ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 1996, том 346, № 6, с. 742–745

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

УДК 619.63

ФАКТОРИЗОВАННЫЕ РЕГИОНАЛЬНО-АДДИТИВНЫЕ СХЕМЫ ДЛЯ ЗАДАЧ КОНВЕКЦИИ/ДИФФУЗИИ

© 1996 г. Академик А. А. Самарский, П. Н. Вабищевич

Поступило 08.09.95 г.

Задачи для несамосопряженных нестационарных параболических уравнений – задачи конвекции/диффузии имеют большое прикладное значение. При применении методов декомпозиции [1–4] для нестационарных задач возможны два подхода. Первый класс методов связан с использованием стандартных неявных схем по времени. Для решения соответствующих дискретных эллиптических задач на каждом временно́м слое привлекаются итерационные методы декомпозиции в различных вариантах. Второй класс методов связан с построением безытерационных методов декомпозиции области при решении нестационарных задач (см., например, [5–7]). Построены различные варианты схем декомпозиции области типа разностных схем переменных направлений, локально-одномерных схем для параболических задач с самосопряженным эллиптическим оператором.

В данной работе обсуждаются проблемы применения методов декомпозиции для более общих эволюционных задач с несамосопряженными операторами. Для модельной задачи конвекции/диффузии строятся факторизованные схемы, безусловная устойчивость и сходимость которых устанавливаются. Для задач с минимальным наложением подобластей получена оценка для погрешности приближенного решения типа $O(\tau|h|^{-1/2})$, где τ, h – шаги сетки по времени и пространству соответственно.

1. В двумерной области Ω ищется решение параболического уравнения, которое для несжимаемой среды запишем в виде

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{2} v_\alpha\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}+\frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{2}\frac{\partial(v_\alpha u)}{\partial x_\alpha}-\sum_{\alpha=1}^{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha^2} = 0, \quad (1)$$
$$x\in\Omega,\quad t>0.$$

Дополним это уравнение граничными и начальным условиями

$$u(x,t) = 0,\quad x\in\partial\Omega,\quad t>0, \quad (2)$$

$$u(x,0) = u_0(x),\quad x\in\Omega. \quad (3)$$

В (1) функции $v_\alpha(x,t)$, $\alpha = 1, 2$ (компоненты скорости) определяют конвективный перенос.

Будем считать для простоты, что в области Ω можно ввести согласованную равномерную по каждому направлению x_α сетку с постоянными шагами h_α, $\alpha = 1, 2$. Обозначим: ω – множество внутренних узлов, а $\partial\omega$ – множество граничных узлов. Разностное решение задачи конвекции/диффузии на момент времени t обозначим $y(x,t)$, $x\in\bar{\omega} = \omega\cup\partial\omega$. Построение разностных схем в более общих случаях проводится аналогично. Это замечание относится и к построению конечноэлементных аппроксимаций по пространству. Для того чтобы подчеркнуть это, мы используем операторную формулировку задачи.

2. Для построения разностных схем второго порядка аппроксимации по пространственным переменным для задачи конвекции/диффузии (1)–(3) используется обычный пятиточечный шаблон "крест". Будем применять стандартные безиндексные обозначения теории разностных схем [8].

Поставим в соответствие задаче (1)–(3) следующую дифференциально-разностную задачу:

$$\frac{dy}{dt}+\frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{2}(b_\alpha y_{\overset{\circ}{x}_\alpha}+(b_\alpha y)_{\overset{\circ}{x}_\alpha})+\Lambda y = 0,\quad x\in\omega,$$
$$y(x,t) = 0,\quad x\in\partial\omega,\quad t>0, \quad (4)$$
$$y(x,0) = u_0(x),\quad x\in\bar{\omega},$$

где Λ – двумерный разностный оператор Лапласа,

$$\Lambda y = -\sum_{\alpha=1}^{2} y_{\bar{x}_\alpha x_\alpha}.$$

Для задач с достаточно гладкими коэффициентами можно ограничиться простейшими аппроксимациями конвективных слагаемых, для которых $b_\alpha(x,t) = v_\alpha(x,t)$, $\alpha = 1, 2$, $x\in\omega$, $t\geq 0$.

Институт математического моделирования Российской Академии наук, Москва

Для сеточных функций, обращающихся в нуль на $\partial\omega$, определим гильбертово пространство H, скалярное произведение и норму в котором введем соотношениями

$$(y, v) = \sum_{x \in \omega} y v h_1 h_2, \quad \|y\| = (y, y)^{1/2}.$$

Рассматривая дифференциально-разностную задачу в H, запишем ее в виде эволюционного уравнения

$$\frac{dy}{dt} + Ay = 0, \quad x \in \omega, \quad t > 0, \tag{5}$$

при заданном $y(x, 0)$, $x \in \omega$. Оператор A представляется в виде

$$A = V(\mathbf{b}) + \Lambda, \tag{6}$$

где $V(\mathbf{b})$ – сеточный оператор, соответствующий конвективному переносу. Принимая во внимание (4), имеем

$$V(\mathbf{b})y = \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{2}((b_\alpha y)_{\overset{0}{x}_\alpha} + b_\alpha y_{\overset{0}{x}_\alpha}). \tag{7}$$

Для сеточных функций $y \in H$ и любых векторов $\mathbf{b}$ имеем

$$V(\mathbf{b}) = -V^*(\mathbf{b}), \tag{8}$$

т.е. разностный оператор конвективного переноса в форме (7) является кососимметричным.

Для несамосопряженного оператора A выделим симметричную (S) и кососимметричную (K) части:

$$A = S + K, \tag{9}$$

где

$$S = \frac{1}{2}(A + A^*), \quad K = \frac{1}{2}(A - A^*).$$

Для задачи (5) с учетом (6), (8) и самосопряженности сеточного оператора Лапласа Λ [8] имеем

$$S = \Lambda, \quad K = V(\mathbf{b}). \tag{10}$$

Таким образом, в разностной задаче конвекции/диффузии (4) симметричная часть сеточного оператора соответствует диффузии, а кососимметричная – конвективному переносу.

3. Построим и исследуем на устойчивость простейшие разностные схемы для приближенного решения задачи (4), которые будут служить нам ориентиром в дальнейшем при рассмотрении схем декомпозиции области. Обозначим через y_n разностное решение на момент времени $t_n = n\tau$, где $\tau > 0$ – шаг по времени. Запишем для уравнения (5), (9) двухслойную разностную схему с весами:

$$\begin{gathered}\frac{y_{n+1} - y_n}{\tau} + S(\sigma_1 y_{n+1} + (1 - \sigma_1))y_n + \\ + K(\sigma_2 y_{n+1} + (1 - \sigma_2))y_n = 0, \\ x \in \omega, \quad n = 0, 1, \ldots\end{gathered} \tag{11}$$

Рассмотрим класс схем (11), когда веса одинаковы:

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma. \tag{12}$$

Теорема 1 [8]. *Разностная схема с весами* (11), (12) *устойчива в H при выполнении операторного неравенства*

$$A + \tau\left(\sigma - \frac{1}{2}\right)A^*A \geq 0. \tag{13}$$

Очевидно, что неравенство (13) будет выполнено при $\sigma \geq 0.5$, т.е. в этом случае мы имеем абсолютно устойчивую разностную схему. При рассмотрении более общих задач (например, при использовании схем конечных элементов, граничных условий Неймана и т.д.) можно ориентироваться на достаточные условия устойчивости $\sigma \geq 0.5$.

При $\sigma < 0.5$ имеет место условная устойчивость схемы с весами (11), (12). Предположим, что справедлива оценка

$$\|Ay\|^2 \leq \Delta(Ay, y).$$

Тогда неравенство (13) будет выполнено при

$$\sigma \geq \frac{1}{2} - \frac{1}{\Delta\tau}$$

или

$$\tau \leq \tau_0 = \frac{1}{\Delta(0.5 - \sigma)}. \tag{14}$$

Для конкретизации условия (14) (постоянной Δ) привлекается следующее утверждение о подчиненности оператора конвективного переноса K оператору диффузионного переноса S.

Лемма. *Для операторов K и S, определенных согласно* (7), (10), *имеет место неравенство*

$$\|Ky\|^2 \leq M(Sy, y), \tag{15}$$

с постоянной

$$M = \frac{3}{2}\max_\alpha\|b_\alpha^2(x)\|_C + M_0\left\|\sum_{\alpha=1}^{2}(b_\alpha(x))_{\overset{0}{x}_\alpha}\right\|_C^2,$$

$$M_0^{-1} = 9(l_1^{-2} + l_2^{-2}),$$

где

$$\|w(x)\|_C \equiv \max_{x \in \bar{\omega}} |w(x)|.$$

Среди схем с весами (11) заслуживает отдельного рассмотрения схема, когда конвективные слагаемые берутся с предыдущего временно́го слоя, т.е.

$$\sigma_1 = \sigma, \quad \sigma_2 = 0. \tag{16}$$

Теорема 2. *При* $\sigma \geq 0.5$ *явно-неявная разностная схема* (11), (16) *устойчива в* H_S, *а для решения верна априорная оценка*

$$\|y_{n+1}\|_S \leq \left(1 + \frac{M}{4}\tau\right)\|y_n\|_S. \tag{17}$$

4. Будем считать, что область Ω состоит из двух отдельных подобластей: $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$. Каждая из этих подобластей может состоять из нескольких не связанных друг с другом подобластей, что предполагается при организации параллельных вычислений. Отдельные подобласти, вообще говоря, могут налегать друг на друга. Определим функции

$$\chi_\alpha(x)\begin{cases} > 0, & x \in \Omega_\alpha, \\ = 0, & x \notin \Omega_\alpha, \end{cases} \quad \alpha = 1, 2, \tag{18}$$

причем

$$\sum_{\alpha=1}^{2} \chi_\alpha(x) = 1, \quad x \in \Omega. \tag{19}$$

При построении адаптивных вычислительных алгоритмов декомпозиции области типичной является ситуация с изменением отдельных подобластей (динамическая адаптация). В этом случае естественно предполагать, что $\Omega_\alpha = \Omega_\alpha(t)$, $\alpha = 1, 2$, и ориентироваться на разбиения типа (18), (19) с $\chi_\alpha = \chi_\alpha(x, t)$, $\alpha = 1, 2$.

В работе [7] выделены три основных способа построения операторов декомпозиции, которые связаны с различными обменными условиями на границах подобластей. При этом сходимость приближенного решения устанавливается в различных нормах. Среди общих подходов к построению операторов декомпозиции D_α отметим определение D_α, $\alpha = 1, 2$, в виде

$$D_\alpha = \chi_\alpha(x)A, \quad \alpha = 1, 2, \tag{20}$$

$$D_\alpha = A\chi_\alpha(x), \quad \alpha = 1, 2, \tag{21}$$

для которых

$$D_\alpha \neq D_\alpha^*, \quad \alpha = 1, 2.$$

Реализация схем декомпозиции области связана с использованием неявных схем в отдельных подобластях, т.е. с обращением операторов $(E + \sigma\tau D_\alpha)$, где σ – весовой параметр. Для построения схемы декомпозиции используем комбинированный выбор операторов декомпозиции. Для первой подобласти зададим оператор декомпозиции в соответствии с (21), для второй – в соответствии с (20), более точно, определим

$$D_1 = A^*\chi_1(x), \quad D_2 = \chi_2(x)A. \tag{22}$$

Для приближенного решения уравнения (5) будем использовать факторизованную схему

$$(E + \sigma\tau D_1)(E + \sigma\tau D_2)\frac{y_{n+1} - y_n}{\tau} + Ay_n = 0, \quad n = 0, 1, \ldots, \tag{23}$$

где, например,

$$D_\alpha = D_\alpha(t_n), \quad \alpha = 1, 2.$$

Помимо (22), (23), рассмотрим более удобную для реализации факторизованную схему (23) с

$$D_1 = S\chi_1(x), \quad D_2 = \chi_2(x)S. \tag{24}$$

Тем самым операторы декомпозиции строятся по самосопряженной части оператора A (по оператору диффузии).

Теорема 3. *Факторизованные разностные схемы* (22), (23) *и* (23), (24) *безусловно устойчивы в* H_S *при* $\sigma \geq 0.5$, *а для разностного решения верна оценка* (17), *где* M *– постоянная из оценки* (15).

На основании соответствующих оценок устойчивости по правой части доказывается оценка скорости сходимости рассматриваемых факторизованных схем.

Теорема 4. *Для погрешности решения факторизованных разностных схем декомпозиции области* (22), (23) *и* (23), (24) *при* $\sigma \geq 0.5$ *справедливы оценки*

$$\|z_{n+1}\|_S \leq M_0(\tau^\nu + \|\chi_1(x)\|_S\tau + |h|^2), \tag{25}$$

где $|h|^2 = h_1^2 + h_2^2$, $\nu = 1$ *при* $\sigma \neq 1/2$ *и* $\nu = 2$, *если* $\sigma = 1/2$, *а постоянная* M_0 *не зависит от шагов сетки.*

Тем самым точность схем декомпозиции зависит от ширины области налегания подобластей Ω_1 и Ω_2 – слагаемые с $\|\chi_1(x)\|_S$ в оценке (25). При построении разностных схем для параллельных компьютеров необходимо ориентироваться на декомпозицию с минимальным наложением подобластей, когда минимальны обмены между отдельными элементарными машинами (процессорами). При минимальном наложении подобластей (ширина области налегания $O(|h|)$) для скорости сходимости из оценки (25) имеем $O(|h|^{-1/2}\tau + |h|^2)$. Подобная оценка относится к классу оптимальных для регионально-аддитивных разностных схем.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 93-012-801).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Domain decomposition methods in Science and Engineering / A. Quarteroni, J. Periaux, Ju. Kuznetsov, O.B. Widlund. Eds. Providence: AMS, 1994.
2. *Агошков В.И.* В сб.: Вычислительные процессы и системы. М.: Наука, 1991. В. 8. С. 4–51.
3. *Quarteroni A.* // Surv. on Math. for Industry. 1991. V. 1. P. 75–118.
4. *Tallec P.Le* // Computat. Mech. Adv. 1994. V. 1. P. 121–220.
5. *Вабищевич П.Н.* // ЖВМиМФ. 1989. Т. 29. С. 1822–1829.
6. *Лаевский Ю.М.* // ЖВМиМФ. 1992. Т. 32. С. 1744–1755.
7. *Vabishchevich P.N.* In: Advances in Numerical Methods and Applications. Singapore: World Scientific, 1994. P. 293–299.
8. *Самарский А.А.* Теория разностных схем. М.: Наука, 1989.