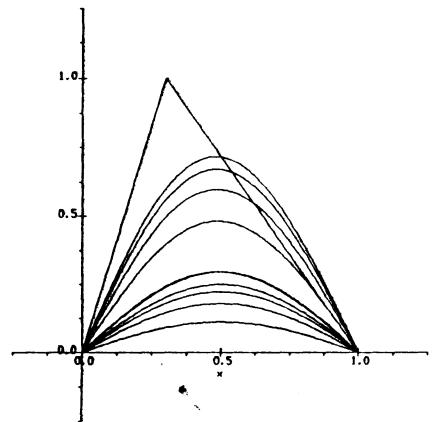


Рис.2.

Вначале остановимся на варианте, когда случайные погрешности в рассчитанную функцию не вносятся. Итерационный процесс (16) с постоянным итерационным параметром $s_{k+1} = s = \text{const}$ сходится медленно. Например, на рис.2 приведены несколько первых итерационных приближений для $s = 1$ (начальное приближение $v_0 = 0$). Аналогичные данные для метода минимальных поправок представлены на рис.3. Фактически сходимость наблюдается за две итерации, и в силу этого использовать трехслойные итерационные методы сопряженных градиентов в рассматриваемой задаче нет никакого смысла. Очевидно, рассчитывать на точное восстановление начального $v(x)$ нельзя в силу пониженной гладкости этой функции, и с хорошей точностью практически то же решение на конечный момент времени мы имеем от более гладкого начального условия, которое находится при итерационном решении обратной задачи.

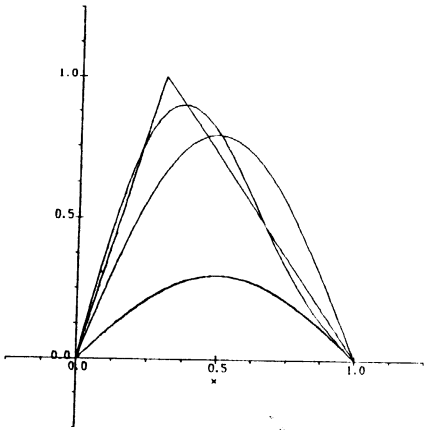


Рис.3.

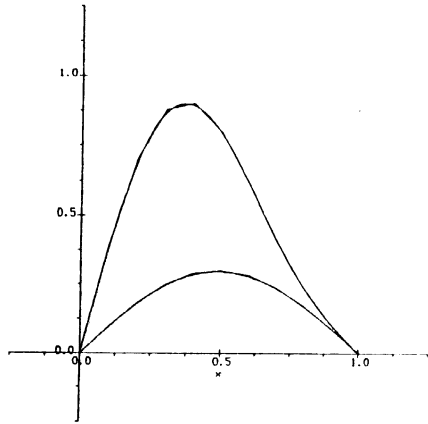


Рис.4.

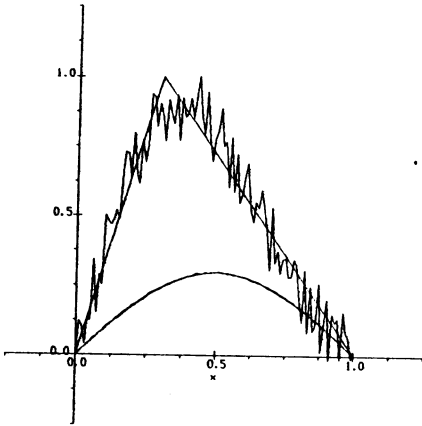


Рис.5.

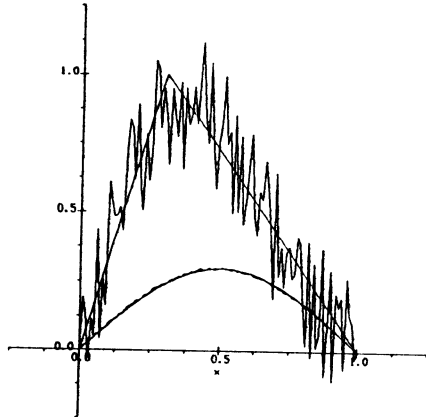


Рис.6.

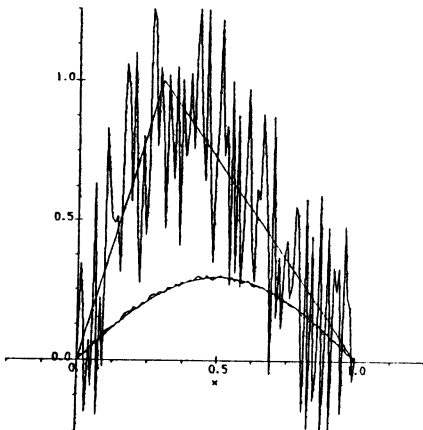


Рис.7.

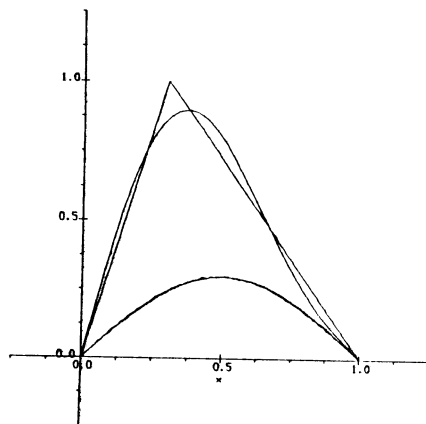


Рис.8.

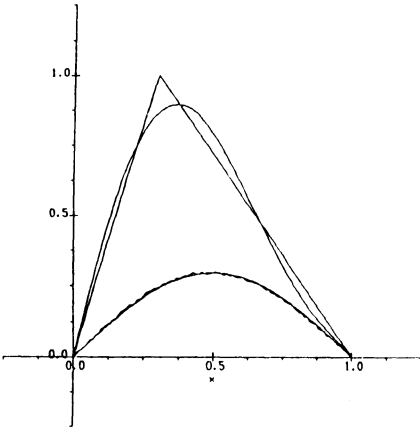


Рис.9.

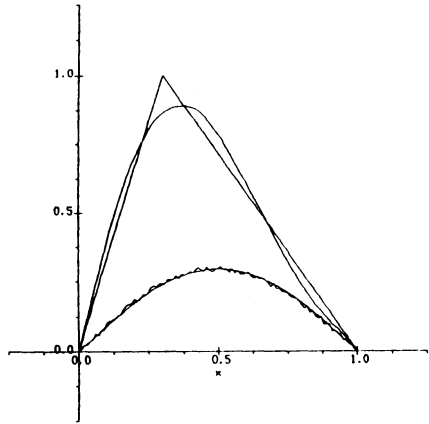


Рис.10.

Восстанавливаемое приближенное решение фактически не зависит от используемых расчетных сеток. Наиболее интересна в этой связи зависимость точности приближенного решения от сеток по пространству. На рис.4 изображены восстанавливаемые начальные условия при использовании сеток $M=10, 50, 200$.

Приведем характерные результаты по решению обратной задачи (28)-(30) в условиях, когда функция $\varphi(x)$ задана с погрешностью. В экспериментах сеточная функция $\varphi(x)$, $x \in \omega$, возмущалась следующим образом:

$$\varphi_{\delta}(x) = \varphi(x) + \delta \sigma(x), \quad x \in \omega,$$

где $\sigma(x)$ — случайные величины, равномерно распределенные на отрезке $[-1, 1]$. Итерационный процесс минимальных невязок обрывался по достижению невязки значения δ , т.е. при

$$\|r_{n(\delta)}\| \leq \delta.$$

На рис.5 приведено полученное приближенное решение для уровня погрешности во входных данных, определяемых величиной $\delta=0.0025$ (0.25%). Аналогичные данные при вдвое и вчетверо большем уровне погрешности ($\delta=0.005$, $\delta=0.01$) приведены на рис.6,7. Наблюдается существенное развитие возмущений в исходных данных с естественным увеличением амплитуды при возрастании уровня шумов.

Приведем также данные расчетов при использовании итерационного метода (25) с $\mathcal{B} \neq E$. Для выделения более гладкого решения, принадлежащего вместо $L_2(\omega)$ сеточному пространству $W_2^1(\omega)$, положим, например,

$$\mathcal{B}y = -y_{xx} + y, \quad x \in \omega$$

на множестве сеточных функций, обращающихся в нуль в граничных узлах. На рис.8-10 при уровнях погрешностей $\delta=0.0025$, 0.005 , 0.01 представлены приближенные решения. Сравнивая эти рисунки с соответствующими рис.5-7, наблюдаем эффект выделения более гладкого решения. Фактически в этих примерах при отмеченных уровнях зашумления входных данных решение восстанавливается с той же точностью, что и в задаче с точными входными данными, $\delta=0$ (ср. с рис.3).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алифанов О.М. Обратные задачи теплообмена. – М.: Машиностроение, 1988.
2. Бек Дж., Блакуэлл Б., Сент-Клар Ч. мл. Некорректные обратные задачи теплопроводности. – М.: Мир, 1989.
3. Ламтес Р., Лионс Ж.Л. Метод квазиобращения и его приложения. – М.: Мир, 1970.
4. Samarskii A.A., Vabishchevich P.N. Computational Heat Transfer. Vol.2. Finite Difference Methodology. – Chichester: Wiley, 1995.
5. Лионс Ж.-Л. Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. – М.: Мир, 1972.
6. Васильев Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач. – М.: Наука, 1980.
7. Абдулкеримов Л.Ш. Регуляризация некорректной задачи Коши для эволюционных уравнений в банаховых пространствах. // Учен. зап. Азерб. ун-та. Сер. физ.-мат. наук. 1974, № 1, с. 32-36.
8. Вабищевич П.Н. Нелокальное возмущение начального условия в некорректных задачах для эволюционных уравнений первого порядка. // Математическое моделирование, 1992, т.4, № 5, с.109-119.
9. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. – М.: Наука, 1986.
10. Вайникко Г.М., Веретенников А.Ю. Итерационные процедуры в некорректных задачах. – М.: Наука, 1986.
11. Гилязов С.Ф. Методы решения линейных некорректных задач. – М.: Изд-во МГУ, 1987.
12. Бакушинский А.Б., Гончарский А.В. Итерационные методы решения некорректных задач. – М.: Наука, 1988.
13. Алифанов О.М., Артюхин Е.А., Румянцев С.В. Экстремальные методы решения некорректных задач. – М.: Наука, 1988.
14. Самарский А.А. Теория разностных схем. – М.: Наука, 1983.
15. Самарский А.А., Николаев Е.С. Методы решения сеточных уравнений. – М.: Наука, 1978.
16. Самарский А.А., Гулин А.В. Устойчивость разностных схем. – М.: Наука, 1973.

Поступила в редакцию
06.02.96.