

УДК 519.63

ИНВАРИАНТНЫЕ РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ В НЕСТАЦИОНАРНЫХ СИСТЕМАХ КООРДИНАТ

А. А. Самарский, В. И. Мажукин, П. П. Матус, М. М. Чуйко

ВВЕДЕНИЕ

В последнее время к вычислительным методам наряду с традиционными требованиями однородности, консервативности, полной консервативности предъявляется также и требование адаптивности. Используемые в вычислительной практике адаптивные методы, как правило, ориентированы на решение проблем, связанных с наличием подвижных границ (в том числе контактных и фазовых), поверхностей разрывов (ударные волны), областей больших градиентов, пограничных слоев и др., в сложных нерегулярных областях.

Сформировались два основных направления построения адаптирующихся сеток: для стационарных и нестационарных задач. В большинстве методов построения сеток для многомерных стационарных задач в той или иной степени используется идея преобразования координат, позволяющая отображать сложную геометрическую область в прямоугольник и квадрат единичной длины [1 — 3]. Построение адаптивных сеток осуществляется с помощью соответствующего выбора функций для обратного преобразования [4, 5]. В методах адаптации для эволюционных задач идея преобразования координат также находит широкое применение [6, 7]. Однако в силу нестационарности преобразование координат осуществляется посредством перехода в одну из подвижных систем координат. Типичным примером таких преобразований являются лагранжевы переменные в газовой динамике [8, 9] и системы координат, связанные с распространением фронтов [10]. В данном направлении плодотворной оказалась идея построения сеток, динамически адаптирующихся к решению, осуществляемая посредством перехода к произвольной нестационарной системе координат [11 — 17]. Использование произвольной нестационарной системы координат позволило описывать поведение узлов сетки на уровне дифференциальной модели, в которой это описание является неотъемлемой частью самой математической задачи. Такой метод оказался эффективным для решения широкого класса задач математической физики, среди которых проблемы нелинейной теплопроводности [11, 12], нелинейного переноса (уравнение Бюргера), газовой динамики [13], одномерных и многомерных задач Стефана [16, 17].

Дифференциальные задачи, записанные в различных системах координат, с математической точки зрения являются эквивалентными. Вполне естественно потребовать выполнения аналогичного свойства и для разностных схем.

Цель настоящей работы — разработка математического аппарата и теоретическое исследование свойств разностных схем, аппроксимирующих дифференциальные задачи в нестационарной системе координат. В связи с этим в данной работе вводится понятие инвариантной разностной схемы, формулируются необходимые условия построения таких схем (квазиравномерность сетки в исходном физическом пространстве, аппроксимация метрического коэффициента на основании точной разностной схемы [18] и др.), приводится математический аппарат получения соответствующих априорных оценок. Отметим, что из условия инвариантности

разностной схемы (как следствие) вытекает и свойство согласованности сеточных норм в различных сеточных пространствах.

Для получения конкретных оценок устойчивости решения инвариантных схем как на регулярных, так и на подвижных сетках используется классический аппарат теории операторно-разностных схем [18].

§1. МОДЕЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ

О п р е д е л е н и е. Будем говорить, что разностная схема инвариантна по какому-то свойству, если она сохраняет это свойство в заданном классе дискретных преобразований независимых переменных.

Например, при переходе от одной системы координат к другой от разностной схемы разумно потребовать сохранения (инвариантности) таких свойств, как аппроксимация, устойчивость, сходимость и др.

Основные принципы построения и теоретического исследования таких схем проиллюстрируем на примере краевой задачи для простейшего уравнения второго порядка

$$u''(x) = -f(x), \quad a < x < b, \quad u(a) = u(b) = 0. \quad (1.1)$$

На отрезке $[a, b]$ введем произвольную неравномерную сетку узлов $\hat{\omega}_h = \{x_i = x_{i-1} + h_i, i = \overline{0, N}; x_0 = a, x_N = b\}$. Соответствующая консервативная схема на сетке $\hat{\omega}_h$ имеет вид [18]

$$\frac{1}{h_i} \left(\frac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1}} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} \right) = -\varphi_i, \quad y(a) = y(b) = 0, \quad (1.2)$$

где φ — некоторый шаблонный функционал от f , $h_i = 0,5(h_i + h_{i+1})$. Заметим, что погрешность аппроксимации разностной схемой (1.2) при $\varphi_i = f(x_i)$ представляется в виде $\delta(x_i) = u_{\hat{\omega}_h, i} - u''(x_i) = ((h_{i+1} - h_i)/3)u'''(x_i) + O(h_i^2)$.

Пусть существует дважды непрерывно-дифференцируемая функция $x = x(q)$,

$$dx/dq = \psi(q) \geq c_0 > 0, \quad (1.3)$$

преобразующая отрезок $0 \leq q \leq 1$ в отрезок $a \leq x \leq b$ так, что каждой неравномерной сетке $\hat{\omega}_h$ соответствует равномерная сетка $\omega_{h_q} = \{q_i = ih_q, h_q = 1/N, i = \overline{0, N}\}$. Заменой переменной (1.3) дифференциальная задача (1.1) преобразуется к виду

$$\frac{1}{\psi} \frac{d}{dq} \left(\frac{1}{\psi} \frac{d\bar{u}}{dq} \right) = -\bar{f}, \quad 0 < q < 1, \quad \bar{u}(0) = \bar{u}(1) = 0, \quad (1.4)$$

где

$$\bar{u} = \bar{u}(q) = u(x(q)) = u(x) = u. \quad (1.5)$$

Последнее равенство означает, что задачи (1.1) и (1.4) на дифференциальном уровне эквивалентны. Естественно такое же требование предъявить и к разностным задачам. Так как к конечно-разностным методам не применим аппарат теории функций непрерывного изменения аргумента, то потребуем, чтобы на сетках $\hat{\omega}_h$ и $\bar{\omega}_{h_q}$ разностные задачи сохраняли основные свойства при дискретном преобразовании независимых переменных. При построении таких инвариантных схем в общем случае естественно исходить из уравнения баланса с использованием интегро-интерполяционного метода [18].

На равномерной сетке ω_{h_q} запишем инвариантную разностную схему, аппроксимирующую дифференциальную задачу (1.1) со вторым порядком $O(h_q^2)$:

$$(1/\psi_h) \left(a(\psi) \bar{y}_q \right)_q = -\bar{\varphi}, \quad \bar{y}(0) = \bar{y}(1) = 0. \quad (1.6)$$

Для инвариантности схемы достаточно, чтобы имело место $\bar{y}_i = \bar{y}(q_i) = y(x_i) = y_i$, где y_i — решение разностной задачи (1.2).

В (1.6) положим

$$\psi_{hi} = (x_{i+1/2} - x_{i-1/2})/h_q, \quad (1.7)$$

причем $\psi_{hi} - \psi(q_i) = (x_{i+1/2} - x_{i-1/2})/h_q - x'(q_i) = O(h_q^2)$, если только функция $x'''(q)$ ограничена при $q \in [0, 1]$. Покажем, что для инвариантности схемы необходимо, чтобы шаблонный функционал $a(\psi)$ определялся из наилучшей разностной схемы [18]

$$a(q_i) = \left[\frac{1}{h_q} \int_{q_{i-1}}^{q_i} \frac{dq}{k} \right]^{-1} = \left[\frac{1}{h_q} \int_{q_{i-1}}^{q_i} \psi dq \right]^{-1} = [x_{\bar{q},i}]^{-1}. \quad (1.8)$$

Очевидно, что схема (1.6) — (1.8) допускает другую алгебраически эквивалентную форму записи:

$$\frac{1}{x_{i+1/2} - x_{i-1/2}} \left(\frac{\bar{y}_{i+1} - \bar{y}_i}{x_{i+1} - x_i} - \frac{\bar{y}_i - \bar{y}_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} \right) = -\bar{\varphi}_i.$$

Так как $x_{i+1} - x_i = h_{i+1}$, $x_i - x_{i-1} = h_i$, $x_{i+1/2} - x_{i-1/2} = h_i$, то при $\varphi(x_i) = \bar{\varphi}(q_i)$ из (1.6) получаем соотношения

$$\bar{y}_{x\bar{x}} = -\varphi, \quad \bar{y}_0 = \bar{y}_N = 0, \quad (1.9)$$

сравнивая которые с (1.2), приходим к выводу, что $\bar{y}(q_i) = y(x_i)$. Следовательно, разностная схема (1.2) инвариантна по своим свойствам относительно дискретного преобразования координат (1.7).

Теорема 1. *Для того чтобы в новой системе координат на равномерной сетке ω_{h_q} инвариантная разностная схема аппроксимировала дифференциальную задачу со вторым порядком $O(h_q^2)$, необходимо, чтобы сетка $\hat{\omega}_h$, заданная на отрезке $x \in [a, b]$, была квазиравномерной.*

Доказательство. Рассмотрим выражение $h_{i+1} - h_i = h_q^2 x_{\bar{q},i} \approx h_q^2 \psi'(q_i)$. Поскольку функция $x(q)$ преобразует отрезок $0 \leq q \leq 1$ в отрезок $a \leq x \leq b$ так, что каждой неравномерной сетке $\hat{\omega}_h$ соответствует равномерная сетка ω_{h_q} , причем $x'(q) = \psi \geq c_0 > 0$ и $x''(q)$ ограничена, то сетка $\hat{\omega}_h$ в исходной системе координат не может быть произвольной. Теорема доказана.

Итак, для построения инвариантной разностной схемы второго порядка точности для задачи (1.4) на равномерной сетке в новой системе координат необходимо, чтобы

- 1) шаблонный функционал $a(\psi)$ выбирался из точной разностной схемы;
- 2) сетка $\hat{\omega}_h$, заданная на отрезке $x \in [a, b]$ в исходной системе координат, была квазиравномерной.

§2. О СОГЛАСОВАННОСТИ СЕТОЧНЫХ НОРМ

Исследование устойчивости и сходимости разностных схем обычно проводят в сеточных нормах, являющихся аналогами соответствующих норм в пространстве функций непрерывного изменения аргумента. Для функций одной переменной $u = u(x)$, $a \leq x \leq b$, и $\bar{u} = \bar{u}(q)$, $0 \leq q \leq 1$, где x и q связаны преобразованием переменных (1.3), нормы в пространстве непрерывных функций C и L_2 определяются так: $\|u\|_{C[a,b]} = \max_{a \leq x \leq b} |u(x)|$, $\|\bar{u}\|_{C[0,1]} = \max_{0 \leq q \leq 1} |\bar{u}(q)|$,

$\|u\|_{C[a,b]} = \|\bar{u}\|_{C[0,1]}$, $\|u\|_{L_2[a,b]} = \left\{ \int_a^b u^2(x) dx \right\}^{1/2} = \left\{ \int_0^1 \psi \bar{u}^2(q) dq \right\}^{1/2}$, $\|u\|^2 = (\psi, \bar{u}^2)$, а соответствующие полунормы в W_2^1 , W_2^2 следующим образом:

$$\|u\|_{W_2^1[a,b]} = \left\{ \int_a^b u'^2(x) dx \right\}^{1/2} = \left\{ \int_0^1 \psi^{-1}(q) \bar{u}'^2(q) dq \right\}^{1/2},$$

$$\|u\|_{W_2^2[a,b]} = \left\{ \int_a^b u''^2(x) dx \right\}^{1/2} = \left\{ \int_0^1 \psi^{-1}(q) (\psi^{-1}(q) \bar{u}''(q))^2 dq \right\}^{1/2}.$$

Покажем, что для инвариантной разностной схемы (1.6) — (1.8) аналогичная согласованность норм имеет место и в дискретном случае.

Пусть H_h — пространство сеточных функций, заданных на неравномерной сетке $\hat{\omega}_h$, с обычными скалярными произведениями и нормами [5]:

$$\|v\|_* = (v, v)_*^{1/2} = \left(\sum_{i=1}^{N-1} h_i v_i^2 \right)^{1/2} \quad \text{— сеточная норма } L_2(\hat{\omega}_h);$$

$$\|v_{\bar{x}}\|^2 = (v_{\bar{x}}, v_{\bar{x}}) = \sum_{i=1}^N h_i v_{\bar{x},i}^2 \quad \text{— сеточная полунорма } W_2^1(\hat{\omega}_h^+), \quad \hat{\omega}_h^+ = \hat{\omega}_h \cup \{x_N = b\};$$

$$\|v_{\bar{x}\bar{x}}\|_*^2 = (v_{\bar{x}\bar{x}}, v_{\bar{x}\bar{x}})_* = \sum_{i=1}^{N-1} h_i v_{\bar{x}\bar{x},i}^2 \quad \text{— сеточная полунорма } W_2^2(\hat{\omega}_h);$$

$$\|v\|_C = \max_{x \in \hat{\omega}_h} |v(x)| \quad \text{— равномерная норма.}$$

Пусть теперь H_{h_q} — пространство сеточных функций, заданных на равномерной сетке $\bar{\omega}_{h_q}$. Для произвольной сеточной функции $\bar{v} \in H_{h_q}$ определим соответствующие сеточные нормы с весовой сеточной функцией ψ_h , задаваемой формулой (1.7):

$$(\psi_h, \bar{v}^2) = \sum_{i=1}^{N-1} h_q \psi_{h_i} \bar{v}_i^2, \quad (a, \bar{v}_q^2] = \sum_{i=1}^N h_q a_i \bar{v}_{q,i}^2, \quad (\psi_h^{-1}, (a \bar{v}_q)^2) = \sum_{i=1}^{N-1} h_q \psi_{h_i}^{-1} (a_i \bar{v}_{q,i})^2,$$

$$\|\bar{v}\|_C = \max_{q \in \omega_{h_q}} |\bar{v}(q)|,$$

где $a = a(\psi) = [x_{\bar{q}}]^{-1}$.

Нетрудно убедиться, что для инвариантной разностной схемы имеет место согласованность сеточных норм в следующем смысле:

$$\|y\|_{C(\omega_h)} = \|\bar{y}\|_{C(\omega_{h_q})}, \quad (\psi_h, \bar{y}^2) = \|y\|_*^2, \quad (2.1)$$

$$(a, \bar{y}_q^2] = \|y_{\bar{x}}\|^2, \quad (\psi_h^{-1}, (a \bar{y}_q)^2) = \|y_{\bar{x}\bar{x}}\|_*^2. \quad (2.2)$$

Действительно, в силу инвариантности ($\bar{y}(q_i) = y(x_i)$) и аппроксимации якобиана (1.7)

$$(\psi_h, \bar{y}^2) = \sum_{i=1}^{N-1} (x_{i+1/2} - x_{i-1/2}) \bar{y}^2(q_i) = \sum_{i=1}^{N-1} h_i y^2(x_i) = \|y\|_*^2.$$

Аналогично доказываются и равенства (2.2). Например,

$$(a, \bar{y}_q^2] = \sum_{i=1}^N h_q \frac{h_q}{h_i} \frac{(\bar{y}_i - \bar{y}_{i-1})^2}{h_q^2} = \sum_{i=1}^N h_i y_{\bar{x},i}^2 = \|y_{\bar{x}}\|^2.$$

§3. АПРИОРНЫЕ ОЦЕНКИ

Проиллюстрируем технику метода энергетических неравенств на примере исследования устойчивости разностной схемы (1.6) — (1.8) в полунорме (2.2). Предварительно докажем следующее утверждение.

Лемма 1. Для произвольной сеточной функции $\bar{y}(q_i)$, заданной на равномерной сетке ω_{h_q} и обращающейся в нуль при $q = 0$ и $q = 1$, справедливо неравенство

$$(\psi_h, \bar{y}^2) \leq (l^2/4) (a, \bar{y}_q^2], \quad l = b - a. \quad (3.1)$$

Доказательство. Из (2.1) и вложения [19, с. 37] $\|y\|_* \leq (l/2)\|y_{\bar{x}}\|$ имеем $(\psi_h, \bar{y}^2) \leq (l^2/4)\|y_{\bar{x}}\|^2$. Используя (2.2), выводим требуемую оценку. Лемма доказана.

Перейдем теперь исследованию устойчивости. Для этого уравнение (1.6) умножим скалярно на $\psi_h \bar{y}$ и применим первую разностную формулу Грина, получим энергетическое тождество

$$(a(\psi_h), \bar{y}_q^2] = (\psi_h \bar{\varphi}, \bar{y}). \quad (3.2)$$

Применяя неравенство Коши — Буняковского и вложение (3.1) к скалярному произведению $|(\psi_h \bar{\varphi}, \bar{y})| \leq \|\psi_h^{1/2} \bar{\varphi}\| \|\psi_h^{1/2} \bar{y}\| \leq (l/2) \|\psi_h^{1/2} \bar{\varphi}\| \|a^{1/2} \bar{y}_q\|$ и подставляя последнюю оценку в (3.2), приходим к энергетическому неравенству

$$(a(\psi_h), \bar{y}_q^2] \leq (l^2/4) (\psi_h, \bar{\varphi}^2), \quad (3.3)$$

выражающему устойчивость разностной схемы по правой части в сеточной полунорме $W_2^1(\omega_{h_q})$ с весовой функцией $a(\psi_h)$.

Отметим, что в силу инвариантности как разностных схем, так и сеточных норм из (3.3) сразу же следует априорная оценка и для решения разностной задачи (1.2), аппроксимирующей дифференциальную задачу (1.1) в исходной системе координат: $\|y_{\bar{x}}\| \leq (l/2) \|\varphi\|_*$.

§4. УРАВНЕНИЕ КОНВЕКЦИИ-ДИФФУЗИИ

Дифференциальную задачу

$$u''(x) + ru'(x) - du(x) = -f(x), \quad a < x < b, \quad (4.1)$$

$$u(a) = u(b) = 0, \quad (4.2)$$

где r, d — положительные постоянные, с помощью замены переменных (1.3) преобразуем к виду

$$\frac{1}{\psi} \frac{d}{dq} \left(\frac{1}{\psi} \frac{d\bar{u}}{dq} \right) + \frac{r}{\psi} \frac{d\bar{u}}{dq} - d\bar{u} = -\bar{f}, \quad 0 < q < 1, \quad (4.3)$$

$$\bar{u}(0) = \bar{u}(1) = 0, \quad (4.4)$$

$$dx/dq = \psi(q), \quad x(0) = a, \quad \psi(q) \geq c_0 > 0. \quad (4.5)$$

Схема с направленной разностью. Монотонная разностная схема первого порядка аппроксимации для задачи (4.3), (4.4) на равномерной сетке ω_{h_q} имеет вид

$$(1/\psi_h) (a\bar{y}_{\bar{q}})_q + ra\bar{y}_{\bar{q}} - d\bar{y} = -\bar{\varphi}, \quad (4.6)$$

$$\bar{y}(0) = \bar{y}(1) = 0, \quad (4.7)$$

где по-прежнему

$$\psi_{h_i} = (x_{i+1/2} - x_{i-1/2})/h_q, \quad a_i = 1/x_{\bar{q},i} = h_q/(x_i - x_{i-1}). \quad (4.8)$$

Подставляя в (4.6) вместо ψ_h и $a(\psi)$ их значения из (4.8), приходим к разностной задаче

$$y_{\bar{x}\bar{x}} + ry_{\bar{x}} - dy = -\varphi, \quad (4.9)$$

$$y(a) = y(b) = 0, \quad (4.10)$$

аппроксимирующей дифференциальную задачу (4.1) на неравномерной сетке $\hat{\omega}_h$. Очевидно, что хотя схема (4.9) сохраняет свойства аппроксимации и монотонности, однако она не является консервативной. Следовательно, к классу инвариантных схем по свойству консервативности она не относится.

Консервативная схема. Инвариантная схема, сохраняющая свойство консервативности на сетках $\omega_{h_q}, \hat{\omega}_h$, имеет вид

$$(1/\psi_h) (a\bar{y}_{\bar{q}})_q + (r/\psi_h) \bar{y}_{\bar{q}} - d\bar{y} = -\bar{\varphi}, \quad (4.11)$$

$$y_{\bar{x}\bar{x}} + \tau y_{\bar{x}} - dy = -\varphi \quad (4.12)$$

соответственно, где $y_{\bar{x}} = (y_{i+1} - y_{i-1}) / (2h_i)$, $h_i = 0,5(h_i + h_{i+1})$.

Для получения априорных оценок воспользуемся следующими разностными аналогами теорем вложения [20].

Лемма 2. Для произвольной сеточной функции $y(x)$, заданной на неравномерной сетке $\bar{\omega}_h$ и обращающейся в нуль при $x = a$ и $x = b$, справедливы неравенства $\|y\|_* \leq (l^2/4)\|y_{\bar{x}\bar{x}}\|_*$, $\|y_{\bar{x}}\| \leq (l/2)\|y_{\bar{x}\bar{x}}\|_*$, $\|y_{\bar{x}}\|_C \leq M\|y_{\bar{x}\bar{x}}\|_*$. Здесь $M = \text{const} > 0$; $l = b - a$, $\|y_{\bar{x}}\|_C = \max_{1 \leq i \leq N} |y_{\bar{x},i}|$.

С помощью метода энергетических неравенств и леммы 2, нетрудно доказываемся

Теорема 2. Разностная схема (4.12) при $c_1^{-1} < h_{i+1}/h_i < c_1$, $c_1 = \text{const} > 0$, устойчива по правой части и имеют место оценки

$$\|y_{\bar{x}\bar{x}}\|_* \leq c_2\|\varphi\|_*, \quad \|y_{\bar{x}}\|_C \leq c_3\|\varphi\|_*, \quad (4.13)$$

где $c_2, c_3 = \text{const} > 0$.

В силу инвариантности разностной схемы и согласованности сеточных норм из (4.13) сразу же получаем соответствующие априорные оценки и для решения схемы (4.11), определенной на равномерной сетке $\bar{\omega}_{h_q}$.

Итак, в случае наличия в уравнении конвективных слагаемых для сохранения свойства консервативности в различных сеточных пространствах приходим к еще одному необходимому условию

3) на равномерной сетке ω_{h_q} конвективные слагаемые необходимо аппроксимировать центральными разностями.

Отметим, что в этом случае свойство монотонности схемы выполнено при достаточно малом h_q [18].

§5. РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

1. Постановка задачи. В области $\bar{Q}_{t_0} = \{(x,t) : x_0(t) \leq x \leq x_N(t), x_0(0) = a, x_N(0) = b, 0 \leq t \leq t_0\}$ требуется найти непрерывное решение $u(x,t)$, удовлетворяющее начально-краевой задаче для параболического уравнения с постоянными коэффициентами

$$\partial u / \partial t = \partial^2 u / \partial x^2 + f(x,t), \quad (5.1)$$

$$u|_{x=x_0(t)} = 0, \quad u|_{x=x_N(t)} = 0, \quad u(x,0) = u_0(x). \quad (5.2)$$

Задачи с подвижными границами, как правило, требуют применения адаптивных (подвижных) сеток. В этом параграфе процедура построения инвариантных разностных схем на подвижных сетках опирается на введение расчетного пространства, в котором сетка неподвижна [11]. Переход от физического пространства (x,t) в расчетное (q,t) осуществляется с помощью замены переменных

$$x = x(q,t'), \quad t = t', \quad (5.3)$$

имеющей обратное невырожденное преобразование $q = q(x,t)$, $t' = t$. Частные производные зависимых переменных выражаются при этом следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t'} - \frac{\partial x}{\partial t'} \frac{1}{\psi} \frac{\partial}{\partial q} = \frac{\partial}{\partial t'} - \frac{v}{\psi} \frac{\partial}{\partial q}, \quad \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial q}{\partial x} \frac{\partial}{\partial q} = \frac{1}{\psi} \frac{\partial}{\partial q}, \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} = \frac{1}{\psi} \frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{1}{\psi} \frac{\partial}{\partial q} \right), \quad (5.4)$$

где $\psi = \partial x / \partial q$ — метрический коэффициент, $\partial x / \partial t = v$ — скорость движения системы координат, в общем случае подлежащая дальнейшему определению.

С помощью замены переменных (5.3) отобразим исходную область \bar{Q}_{t_0} в прямоугольник $\bar{D} = \{(q,t) : 0 \leq q \leq 1, 0 \leq t \leq t_0\}$. В расчетном пространстве \bar{D} задача (5.1), (5.2) преобразуется к виду

$$\frac{\partial}{\partial t}(\psi \bar{u}) - \frac{\partial}{\partial q}(v \bar{u}) = \frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{1}{\psi} \frac{\partial \bar{u}}{\partial q} \right) + \bar{f}, \quad (5.5)$$

$$\bar{u}|_{q=0} = \bar{u}|_{q=1} = 0, \quad \bar{u}|_{t=0} = u_0, \quad (5.6)$$

причем

$$\partial x / \partial t = v, \quad \partial x / \partial q = \psi; \quad v, \psi \geq c_0 > 0, \quad (5.7)$$

$$\partial \psi / \partial t = \partial v / \partial q, \quad (5.8)$$

$$u(x, t) = u(x(q, t'), t') = \bar{u}(q, t').$$

Знакопостоянство функции v требуется лишь для простоты рассуждений. Отметим, что уравнение (5.8), используемое иногда для нахождения траектории движения узлов сетки, является очевидным следствием (5.7).

Уравнение (5.6) может быть записано и в недивергентном виде

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t'} - \frac{v}{\psi} \frac{\partial \bar{u}}{\partial q} = \frac{1}{\psi} \frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{1}{\psi} \frac{\partial \bar{u}}{\partial q} \right) + \bar{f}. \quad (5.9)$$

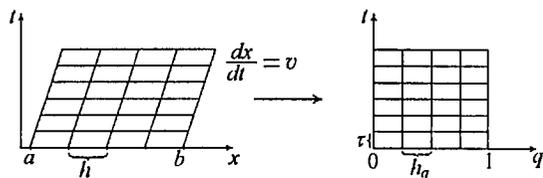
2. Разностные схемы для уравнений с постоянными коэффициентами. Для простоты рассуждений в качестве исходной области Q_{t_0} в “физическом” пространстве возьмем параллелограмм $\bar{Q}_{t_0} = \{(x, t) : a + vt \leq x \leq b + vt, 0 \leq t \leq t_0\}$, $v = \text{const} > 0$, $0 \leq a < b$.

Полагая теперь $\psi = b - a$, заменой переменных $x(q, t) = \psi q + vt' + a$ исходная область преобразуется в прямоугольник \bar{D} .

Перепишем уравнение (5.9) в виде

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t'} - r \frac{\partial \bar{u}}{\partial q} = \frac{\partial}{\partial q} \left(k \frac{\partial \bar{u}}{\partial q} \right) + \bar{f}, \quad (5.10)$$

где $r = v/\psi > 0$, $k = 1/\psi^2 > 0$ — постоянные. Отметим, что проблемы нерегулярности области для “хорошего” параболического уравнения (5.1) при переходе в новую прямоугольную систему координат (q, t') переходят в проблемы уравнения конвекции-диффузии. Правильная аппроксимация и метод решения последнего уравнения, как правило, зависят от преобладания конвективного r или диффузионного k коэффициентов. При построении же инвариантных схем дополнительные проблемы обусловлены в общем случае неравномерностью сетки в пространстве (x, t) . Например, монотонная схема первого порядка точности на равномерной сетке $y_i + \hat{y}_x = \hat{y}_{xx}$ теряет свойство консервативности в случае неравномерной сетки из-за нарушения равенства: $h_i \neq \hat{h}_i$, $\hat{h}_i = 0,5(h_i + h_{i+1})$. В прямоугольнике \bar{D} введем равномерные сетки по q $\bar{\omega}_{h_q} = \{q_i = ih_q, i = \overline{0, N}, h_q = 1/N\}$ и по временной переменной $\omega_\tau = \{t_j = j\tau, j = \overline{0, j_0}, \tau = t_0/j_0\}$. Отметим, что равномерная сетка в расчетном пространстве (q, t) генерирует в нашем случае и равномерную с постоянным шагом $h = \psi h_q$ сетку в “физическом” пространстве (см. рисунок): $\bar{\omega}_h^j = \{(x_i^j, t_j), x_i^j = ih + x_0^j, h = \psi h_q, x_0^j = a + vt_j, i = \overline{0, N}\}$, $j = \overline{0, j_0}$.



Для уравнения (5.10) построим монотонную разностную схему первого порядка аппроксимации

$$\bar{y}_i - r \bar{y}_q^{(\sigma)} = k \bar{y}_{qq}^{(\sigma)} + \bar{\varphi}, \quad \bar{\varphi} = \bar{f}^{(\sigma)}, \quad \bar{y}_0^{j+1} = \bar{y}_N^{j+1} = 0, \quad \bar{y}_i^0 = u_{0i}, \quad (5.11)$$

где $\bar{y}_i = (\bar{y}(q_i, t_{j+1}) - \bar{y}(q_i, t_j))/\tau = (\hat{y} - \bar{y})/\tau$.

Погрешность аппроксимации. Рассмотрим невязку схемы (5.11). $\delta_{h_q} = -\bar{u}_i + v \left(\psi^{-1} \bar{u}_q^{(\sigma)} \right) + \psi^{-1} \left(\psi^{-1} \bar{u}_{qq}^{(\sigma)} \right)_q$.

Используя разложение функции $\bar{u}(q, t')$ в ряд Тейлора в окрестности точки $(q_i, t_j + \tau/2)$, нетрудно показать, что

$$\delta_{h_q} = \frac{v(h_q \psi)}{2} \frac{1}{\psi} \frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{1}{\psi} \frac{\partial \bar{u}}{\partial q} \right) + (\sigma - 0,5)\tau \frac{\partial}{\partial t'} \left(\frac{v}{\psi} \frac{\partial \bar{u}}{\partial q} + \frac{1}{\psi} \frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{1}{\psi} \frac{\partial \bar{u}}{\partial q} \right) \right) + O((h_q \psi)^2 + \tau^2). \quad (5.12)$$

Для анализа свойств инвариантности введем следующие обозначения: $y = y(x(q_i, t_j), t_j) = \bar{y}(q_i, t_j) = \bar{y}$, $\hat{y} = y(x(q_i, t_{j+1}), t_{j+1}) = \bar{y}(q_i, t_{j+1}) = \hat{\bar{y}}$, где \bar{y} — решение разностной схемы (5.11) на сетке $\omega_{h_q} \times \omega_\tau$, а сеточная функция y определена в узлах подвижной сетки $\bar{\omega}_h^j$.

В силу алгебраических соотношений

$$y_q/\psi = (\bar{y}_{i+1}^j - \bar{y}_i^j)/(\psi h_q) = (y_{i+1} - y_i)/h = y_x, \quad \psi^{-1}(\psi^{-1}y_q)_q = y_{xx}, \quad (5.12')$$

из (5.11) получаем разностную схему

$$(\hat{y} - y)/\tau - v y_x^{(\sigma)} = y_{xx}^{(\sigma)} + \varphi, \quad y(x_0^{j+1}, t_{j+1}) = y(x_N^{j+1}, t_{j+1}) = 0, \quad (5.13)$$

аппроксимирующую исходное дифференциальное уравнение (5.1) $\partial u/\partial t' - v \partial u/\partial x = \partial^2 u/\partial x^2 + f(x, t)$, записанное в узлах подвижной сетки ω_h^j .

Невязка разностной схемы (5.13) является следствием формул (5.12), (5.4) и имеет вид

$$\delta_{h_q} = \delta(x_i(t_j), t_j) = -u_t + v u_x^{(\sigma)} + u_{xx}^{(\sigma)} = \frac{vh}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (\sigma - 0,5)\tau \frac{\partial}{\partial t'} \left(v \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) + O(h^2 + \tau^2),$$

т.е. локальный порядок аппроксимации в исходном физическом пространстве сохраняется.

Для исследования устойчивости схемы (5.13) на подвижной сетке воспользуемся общей теорией устойчивости [18]. Для этого приведем схему к каноническому виду двухслойных операторно-разностных схем

$$By_i + Ay = \varphi, \quad y(0) = u_0, \quad (5.14)$$

где $y = (y_1^j, y_2^j, \dots, y_{N-1}^j)$ — искомый вектор, а линейные постоянные операторы A , B , действующие в конечномерном пространстве $H = \omega_h^j$, определяются следующим образом:

$$B = E + \tau \sigma A, \quad A = A_1^+ + A_2, \quad (5.15)$$

$$(A_1^+ y)_i = \begin{cases} -v y_{x,i}, & i = \overline{1, N-2}, \\ v y_{N-1}/h, & i = N-1, \end{cases} \quad (5.16)$$

$$(A_2 y)_i = \begin{cases} -(y_{x,1}/h + y_1/h^2), & i = 1, \\ -y_{xx}, & i = \overline{2, N-2}, \\ y_{N-1}/h^2 + y_{x,N-1}/h, & i = N-1. \end{cases} \quad (5.17)$$

Покажем, что оператор A положителен. Так как $A_2 = A_2^* > 0$, то достаточно доказать неотрицательность оператора A_1^+ . Последнее следует из цепочки соотношений

$$(A_1^+ y, y) = \sum_{i=1}^{N-2} hv \left(\frac{y_i + y_{i+1}}{2} \frac{y_{i+1} - y_i}{h} - \frac{h}{2} y_{x,i}^2 \right) + v y_{N-1}^2 = \frac{v}{2} y_1^2 + \frac{hv}{2} \sum_{i=1}^{N-2} h y_{x,i}^2 + \frac{v}{2} y_{N-1}^2 > 0.$$

Для получения априорных оценок используется [18, с. 345]

Лемма 3. Пусть A — положительный несамосопряженный оператор. Если выполнено условие $\sigma \geq 0,5$, то для схемы (5.14), (5.15) верно неравенство

$$\|y^{j+1}\| \leq \|y_0\| + \|(A^{-1}\varphi)^0\| + \|(A^{-1}\varphi)^j\| + \sum_{k=1}^j \tau \|(A^{-1}\varphi)_{i,k}\|. \quad (5.18)$$

Следовательно, разностная схема (5.13), записанная на подвижной сетке, устойчива в сеточной норме L_2 . Более сильную оценку можно получить с помощью теоремы 2 из [21].

Лемма 4. Пусть выполнены условия леммы 3. Тогда разностная схема (5.14), (5.15) устойчива по начальным данным, правой части и имеет место оценка

$$\|Ay^{j+1}\| \leq \|Ay^0\| + \|\varphi^0\| + \|\varphi^j\| + \sum_{k=0}^{j-1} \tau \|\varphi_{i,k}\|. \quad (5.19)$$

На основании леммы 4 выпишем априорную оценку для решения схемы (5.13):

$$\|vy_x^j + y_{xx}^j\| \leq \|vy_x^0 + y_{xx}^0\| + \|\varphi^0\| + \|\varphi^j\| + \sum_{k=0}^{j-1} \tau \|\varphi_{t,k}\|.$$

В силу согласованности сеточных норм $\|y\|^2 = \sum_{i=1}^{N-1} h(y_i^j)^2 = \sum_{i=1}^{N-1} h_q \psi(\bar{y}_i^j)^2 = (\psi, (\bar{y}_i^j)^2)$ и из полученных выше оценок сразу же следует устойчивость решения разностной схемы (5.11) \bar{y} и в расчетном пространстве $\omega_{h_q} \times \omega_\tau$. Например, априорная оценка в сеточной норме $L_2(\omega_{h_q})$ имеет вид $\|\psi^{1/2} \bar{y}^{j+1}\| \leq \|\psi^{1/2} \bar{y}^0\| + \|\psi^{1/2}(A^{-1}\bar{\varphi})^0\| + \|\psi^{1/2}(A^{-1}\bar{\varphi})^j\| + \sum_{k=1}^j \|\psi^{1/2}(A^{-1}\bar{\varphi})_{t,k}\|$, где оператор $A = A_1^+ + A_2$, действующий в конечномерном гильбертовом пространстве H_{h_q} , согласно (5.12'), (5.16), (5.17), определяется следующим образом:

$$(A_1^+ \bar{y})_i = \begin{cases} -r\bar{y}_{q,i}, & i = \overline{1, N-2}, \\ r\bar{y}_{N-1}/h_q, & i = N-1, \end{cases}$$

$$(A_2 \bar{y})_i = \begin{cases} -k(\bar{y}_{q,1}/h_q + \bar{y}_1/h_q^2), & i = 1, \\ -k\bar{y}_{\bar{q}\bar{q}}, & i = \overline{2, N-2}, \\ k(\bar{y}_{N-1}/h_q^2 + \bar{y}_{\bar{q},N-1}/h_q), & i = N-1. \end{cases}$$

Итак, требование абсолютной устойчивости схемы на подвижной сетке ω_h^j и прямоугольной сетке выполняется при $\sigma \geq 0,5$.

Схема с центральной разностью. В случае переменного метрического коэффициента ψ (неравномерная сетка $\hat{\omega}_h^j$ в исходном физическом пространстве) использование направленных разностей не позволяет сохранить свойство консервативности в различных сеточных пространствах. Указанного недостатка лишена схема с центральными разностями для конвективных слагаемых. Соответствующие разностные схемы в этом случае имеют вид

$$\bar{y}_i - r\bar{y}_q^{(\sigma)} = k\bar{y}_{\bar{q}\bar{q}}^{(\sigma)} + \bar{\varphi}, \quad (5.20)$$

$$y_i - vy_x^{(\sigma)} = y_{xx}^{(\sigma)} + \varphi. \quad (5.21)$$

Для получения априорных оценок схему (5.21) приведем к каноническому виду (5.14) с операторами $B = E + \tau\sigma A$, $A = A_1^+ - A_1^- + A_2$, где

$$(A_1^- y)_i = \begin{cases} y_1/h, & i = 1, \\ (y_i - y_{i-1})/h, & i = 2, 3, \dots, N-1. \end{cases}$$

Очевидно, что оператор $R = A_1^+ - A_1^-$ является кососимметрическим $R = -R^*$ [18]. Поэтому $(Ry, y) = 0$. Так как $A_2 = A_2^* > 0$, то $(Ay, y) > 0$. Следовательно, на основании лемм 3, 4 имеет место

Теорема 3. *Разностная схема (5.21) (в силу инвариантности соответственно и схема (5.20)) при $\sigma \geq 0,5$ абсолютно устойчива по начальным данным, правой части и для решения системы имеют место оценки (5.18), (5.19).*

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

С точки зрения вычислительной практики требование инвариантности позволяет конструировать разностные схемы для дифференциальных задач, записанных в различных системах координат, таким образом, что относительно заданного класса преобразований независимых переменных сохраняются такие важные свойства, как консервативность, аппроксимация, устойчивость, сходимости и др.

Авторы выражают благодарность П. Н. Вабищевичу за ряд ценных замечаний и полезные обсуждения.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского и Белорусского фондов фундаментальных исследований.

Литература

1. *Thompson J. E., Warsi Z. U. A., Mastin C. W.* // J. Comp. Phys. 1982. Vol. 47. P. 1 — 108.
2. *Brackbill J. U., Saltzman J. S.* // J. Comp. Phys. 1982. Vol. 46. P. 342 — 368.
3. *Zhang H., Moalemi K.* // Num. Heat Transfer. Part B. 1995. Vol. 27. P. 255 — 276.
4. *Vinokur M.* // J. Comp. Phys. 1983. Vol. 50. P. 215 — 234.
5. *Wathen A. J.* // J. Comp. Phys. 1992. N 101. P. 51 — 54.
6. *Hindman R. G., Kutler P., Anderson D.* // AIAA J. 1981. Vol. 19, N 4. P. 424 — 431.
7. *Nakashishi K., Deiwert G. S.* // AIAA J. 1987. Vol. 25, N 4. P. 513 — 520.
8. *Рихтмайер Р., Мортон К.* // Разностные методы решения краевых задач. М., 1972.
9. *Самарский А. А., Попов Ю. П.* Разностные методы решения задач газовой динамики. М., 1992.
10. *Годунов С. К., Забродин А. В., Иванов М. Я., Крайко А. Н., Прокопов Г. П.* Численное решение многомерных задач газовой динамики. М., 1976.
11. *Дарьин Н. А., Мажукин В. И.* // Докл. АН СССР. 1988. Т. 298. С. 64 — 68.
12. *Василевский В. Ф., Мажукин В. И.* // Дифференц. уравнения. 1989. Т. 25, № 7. С. 1188 — 1193.
13. *Мажукин В. И., Самарский А. А., Костельянос О., Шапранов А. В.* // Математическое моделирование. 1993. Т. 5, № 4. С. 32 — 56.
14. *Дарьин Н. А., Мажукин В. И., Самарский А. А.* // Докл. АН СССР. 1988. Т. 302, № 5. С. 1078 — 1081.
15. *Бреславский П. В., Мажукин В. И.* // Математическое моделирование. 1995. Т. 7, № 12. С. 48 — 78.
16. *Дарьин Н. А., Мажукин В. И.* // Дифференц. уравнения. 1987. Т. 23, № 7. С. 1154 — 1160.
17. *Дарьин Н. А., Мажукин В. И.* // Математическое моделирование. 1989. Т. 1, № 3. С. 29 — 43.
18. *Самарский А. А.* Теория разностных схем. М., 1977.
19. *Самарский А. А., Гулин А. В.* Устойчивость разностных схем. М., 1973.
20. *Самарский А. А., Вабищевич П. Н., Матус П. П.* // Дифференц. уравнения. 1996. Т. 32, № 2. С. 265 — 274.
21. *Вабищевич П. Н., Матус П. П.* // Докл. АН Беларуси. 1993. Т. 37, № 6. С. 15 — 17.

*Институт математического моделирования РАН,
Институт математики АН Беларуси*

*Поступила в редакцию
8 октября 1996 г.*