1996. Т. 32, № 2. С. 265 — 274

УДК 519.63

РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ ПОВЫШЕННОГО ПОРЯДКА ТОЧНОСТИ НА НЕРАВНОМЕРНЫХ СЕТКАХ

А. А. Самарский, П. Н. Вабищевич, П. П. Матус

ВВЕДЕНИЕ

При построении адаптивных численных алгоритмов приближенного решения задач математической физики приходится ориентироваться на использование неравномерных сеток. При переходе от равномерной сетки к неравномерной порядок локальной погрешности аппроксимации обычно падает. Например, при аппроксимации второй производной на обычном трехточечном шаблоне [1] в равномерной норме и в сеточной норме L_2 имеет место лишь первый порядок аппроксимации. Только при использовании негативной нормы удается доказать второй порядок точности разностной схемы для соответствующих разностных схем на неравномерных сетках.

Повышение точности аппроксимации наиболее просто можно достичь на основе [1] использования расширенных шаблонов или на более узком классе функций (на решениях дифференциальной задачи). Обращает на себя внимание возможность повышения точности метода за счет аппроксимации исходного дифференциального уравнения не в узлах расчетной сетки, а в некоторых промежуточных точках расчетной области. Такой подход имеет некоторые общие моменты с суперсходимостью в теории метода конечных элементов [2]. Повышение точности при аппроксимации второй производной на неравномерной сетке в отдельном узле отмечалось еще в книге [3].

В настоящей работе рассмотрены различные схемы повышенного порядка аппроксимации для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка, для одномерных параболических и гиперболических уравнений. Доказана сходимость со вторым порядком по пространству в более сильных, чем известные в теории разностных схем [1], нормах. Заслуживают специального исследования схемы отмеченного класса в многомерных задачах математической физики.

§1. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

На отрезке $[0,l]$ будем рассматривать произвольную сетку

$$\hat{\omega}_h = \{x_i = x_{i-1} + h_i, i = 1,2,\dots,N, x_0 = 0, x_N = l\}, \tag{1.1}$$

удовлетворяющую условию нормировки $\sum\limits_{i=1}^{N} h_i = l$. Введем скалярные произведения [1] $(y,v)_* = \sum\limits_{i=1}^{N-1} y_i v_i \hbar_i$, $(y,v) = \sum\limits_{i=1}^{N-1} y_i v_i h_i$, $(y,v] = \sum\limits_{i=1}^{N} y_i v_i h_i$, $\hbar = 0,5(h + h_+)$, $h_+ = h_{i+1}$, и нормы $\|v\|_C = \max\limits_{x\in\hat{\omega}_h} |v(x)|$, $\|v_{\bar{x}}\|_C = \max\limits_{x\in\omega^+} |v_{\bar{x}}(x)|$, $\omega^+ = \hat{\omega}_h \bigcup \{x_N = l\}$. Определим сеточный оператор

$$(Ay)_i = -(\Lambda y)_i = -y_{\bar{x}\hat{x},i} = \frac{1}{\hbar_i}\Big(\frac{y_{i+1}-y_i}{h_{i+1}} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i}\Big).$$

Л е м м а 1. *Для произвольной сеточной функции $y(x)$, заданной на неравномерной сетке (1.1) и обращающейся в нуль при $x = 0$ и $x = l$, справедливы неравенства*

$$\|y\|_* \le (l^2/4)\|y_{\bar{x}\hat{x}}\|_*, \quad \|y_{\bar{x}}]| \le (l/2)\|y_{\bar{x}\hat{x}}\|_*, \quad \|y_{\bar{x}}\|_C \le M_1\|y_{\bar{x}\hat{x}}\|_*, \tag{1.2}$$

где $M_1^2 = \varepsilon + l/4 + l^2(1+c_1)/(8\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$ — произвольное число, а константа c_1 удовлетворяет неравенству

$$c_1^{-1} \le \max_i(h_i/h_{i+1}) \le c_1. \tag{1.3}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Используя первую разностную формулу Грина и вложение [4, с. 37]

$$\|y\|_* \le (l/2)\|y_{\bar{x}}]|, \tag{1.4}$$

получим неравенство $\|y_{\bar{x}}]|^2 = -(y_{\bar{x}\hat{x}}, y)_* \le \|y_{\bar{x}\hat{x}}\|_*\|y\|_* \le (l/2)\|y_{\bar{x}}]|\|y_{\bar{x}\hat{x}}\|_*$. Отсюда и из оценки (1.4) следует первое неравенство из (1.2). Третье неравенство является следствием вложения [5] $\|y_{\bar{x}}\|_C^2 \le \varepsilon\|y_{\bar{x}\hat{x}}\|_*^2 + ((1+c_1)/(2\varepsilon) + 1/l)\|y_{\bar{x}}]|^2$ и оценок (1.2).

Рассмотрим теперь сеточный оператор $-(Ay)_i = (ay_{\bar{x}})_{\hat{x},i} = (1/\hbar_i)(a_{i+1}(y_{i+1} - y_i)/h_{i+1} - a_i(y_i - y_{i-1})/h_i)$, где шаблонный функционал $a = a(x)$ определен для всех $x \in \hat{\omega}_h$ и удовлетворяет системе неравенств $0 < k_1 \le a(x) \le k_2$, $x \in \hat{\omega}_h$, $\|(a^{-1})_{\hat{x}}\|_C \le k_3$.

Л е м м а 2. *Для всякой сеточной функции $y(x)$, заданной на произвольной сетке (1.1) и обращающейся в нуль при $x = 0$ и $x = l$, имеют место неравенства*

$$\|y\|_* \le (l^2/(4k_1))\|Ay\|_*, \quad \|y_{\bar{x}}]| \le (l/(2k_1))\|Ay\|_*, \quad \|y_{\bar{x}}\|_C \le M_3\|(ay_{\bar{x}})_{\hat{x}}\|_*, \tag{1.5}$$

где $M_3 = M_1M_2$, $M_2 = k_1^{-1}(1 + (lk_2k_3/2\sqrt{2})(1+c_1)^{1/2})$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Вывод первых двух оценок (1.5) аналогичен (1.2). Воспользуемся теперь очевидным тождеством $y_{\bar{x}\hat{x}} = a^{-1}(ay_{\bar{x}})_{\hat{x}} + (a^{-1})_{\hat{x}}a_+y_x$, $a_+ = a(x+h)$. Следовательно,

$$\|y_{\bar{x}\hat{x}}\|_* \le k_1^{-1}\|Ay\|_* + k_2k_3\|y_x\|_*. \tag{1.6}$$

В силу (1.3)

$$\|y_x\|_*^2 = \sum_{i=1}^{N-1}\frac{\hbar_i}{h_{i+1}}(h_{i+1}y_{x,i}^2) \le \frac{1}{2}(1+c_1)\|y_{\bar{x}}]|^2. \tag{1.7}$$

Используя теперь оценки (1.5), (1.7), из (1.6) находим

$$\|y_{\bar{x}\hat{x}}\|_* \le M_2\|Ay\|_*. \tag{1.8}$$

Требуемое третье неравенство (1.5) следует из леммы 1 и оценки (1.8). Лемма доказана.

При получении априорных оценок нам понадобится следующая [1]

Л е м м а 3. *Пусть выполнены условия*

$$A_i > 0, \quad B_i > 0, \quad D_i = C_i - A_i - B_i > 0, \quad i = 1, 2, \ldots, N-1. \tag{1.9}$$

Тогда для решения задачи $A_iy_{i-1} - C_iy_i + B_iy_{i+1} = -F_i$, $i = 1, 2, \ldots, N-1$, $y_0 = 0$, $y_N = 0$, справедлива оценка $\|y\|_C \le \|F/D\|_C$.

§2. РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ ВТОРОГО ПОРЯДКА АППРОКСИМАЦИИ НА НЕРАВНОМЕРНЫХ СЕТКАХ

1. Одномерное уравнение второго порядка. На произвольной неравномерной сетке (1.1) дифференциальную задачу

$$u'' = -f(x), \quad x \in (0, l), \quad u(0) = u(l) = 0, \tag{2.1}$$

заменим разностной

$$y_{\bar{x}\hat{x}} = -f(\bar{x}), \quad y_0 = y_N = 0, \tag{2.2}$$

где $\bar{x}_i = (1/3)(x_{i-1} + x_i + x_{i+1}) = x_i + (h_{i+1} - h_i)/3$.

2. Погрешность аппроксимации. Покажем, что схема (2.2) аппроксимирует исходную задачу со вторым порядком относительно узла $\bar{x}_i$ [3], т. е. $\psi(\bar{x}_i) = L_h u_i - Lu(\bar{x}_i) = u_{\bar{x}\hat{x},i} - u''(\bar{x}_i) = O(\hbar_i^2)$. Для этого воспользуемся формулой (27) из [1, с. 81]

$$u_{\bar{x}\hat{x},i} - u''(x_i) = ((h_{i+1} - h_i)/3)u'''(x_i) + O(\hbar_i^2). \tag{2.3}$$

Из формулы Тейлора $u''(\bar{x}_i) = u_i'' + ((h_{i+1} - h_i)/3)u_i''' + O(\hbar_i^2)$ находим

$$u_i'' = u''(\bar{x}_i) - ((h_{i+1} - h_i)/3)u_i''' + O(\hbar_i^2). \tag{2.4}$$

Подставляя (2.4) в (2.3), заключаем, что

$$\psi(\bar{x}_i) = O(\hbar_i^2). \tag{2.5}$$

Покажем, что относительно узла $x = x_i$ погрешность аппроксимации разностной схемы (2.2)

$$\psi(x_i) = (u_{\bar{x}\hat{x},i} + f(\bar{x}_i)) - (u''(x_i) + f(x_i)) = O(\hbar_i^2) \tag{2.6}$$

также имеет второй порядок. Действительно, подставляя в (2.6) разложение (2.3) и следствие уравнения (2.1) $u''' = -f'$, получим $\psi(x_i) = f(\bar{x}_i) - f(x_i) - ((h_{i+1} - h_i)/3)f'(x_i) + O(\hbar_i^2) = O(\hbar_i^2)$.

3. Априорные оценки.

Теорема 1. *Разностная схема (2.2) устойчива по правой части и при любом* $h = \max\limits_i h_i$ *имеют место неравенства:* $\|y_{\bar{x}}]| \le (l/2)\|f(\bar{x})\|_*$, $\|y_{\bar{x}x}\|_* \le \|f(\bar{x})\|_*$, *а при выполнении условий (1.3) — оценка вида* $\|y_{\bar{x}}\|_C \le M_1\|f(\bar{x})\|_*$.

Доказательство. Умножая первое уравнение (2.2) скалярно на $\hbar y_{\bar{x}\hat{x}}$ и применяя неравенство Коши — Буняковского, находим $\|y_{\bar{x}\hat{x}}\|_*^2 \le \|f(\bar{x})\|_*\|y_{\bar{x}\hat{x}}\|_*$.

Из последнего неравенства и леммы 1 следуют требуемые оценки.

Для получения оценок точности выпишем задачу для погрешности метода $z = y - u$, $z_{\bar{x}\hat{x},i} = \psi(x_i)$, $i = 1, 2, \ldots, N - 1$, $z_0 = z_N = 0$. При выполнении условий теоремы 1 имеет место следующая оценка скорости сходимости: $\|z_{\bar{x}}\|_C \le c_2 h^2$, $c_2 = \mathrm{const} > 0$.

4. Уравнение с переменными коэффициентами. Рассмотрим однородную краевую задачу для уравнения второго порядка $(k(x)u')' = -f(x)$, $u(0) = u(l) = 0$. При построении консервативных разностных схем второго порядка точности на произвольной неравномерной сетке воспользуемся тождеством

$$u_{\bar{x},i} = \frac{1}{h_i}\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{W}{k}dx, \quad W = ku'.$$

На основании формулы Тейлора нетрудно показать, что $u_{\bar{x},i} = a_i^{-1}W_{i-1/2} + (h_i^2/12)((k^{-1})'_{i-1/2} \times W'_{i-1/2} + (1/2)k^{-1}_{i-1/2}W''_{i-1/2}) + O(\hbar_i^4)$, где шаблонный функционал a определяется из наилучшей разностной схемы [1] $a = \left(\frac{1}{h}\int\limits_{x-h}^{x}\frac{dx}{k}\right)^{-1}$. Следовательно, $(au_{\bar{x}})_{\hat{x},i} = (W_{i+1/2} - W_{i-1/2})/\hbar + ((h^2/12)(a(k^{-1})'W' + (1/2)W''))_{\hat{x},i} + O(\hbar_i^2)$. Используя известное разложение [1, с. 421] $(W_{i-1/2})_{\hat{x}} = (ku')' + (1/8)(h^2W'')_{\hat{x}} + O(\hbar^2)$, находим $(au_{\bar{x}})_{\hat{x}} = W' + ((h^2/6)W'')_{\hat{x}} + ((h^2/12)a(k^{-1})' \times W')_{\hat{x}} + O(\hbar^2)$ или $(au_{\bar{x}})_{\hat{x}} = W'(\bar{x}) + ((h_+ - h)/6)a(k^{-1})'W' + O(\hbar^2)$.

Учитывая, что $W' = -f(x)$, приходим к разностной схеме

$$(ay_{\bar{x}})_{\hat{x}} = \varphi, \quad y_0 = y_N = 0, \tag{2.7}$$

в которой $\varphi_i = -(1 + ((h_{i+1} - h_i)/6)a_i(k^{-1})'_i)f(\bar{x}_i)$. Очевидно, что относительно точки $x = \bar{x}_i$ $\psi(\bar{x}_i) = (au_{\bar{x}})_{\hat{x},i} + \varphi_i - ((ku')' + f)_{x=\bar{x}_i} = O(\hbar_i^2)$.

Теорема 2. *Пусть выполнено условие (1.3). Тогда схема (2.7) устойчива по правой части и имеют место оценки:* $\|(ay_{\bar{x}})_{\hat{x}}\|_* \le \|\varphi\|_*$, $\|y_{\bar{x}}\|_C \le M_3\|\varphi\|_*$.

Доказательство теоремы проводится методом энергетических неравенств с использованием третьей оценки (1.5).

Приведем пример еще одной схемы второго порядка аппроксимации. Так как имеет место представление $(k_{(0,5)}u_{\bar{x}})_{\hat{x}} = (k\bar{u}')' - ((h_+ - h)/6)(k'u'' - k''u') + O(\hbar^2)$, где $\bar{f} = f(\bar{x}_i)$, то соответствующая разностная схема будет иметь вид $(k_{(0,5)}y_{\bar{x}})_{\hat{x}} + ((h_+ - h)/6)(k'y_{\bar{x}\hat{x}} - k''y_{\bar{x}}) = -f(\bar{x})$.

В качестве второго характерного примера простейшего уравнения второго порядка с переменными коэффициентами рассмотрим уравнение $u'' - q(x)u = -f(x)$, $x \in (0, l)$, дополнив его краевыми условиями задачи (2.1). Для простоты считаем коэффициент $q(x)$ достаточно гладким, и пусть $q(x) \geq 0$.

Отличительной чертой построения разностной схемы второго порядка точности в данном случае является аппроксимация члена $q(x)u(x)$ в точке $\bar{x}_i$. Среди различных возможностей отметим только схемы с направленными разностями. Поставим в соответствие дифференциальной задаче разностную схему $y_{\bar{x}\hat{x}} - q(\bar{x})(y + ((h_+ - h)/3)y_x) = -f(\bar{x})$ или $y_{\bar{x}\hat{x}} - q(\bar{x})(y + (h_+ - h)y_{\bar{x}}) = -f(\bar{x})$. Для того чтобы получить безусловно монотонную разностную схему, необходимо выбрать либо первое уравнение, либо второе в зависимости от знака $h_+ - h$. Фактически такой прием используется ниже при рассмотрении более сложных задач для уравнений с частными производными.

5. Схемы третьего порядка точности. Для решения задачи (2.1) на трехточечном шаблоне можно построить схемы и более высокого порядка точности. Действительно, на основании формулы Тейлора $u_{\bar{x}\hat{x},i} = u''(\bar{x}_i) + ((h_i^2 - h_i h_{i+1} + h_{i+1}^2)/12)u^{(4)}(x_i) + O(\hbar_i^3)$.

Согласно (2.1), $u^{(4)}(x_i) = -f''(x_i)$. Следовательно, разностное уравнение $y_{\bar{x}\hat{x},i} = -\varphi_i$; $\varphi_i = f(\bar{x}_i) + ((h_i^2 - h_i h_{i+1} + h_{i+1}^2)/12)f''(x_i)$, аппроксимирует уравнение (2.1) с третьим порядком.

§3. РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

1. Уравнение с постоянными коэффициентами. В прямоугольнике $\bar{D} = (0 \leq x \leq l$, $0 \leq t \leq T)$ ищется непрерывное решение $u = u(x, t)$ задачи

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t), \quad 0 < x < l, \quad 0 < t \leq T, \tag{3.1}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad u(0,t) = 0, \quad u(l,t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Наряду с ранее введенной произвольной неравномерной пространственной сеткой $\hat{\omega}_h$ будем рассматривать равномерную сетку по временной переменной $\omega_\tau = \{t_j = j\tau, j = 0, 1, \ldots, j_0\}$.

Так как точка $\bar{x}_i = x_i + (h_{i+1} - h_i)/3$ не является в общем случае расчетной, то на основании разложений $v_{i-1} = v(\bar{x}_i) + (x_{i-1} - \bar{x}_i)v'(\bar{x}_i) + O(\hbar_i^2)$, $v_i = v(\bar{x}_i) + (x_i - \bar{x}_i)v'(\bar{x}_i) + O(\hbar_i^2)$, $v_{i+1} = v(\bar{x}_i) + (x_{i+1} - \bar{x}_i)v'(\bar{x}_i) + O(\hbar_i^2)$, заключаем, что

$$(v_{i-1} + v_i + v_{i+1})/3 = v(\bar{x}_i) + O(\hbar_i^2). \tag{3.2}$$

Используем формулу (3.2) для построения простейшей схемы второго порядка аппроксимации на неравномерной сетке:

$$(y_{t,i-1} + y_{t,i} + y_{t,i+1})/3 = y^{(\sigma)}_{\bar{x}\hat{x},i} + f^{(\sigma)}(\bar{x}_i, t). \tag{3.3}$$

Краевые и начальные условия аппроксимируются точно:

$$y_0^{j+1} = 0, \quad y_N^{j+1} = 0, \quad y_i^0 = y(x_i, 0) = u_0(x_i). \tag{3.4}$$

Очевидно, что при $\sigma \neq 0,5$ имеет место $\psi(\bar{x}_i) = O(\hbar_i^2 + \tau)$, а при $\sigma = 0,5$ получаем схему второго порядка точности и по временной переменной $\psi = O(\hbar^2 + \tau^2)$.

Рассмотрим теперь чисто неявную схему и исследуем ее принципом максимума. При $\sigma = 1$ из (3.3) следует

$$\hat{y}_i = 3\Big(\frac{\tau}{\hbar_i h_i} - \frac{1}{3}\Big)\hat{y}_{i-1} - \frac{6\tau}{h_i h_{i+1}}\hat{y}_i + 3\Big(\frac{\tau}{\hbar_i h_{i+1}} - \frac{1}{3}\Big)\hat{y}_{i+1} + 3\bar{y}_i + \tau\varphi_i, \tag{3.5}$$

где $\varphi_i^j = f(\bar{x}_i, t_{j+1})$, $\quad \bar{y}_i = (y_{i-1} + y_i + y_{i+1})/3$.

Запишем схему (3.5) в каноническом виде: $A_i\hat{y}_{i-1} - C_i\hat{y}_i + B_i\hat{y}_{i+1} = -F_i$, $\hat{y}_0 = \hat{y}_N = 0$. Здесь $A_i = 3\tau/(\hbar_i h_i) - 1$, $B_i = 3\tau/(\hbar_i h_{i+1}) - 1$, $C_i = A_i + B_i + 3$, $F_i = 3\bar{y}_i + \tau\varphi_i$. Заметим, что $A_i > 0$ при $\tau > \hbar_i h_i/3$, $B_i > 0$ при $\tau > \hbar_i h_{i+1}/3$. Следовательно, условия принципа максимума (1.9) выполняются при

$$\tau > \hbar^2_{\max}/3, \quad \hbar_{\max} = \max_i \hbar_i. \tag{3.6}$$

Так как $D_i = C_i - A_i - B_i = 3$, то на основании леммы 3 $\|\hat{y}\|_C \le \max\limits_{1\le i\le N-1}\|y_{i-1} + y_i + y_{i+1}\|/3+$ $+\tau\|\varphi\|_C \le \dots \le \|y_0\|_C + \sum\limits_{n=0}^{j}\tau\|\varphi^n\|_C$. Итак, нами доказана

Теорема 3. *При выполнении условия (3.6) разностная схема* $(y_{t,i-1} + y_{t,i} + y_{t,i+1})/3 =$ $= \hat{y}_{\bar{x}\hat{x},i} + f(\bar{x}_i, t_{j+1})$ *условно устойчива по начальным данным, правой части и верна априорная оценка* $\|y^j\|_C \le \|y_0\|_C + \sum\limits_{n=0}^{j-1}\tau\|\varphi^n\|_C$, $\quad j = 1, 2, \dots, j_0$.

Очевидно, что при тех же ограничениях на шаги сетки схема сходится со скоростью $O(\hbar^2_{\max} + \tau)$.

Недостатком схемы (2.3), помимо нарушения требования консервативности, является условная устойчивость, причем в случае равномерной сетки по x ограничения на шаги сетки τ и h не устраняются.

2. Консервативные схемы. На неравномерной сетке $\omega = \hat{\omega}_h \times \omega_\tau$ рассмотрим следующий класс разностных схем с весами

$$y_t + ((h^2/6)y_{t\bar{x}})_{\hat{x}} = y^{(\sigma_0)}_{\bar{x}\hat{x}} + f^{(\sigma_0)}(\bar{x}_i, t_j). \tag{3.7}$$

Так как на гладких решениях

$$u_t + \left(\frac{h^2}{6}u_{t\bar{x}}\right)_{\hat{x}} = u_t + \frac{h_+ - h}{3}u_{tx} + \frac{h^2}{6}u_{tx\hat{x}} = \frac{\partial u}{\partial t}(\bar{x}_i, t_j) + O(\hbar^2 + \tau),$$

то на основании (2.6) заключаем, что схема (3.7) имеет второй порядок аппроксимации по пространственной переменной $\bar{\psi}_i = O(\hbar^2 + \tau)$. Аналогично случаю стационарного уравнения покажем, что относительно расчетного узла (x_i, t_j) на решениях уравнения (3.1) также имеется второй порядок аппроксимации. Для этого невязку схемы (3.7) запишем в виде

$$\psi_i = -\left(u_{t,i} + \frac{h_{i+1} - h_i}{3}u_{tx,i} + \frac{h_i^2}{6}u_{t\bar{x}\hat{x},i}\right) + \left(u_{\bar{x}\hat{x},i} + f(x_i, t) + \frac{h_{i+1} - h_i}{3}f'(x_i, t)\right)^{(\sigma_0)} + O(\hbar_i^2 + \tau).$$

Воспользовавшись представлением (2.3) и формулой Тейлора, последнее равенство перепишем в виде $\psi = (1 + (h_+ - h)/3)(-\partial u/\partial t + \partial^2 u/\partial x^2 + f) + O(\hbar^2 + \tau)$. Следовательно, на решениях уравнения (3.1) $\psi(x_i, t_j) = O(\hbar^2 + \tau)$. Для получения априорных оценок преобразуем схему (3.7). Определим переменный вес $\sigma_i = \sigma_0 - h_i^2/(6\tau)$, $\sigma_0 = \mathrm{const}$. На основании тождества $v_i^{(\sigma_i)} = v_i^{(\sigma_0)} + (\sigma_i - \sigma_0)\tau v_{t,i}$ заключаем, что $y^{(\sigma_0)}_{\bar{x}\hat{x},i} - ((h_i^2/6)y_{t\bar{x}})_{\hat{x},i} = (y_{\bar{x}}^{(\sigma_i)})_{\hat{x}}$. Следовательно, разностная схема (3.7) алгебраически эквивалентна схеме с переменными весовыми множителями [6 — 8]

$$y_{t,i} = ((y_{\bar{x}})^{(\sigma_i)})_{\hat{x},i} + \varphi_i, \tag{3.8}$$

где $\varphi_i = f^{(\sigma_0)}(\bar{x}_i, t_j)$.

Для получения соответствующих априорных оценок воспользуемся методикой, изложенной в работе [9]. Для этого схему (3.8) запишем в каноническом виде двухслойных операторно-разностных схем [1]: $By_t + Ay = \varphi$, $t \in \omega_\tau$, $y(0) = u_0$.

Пусть $H = \Omega_h$ — пространство сеточных функций, заданных на неравномерной сетке $\hat{\omega}_h$ со скалярным произведением $(y, v)_* = \sum\limits_{i=1}^{N-1} y_i v_i \hbar_i$, $y, v \in H$. Определим также $H_1 =$ $= \Omega_h^+$ — пространство функций, заданных на множестве узлов $\omega_h^+ = \omega_h \bigcup \{x_N = l\}$. Скалярное произведение в H_1 есть $(y, v] = \sum\limits_{i=1}^{N} y_i v_i h_i$, $y, v \in H_1$. Тогда оператор $A : H \to H$ имеет вид

$(Ay)_1 = -y_{x,1}/\hbar_1 + y_1/(h_1\hbar_1)$, $(Ay)_i = -y_{\bar{x}\hat{x},i}$, $i = 2,3,\dots,N-2$, $(Ay)_{N-1} = y_{N-1}/(\hbar_{N-1}h_N) + y_{\bar{x},N-1}/\hbar_{N-1}$.

Оператор B определяется так: $B = E + \tau T^*\Sigma T$, где E — единичный, а операторы T, Σ, T^* действуют следующим образом: $T: H \to H_1$, $\Sigma: H_1 \to H_1$, $T^*: H_1 \to H$, причем $(Ty)_1 = y_1/h_1$, $(Ty)_i = y_{\bar{x},i}$ при $i = 2,3,\dots,N-1$, $(Ty)_N = -y_{N-1}/h_N$, так что $v = Ty \in H_1$, если $y \in H$, $\Sigma = \mathrm{diag}\{\sigma_1,\sigma_2,\dots,\sigma_N\}$, $((Ty)^{(\Sigma)})_i^j = \sigma_i y_{\bar{x},i}^{j+1} + (1-\sigma_i)y_{\bar{x},i}^j = y_{\bar{x},i}^{(\sigma_i)}$, $i = 2,3,\dots,N-2$, $((Ty)^{(\Sigma)})_1^j = y_1^{(\sigma_1)}/h_1$, $((Ty)^{(\Sigma)})_N^j = -y_{N-1}^{(\sigma_N)}/h_N$, $(T^*v)_i = -v_{\hat{x},i}$ при $i = 1,2,\dots,N-1$, так что $T^*v \in H$, если $v \in H_1$. Сопряженность операторов T и T^* следует из формулы суммирования по частям $(y, v_{\hat{x}})_* = -(v, y_{\bar{x}}]$, так что $(y, T^*v)_* = (v, Ty]$.

Очевидно, что оператор $A = T^*T$ является положительным и самосопряженным. Для того чтобы схема принадлежала исходному семейству схем, необходимо показать, что оператор $B > 0$. По построению $B = B^* > 0$ при $\Sigma \ge 0$. Неотрицательность оператора Σ следует из условия $\sigma_i \ge 0, i = 1,2,\dots,N$.

Проверим выполнение достаточного условия устойчивости по правой части

$$B \ge 0,5\tau A. \tag{3.9}$$

Рассмотрим выражение $B - 0,5\tau A = E + \tau T^*(\Sigma - 0,5E)T$. Следовательно, при $\Sigma \ge 0,5E$ неравенство (3.9) выполнено.

Итак, на основании общей теории устойчивости [1] имеет место

Теорема 4. *При выполнении условия*

$$\sigma_0 \ge 0,5 + h_i^2/(6\tau) \tag{3.10}$$

разностная схема (3.7), (3.4) устойчива по начальным данным, правой части, и для решения верна априорная оценка

$$\|y^{j+1}\|_A \le \|y_0\|_A + \|\varphi^0\|_{A^{-1}} + \|\varphi^j\|_{A^{-1}} + \sum_{k=1}^{j} \tau\|\varphi_{\bar{t},k}\|_{A^{-1}}. \tag{3.11}$$

Замечание 1. Отметим, что в случае неявной схемы $(\sigma_0 = 1)$

$$y_t + (\frac{h^2}{6} y_{t\bar{x}})_{\hat{x}} = \hat{y}_{\bar{x}\hat{x}} + f(\bar{x}_i, t_{j+1})$$

оценки (3.11) имеют место (как и в случае схемы (3.3)) при $\tau \ge \hbar_{\max}^2/3$.

3. Недивергентные схемы. Указанные выше условия устойчивости консервативных схем можно ослабить, если для аппроксимации дифференциальной задачи воспользоваться монотонной схемой

$$y_t + ((h_+ - h)/3)y_{t\bar{x}} = \hat{y}_{\bar{x}\hat{x}} + \varphi, \tag{3.12}$$

где $\varphi = f(\bar{x}_i, t_{j+1}), h_+ > h$. Отметим, что при другом способе разгона сетки следует использовать другую направленную разность. Для простоты рассуждений ограничимся рассмотрением лишь устойчивости по начальным данным в энергетической норме H_{A^2}. О более слабых нормах, по-видимому, нет смысла говорить, так как подобные оценки устойчивости и точности могут быть получены и для обычных консервативных методов первого порядка аппроксимации с использованием техники негативных норм [1].

Теорема 5. *Разностная схема (3.12), (3.4) при* $\varphi = 0$, *выполнении неравенства (1.3) и* $\tau \ge (c_3/(18))\max_i |h_{i+1} - h_i|^2$, $c_3 = \max_i(\hbar_i/h_i) = 0,5(1 + c_1)$, *устойчива по начальным данным и имеют место оценки* $\|y_{\bar{x}\hat{x}}\|_* \le \|u_{0\bar{x}\hat{x}}\|_*$, $\|y_{\bar{x}}\|_C \le M_1\|u_{0\bar{x}\hat{x}}\|_*$.

Доказательство. Умножая уравнение (3.12) с $\varphi = 0$ на $-2\tau\hbar_i y_{t\bar{x}\hat{x},i}$ и суммируя по внутренним узлам сетки $\hat{\omega}_h$, получим энергетическое тождество

$$2\tau\|y_{t\bar{x}}]|^2 + \tau^2\|y_{t\bar{x}\hat{x}}\|_*^2 + \|\hat{y}_{\bar{x}\hat{x}}\|_*^2 = \|y_{\bar{x}\hat{x}}\|_*^2 + 2\tau(((h_+ - h)/3)y_{t\bar{x}}, y_{t\bar{x}\hat{x}})_*. \tag{3.13}$$

Используя неравенство Коши — Буняковского, первые две оценки (1.2) и условие (1.3), получим

$$2\tau(((h_+ - h)/3)y_{t\bar{x}}, y_{t\bar{x}\hat{x}})_* \le (2\tau/3)\max_i|h_+ - h|\|y_{t\bar{x}}\|_*\|y_{t\bar{x}\hat{x}}\|_* \le$$

$$\le (2/3)\sqrt{c_3}\tau\max_i|h_+ - h|\|y_{t\bar{x}}]|\|y_{t\bar{x}\hat{x}}\|_* \le (c_3/9)\max_i|h_{i+1} - h_i|^2\|y_{t\bar{x}}]|^2 + \tau^2\|y_{t\bar{x}\hat{x}}\|_*^2.$$

Подставив данную оценку в (3.13) и воспользовавшись условием теоремы, приходим к требуемым оценкам. Теорема доказана.

Отметим, что в случае равномерной сетки $(h_{i+1} - h_i = 0)$ схема является абсолютно устойчивой.

4. Схемы с переменными весами. Более общим классом схем второго порядка точности по пространству на произвольной неравномерной сетке являются схемы с переменными по пространству весами $y_{(\omega_1,\omega_2)t} = y_{\bar{x}\hat{x}}^{(\sigma)} + \varphi$, где $y_{(\omega_1,\omega_2)} = \omega_{1i}y_{i+1} + (1 - \omega_{1i} - \omega_{2i})y_i + \omega_{2i}y_{i-1}$. Например, при $\omega_1 = \omega_2 = 1/3$ получаем рассмотренную ранее схему (3.3). Изученная выше недивергентная схема (3.12) соответствует следующему выбору весов: $\sigma = 1$, $\omega_{1i} = 0$, $\omega_{2i} = (h_i - h_{i+1})/(3h_i)$, $i = 1, 2, \ldots, N-1$. Варьируя переменные веса ω_{1i}, ω_{2i}, можно добиться аппроксимации производной $\partial u/\partial t$ относительно нерасчетной точки $(\bar{x}_i, t_j)$ и более высокого порядка, чем 2. Например, при $\omega_1 = (2/9)(2h + h_+)(h_+ - h)/(\hbar h_+)$, $\omega_2 = -(2/9)(h + 2h_+)(h_+ - h)/(\hbar h)$ с помощью представления остатка интерполирования в форме Лагранжа, нетрудно показать, что $\partial u(\bar{x}_i, t)/\partial t - u_{(\omega_1,\omega_2)t,i} = O(\hbar_i^3 + \tau)$.

5. Примеры разностных схем для нелинейных уравнений. Рассмотрим для простоты квазилинейное уравнение вида

$$c(u)\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\Big(k(u)\frac{\partial u}{\partial x}\Big) + f(u).$$

При построении схем второго порядка точности удобно ввести новую переменную [1] $v = \int_0^u k(\xi)d\xi$.

В результате исходное уравнение преобразуется к виду

$$\partial\varphi(v)/\partial t = \partial^2 v/\partial x^2 + \bar{f}(v), \tag{3.14}$$

где $\varphi(v) = \int_0^u c(\xi)d\xi$. Для аппроксимации (3.14) можно использовать схемы вида $(\varphi(y))_{(\omega_1,\omega_2)t} = y_{\bar{x}\hat{x}}^{(\sigma)} + \bar{f}_{(\omega_1,\omega_2)}^{(\sigma)}(y)$, где веса ω_1, ω_2 выбираются из условия $v(\bar{x}_i) - v_{(\omega_1,\omega_2)}(x_i) = O(\hbar_i^n)$, $n \ge 2$.

§4. РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

1. Консервативные схемы. Рассмотрим уравнение колебаний

$$\partial^2 u/\partial t^2 = \partial^2 u/\partial x^2 + f(x,t), \quad 0 < x < l, \quad 0 < t \le T. \tag{4.1}$$

В начальный момент заданы условия

$$u(x,0) = u_0(x), \quad \partial u(x,0)/\partial t = \bar{u}_0(x). \tag{4.2}$$

Для простоты рассуждений граничные условия будем считать однородными:

$$u(0,t) = 0, \quad u(l,t) = 0. \tag{4.3}$$

Пользуясь, как и выше, обозначениями $y = y^j$, $\hat{y} = y^{j+1}$, $\check{y} = y^{j-1}$, $y_t = (\hat{y} - y)/\tau$, $y_{\bar{t}} = (y - \check{y})/\tau$, $\Lambda y = y_{\bar{x}\hat{x}}$, $y_{\bar{x}\hat{x}} = (1/\hbar)((y_+ - y)/h_+ - (y - y_-)/h)$, $\hbar = 0,5(h + h_+)$, $v_\pm = v_{i\pm1}$, $y_{\bar{t}t} = (y_t - y_{\bar{t}})/\tau = (\hat{y} - 2y + \check{y})/\tau^2$, заменим производные, входящие в уравнение (4.1), по формулам $\partial^2 u/\partial t^2 \sim u_{\bar{t}t} + ((h^2/6)u_{\bar{t}t\bar{x}})_{\hat{x}}$, $\partial^2 u/\partial x^2 \sim u_{\bar{x}\hat{x}}^{(\sigma,\sigma)}$, $f \sim \varphi$, $\varphi = f^{(\sigma,\sigma)}(\bar{x}, t)$, $t \in \omega_\tau$, где $\bar{x}_i = x_i + (h_{i+1} - h_i)/3$, $v^{(\sigma_1,\sigma_2)} = \sigma_1\hat{v} + (1 - \sigma_1 - \sigma_2)v + \sigma_2\check{v}$.

Рассмотрим семейство схем с постоянными весами

$$y_{\bar{t}t} + ((h^2/6)y_{\bar{t}t\bar{x}})_{\hat{x}} = y_{\bar{x}\hat{x}}^{(\sigma,\sigma)} + \varphi, \tag{4.4}$$

$$y(0,t+\tau) = y(l,t+\tau) = 0, \quad y(x,0) = u_0(x), \quad y_t(x,0) = \tilde{u}_0(x). \tag{4.5}$$

Отметим, что $\tilde{u}_0(x)$ выбирается так, чтобы погрешность аппроксимации второго начального условия была величиной $O(\tau^2)$ [1]: $\tilde{u}_0(x) = \overline{u}_0(x) + 0,5\tau(u_0''(x) + f(x,0))$.

Так как на достаточно гладких функциях

$$u_{\bar{t}t} + \left(\frac{h^2}{6}u_{\bar{t}t\bar{x}}\right)_{\hat{x}} = u_{\bar{t}t} + \frac{h_+ - h}{3}u_{\bar{t}tx} + \frac{h^2}{6}u_{\bar{t}t\bar{x}\hat{x}} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(\overline{x},t) + \frac{h^2}{6}u_{\bar{t}t\bar{x}\hat{x}} + O(\tau^2),$$

то $u_{\bar{t}t,i} + ((h^2/6)u_{\bar{t}t\bar{x}})_{\hat{x},i} - \partial^2 u(\bar{x}_i,t_j)/\partial t^2 = O(\hbar_i^2 + \tau^2)$.

Используя тождество

$$v^{(\sigma,\sigma)} = v + \sigma\tau^2 v_{\bar{t}t} \tag{4.6}$$

и формулу (2.6), заключаем, что $(u_{\bar{x}\hat{x},i}^{(\sigma,\sigma)} - \partial^2 u(\bar{x}_i,t_j)/\partial x^2) + (\varphi_i^j - f(\bar{x}_i,t_j)) = O(\hbar_i^2 + \tau^2)$. Следовательно, разностная схема (4.4), (4.5) относительно узла $(\bar{x}_i,t_j)$ аппроксимирует исходную дифференциальную задачу со вторым порядком: $\psi(\bar{x}_i,t_j) = O(\hbar_i^2 + \tau^2)$.

Для получения априорных оценок устойчивости разностное уравнение (4.4) преобразуем к виду, удобному для дальнейших исследований. Применяя тождество (4.6), получим представление $(y_{\bar{x}}^{(\sigma,\sigma)} - (h^2/6)y_{\bar{t}t\bar{x}})_{\hat{x}} = (y_{\bar{x}} + \tau^2(\sigma - h^2/(6\tau^2))y_{\bar{x}\bar{t}t})_{\hat{x}} = (y_{\bar{x}}^{(\sigma-h^2/(6\tau^2),\sigma-h^2/(6\tau^2))})_{\hat{x}}$. Итак, разностная схема (4.4) приводится к схеме с переменными по пространству весами

$$y_{\bar{t}t,i} = (y_{\bar{x}}^{(\sigma_{1i},\sigma_{1i})})_{\hat{x},i} + \varphi_i, \tag{4.7}$$

где $\sigma_{1i} = \sigma - h_i^2/(6\tau^2)$, $\sigma = \mathrm{const} > 0$.

Исследование устойчивости проведем в соответствии с работой [9]. Для этого схему (4.7), (4.5) приведем к каноническому виду трехслойных операторно-разностных схем

$$Dy_{\bar{t}t} + Ay = \varphi, \quad \tau \le t = j\tau < T, \quad y(0) = y_0, \quad y(\tau) = y_1, \tag{4.8}$$

где $A = T^*T$ — положительный самосопряженный оператор, действующий из H в H, и $D = E + \tau^2 T^*\Sigma_1 T$, $\Sigma_1 = \mathrm{diag}\{\sigma_{11}, \sigma_{12}, \ldots, \sigma_{1N}\}$. Линейные операторы T^*, T описаны в §3. Так как при $\sigma \ge h_i^2/(6\tau^2)$ постоянный оператор Σ_1 неотрицательный, то $D = D^* > 0$. Следовательно, операторно-разностная схема (4.8) принадлежит исходному семейству схем. Проверим выполнение достаточного условия устойчивости по начальным данным и по правой части: $D \ge ((1+\varepsilon)/4)\tau^2 A$, где $\varepsilon > 0$ — любое действительное число. Заметим, что $D - ((1+\varepsilon)/4)\tau^2 A = E + \tau^2 T^*(\Sigma_1 - ((1+\varepsilon)/4)E)T \ge 0$ при $\Sigma_1 \ge ((1+\varepsilon)/4)E$. Так как Σ_1 — диагональный оператор, то последнее неравенство удовлетворяется при $\sigma_{1i} \ge (1+\varepsilon)/4$, $i = 1, 2, \ldots, N$, или

$$\sigma \ge h_i^2/(6\tau^2) + (1+\varepsilon)/4. \tag{4.9}$$

Итак, на основании общей теории устойчивости [1, с. 401] имеет место

Теорема 6. *При выполнении условия (4.9) разностная схема (4.4), (4.5) устойчива по начальным данным, правой части, и для решения верна априорная оценка* $\|y^{j+1}\|_A \le \sqrt{\dfrac{1+\varepsilon}{\varepsilon}} \times$
$\times\left(\|y(0)\|_A + \|y_t(0)\|_D + \sum_{n=1}^{j}\tau\|\varphi^n\|_{D^{-1}}\right)$.

2. Недивергентные схемы. К недостатку консервативной схемы (4.4) можно отнести тот факт, что в случае равномерной сетки она не преобразуется к классическим схемам, обладающим свойством безусловной устойчивости при $\sigma < 1$. Рассмотрим класс схем с переменными по пространству весами $y_{(\omega_1,\omega_2)\bar{t}t} = y_{\bar{x}\hat{x}}^{(\sigma_1,\sigma_2)} + \varphi$, где веса ω_{1i}, ω_{2i} выбираются из условия $v(\bar{x}_i) - (\omega_{1i}v_{i+1} + (1-\omega_{1i}-\omega_{2i})v_i + \omega_{2i}v_{i-1}) = O(\hbar_i^n)$, $n \ge 2$.

Для простоты дальнейших рассуждений ограничимся рассмотрением чисто неявной схемы $(\sigma_1 = 1\,,\ \sigma_2 = 0)$

$$y_{(\omega_1,\omega_2)\bar{t}t} = \hat{y}_{\bar{x}\hat{x}} + \varphi. \tag{4.10}$$

Приведем примеры разностных схем второго порядка аппроксимации по пространственной переменной на произвольной неравномерной сетке. При $\omega_1 = \omega_2 = 1/3$ имеем

$$(1/3)(y_{\bar{t}t,i-1} + y_{\bar{t}t,i} + y_{\bar{t}t,i+1}) = \hat{y}_{\bar{x}\hat{x},i} + \varphi_i. \tag{4.11}$$

Если положить $\omega_1 = 0\,,\ \omega_2 = -(h_+ - h)/(3h)$, то из (4.10) получим

$$y_{\bar{t}t} + ((h_+ - h)/3)y_{\bar{t}t\bar{x}} = \hat{y}_{\bar{x}\hat{x}} + \varphi. \tag{4.12}$$

Локальная погрешность аппроксимации схем (4.11), (4.12) есть величина $O(\hbar^2+\tau)$, причем в случае равномерной сетки ω_h разностное уравнение (4.12) вырождается в классическую аппроксимацию волнового уравнения.

3. Устойчивость по начальным данным. При $\varphi = 0$ схема (4.10) преобразуется к уравнению $y_{\bar{t}t} + \omega_1 h_+ y_{\bar{t}tx} - \omega_2 h y_{\bar{t}t\bar{x}} = \hat{y}_{\bar{x}\hat{x}}$, умножая которое скалярно на $-2\tau y_{t\bar{x}\hat{x}}$, получим $-2\tau(y_{t\bar{x}\hat{x}}, y_{\bar{t}t})_* = \|\hat{y}_{\bar{t}\bar{x}}]|^2 + \tau^2\|y_{\bar{t}t\bar{x}}]|^2 - \|y_{\bar{t}\bar{x}}]|^2$. При оценке следующего скалярного произведения нам понадобится неравенство

$$\|v\|_* = \Big(\sum_{i=1}^{N-1} \hbar_i v_i^2\Big)^{1/2} \le \max_i\Big(\frac{\hbar_i}{h_i}\Big)^{1/2}\|v]| = \sqrt{c_3}\|v]|.$$

Используя неравенство Коши с ε, имеем

$$-2\tau\Big(y_{t\bar{x}\hat{x}}, \omega_1 h_+ y_{\bar{t}tx} - \omega_2 h y_{\bar{t}t\bar{x}}\Big)_* \le \tau^2\|y_{\bar{t}t\bar{x}}]|^2 + 2h^2 c_3\Big(\|\omega_1\|_C^2 + \|\omega_2\|_C^2\Big)\|y_{t\bar{x}\hat{x}}\|_*^2.$$

Очевидно, что $-2\tau(y_{t\bar{x}\hat{x}}, \hat{y}_{\bar{x}\hat{x}})_* = -\|\hat{y}_{\bar{x}\hat{x}}\|_*^2 - \tau^2\|y_{t\bar{x}\hat{x}}\|_*^2 + \|y_{\bar{x}\hat{x}}\|_*^2$.

Суммируя полученные оценки, приходим к рекуррентному неравенству

$$\|\hat{y}\|_1^2 + I(y) \le \|y\|_1^2. \tag{4.13}$$

Здесь $\|y\|_1^2 = \|y_{\bar{t}\bar{x}}]|^2 + \|y_{\bar{x}x}\|_*^2$, $I(y) = (\tau^2 - 2h^2 c_3(\|\omega_1\|_C^2 + \|\omega_2\|_C^2))\|y_{t\bar{x}\hat{x}}\|_*^2$. Заметим, что $I(y) \ge 0$ при

$$\tau \ge c_4 h, \tag{4.14}$$

где $c_4 = \sqrt{2c_3}(\|\omega_1\|_C^2 + \|\omega_2\|_C^2)^{1/2}$, $h = \max\limits_i h_i$.

Итак, при выполнении условия (4.14) разностная схема с переменными весами устойчива по начальным данным и имеют место априорные оценки

$$\|y^j_{\bar{x}\hat{x}}\|_* \le \|u_{0\bar{x}\hat{x}}\|_* + \tau^2\|\tilde{u}_{0\bar{x}\hat{x}}\|_* + \|\tilde{u}_{0\bar{x}}]|, \quad \|y^j_{\bar{x}}\|_C \le (l/2)(\|u_{0\bar{x}\hat{x}}\|_* + \tau^2\|\tilde{u}_{0\bar{x}\hat{x}}\|_* + \|\tilde{u}_{0\bar{x}}]|).$$

Рассмотрим условия устойчивости по начальным данным для конкретных разностных схем второго порядка аппроксимации. Для схемы (4.11) $(\omega_1 = \omega_2 = 1/3)$ из (4.14) следует, что шаг τ должен удовлетворять неравенству

$$\tau \ge (2\sqrt{c_3}/3)h, \tag{4.15}$$

а недивергентная схема (4.12) устойчива по начальным данным при

$$\tau \ge (\sqrt{2c_3}/3)\max_i|h_{i+1} - h_i|. \tag{4.16}$$

4. Исследование сходимости. При получении априорных оценок устойчивости в энергетической **полунорме** W_2^2 пришли к необходимости выполнения соотношений на шаги сетки τ и h **вида (4.15), (4.16)**, т. е. в некотором смысле обратное требование по отношению к условию

Куранта. Покажем, что при этих же условиях имеют место и соответствующие оценки точности. Для простоты рассуждений ограничимся рассмотрением схемы (4.12). Соответствующая задача для погрешности метода $z = y - u$ имеет вид

$$z_{\bar{t}t}+((h_+ - h)/3)z_{\bar{t}t\bar{x}} = \hat{z}_{\bar{x}\hat{x}}+\hat{\psi}, \quad z(0,t+\tau) = z(l,t+\tau) = 0, \quad z(x,0) = 0, \quad z_t(x,0) = \nu(x). \quad (4.17)$$

Напомним, что погрешность аппроксимации схемы ψ, $\nu(x)$ удовлетворяет соотношениям $\psi(\bar{x}_i,t) = O(\hbar_i^2 + \tau)$, $\nu(x) = \tilde{u}(x) - \bar{u}_0(x) = O(\tau^2)$.

Теорема 7. *Пусть существует единственное решение задачи (4.1) — (4.3) $u(x,t) \in C_5^4(\bar{D})$. Тогда разностная схема (4.12), (4.5) условно сходится к решению дифференциальной задачи и при*

$$\tau \geq (\sqrt{c_3}/3)\max_i|h_{i+1} - h_i| \quad (4.18)$$

имеют место оценки точности вида

$$\max_{t\in\omega_\tau}\|z_{\bar{x}\hat{x}}\|_* \leq c_5(h^2+\tau), \quad c_5 = \text{const} > 0, \quad \max_{t\in\omega_\tau}\|z_{\bar{x}}\|_C \leq \frac{c_5 l}{2}(h^2+\tau).$$

Доказательство. Умножая уравнение для погрешности метода (4.17) скалярно на $-2\tau z_{t\bar{x}\hat{x}}$, аналогично (4.13) получим энергетическое соотношение

$$\|\hat{z}_{\bar{t}\bar{x}}]|^2 + \|\hat{z}_{\bar{x}\hat{x}}\|_*^2 + I_1(z) \leq \|z_{\bar{t}\bar{x}}]|^2 + \|z_{\bar{x}\hat{x}}\|_*^2 - 2\tau(z_{t\bar{x}\hat{x}},\psi)_*, \quad (4.19)$$

в котором (в силу (4.18)) $I_1(z) = (\tau^2 - h^2c_3\|h_+ - h\|_C^2/9)\|z_{t\bar{x}\hat{x}}\|_*^2 \geq 0$.

Нам осталось оценить скалярное произведение, содержащее погрешность аппроксимации: $-2\tau(z_{t\bar{x}\hat{x}},\hat{\psi})_* = -2(\hat{z}_{\bar{x}\hat{x}},\hat{\psi})_* + 2(z_{\bar{x}\hat{x}},\psi)_* + 2\tau(z_{\bar{x}\hat{x}},\psi_t)_* \leq -2\tau((z_{\bar{x}\hat{x}},\psi)_*)_t + \tau\|z_{\bar{x}x} + \psi\|_*^2 + \tau\|\psi_t\|_*^2 - 2\tau(\psi,\psi_t)_*$. Подставляя данную оценку в (4.19) с учетом тождества $\|\hat{\psi}\|_*^2 = \|\psi\|_*^2 + \tau(\psi + \hat{\psi},\psi_t)_*$, справедливого для произвольной сеточной функции, приходим к рекуррентному соотношению $\|\hat{z}\|_2^2 \leq (1+\tau)\|z\|_2^2 + \tau r(\hbar^2+\tau)^2$, где $r > 0$ — константа аппроксимации, $\|z\|_2^2 = \|z_{\bar{t}\bar{x}}]|^2 + \|z_{\bar{x}\hat{x}} + \psi\|_*^2$. В силу произвольности j из последнего неравенства и следуют требуемые оценки. Теорема доказана.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского и Белорусского фондов фундаментальных исследований.

Литература

1. *Самарский А. А.* Теория разностных схем. М., 1977.
2. *Krizek M., Neittaanmaki P.* // Acta Applicandae Mathematicae. 1987. Vol. 9. P. 175 — 198.
3. *Берковский Б. М., Полевиков В. К.* Вычислительный эксперимент в конвекции. Минск, 1988.
4. *Самарский А. А., Гулин А. В.* Устойчивость разностных схем. М., 1973.
5. *Андреев В. Б.* // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 1972. Т. 12, № 3. С. 598 — 611.
6. *Самарский А. А., Гулин А. В.* // Докл. РАН. 1993. Т. 330, № 6. С. 694 — 695.
7. *Вабищевич П. Н., Матус П. П.* // Докл. АН Беларуси. 1993. Т. 37, № 6. С. 15 — 17.
8. *Вабищевич П. Н., Матус П. П., Щеглик В. С.* // Докл. АН Беларуси. 1994. Т. 38, № 3. С. 13 — 15.
9. *Вабищевич П. Н., Матус П. П., Щеглик В. С.* // Дифференц. уравнения. 1994. Т. 30, № 7. С. 1175 — 1186.

Институт математического моделирования РАН,
Институт математики АН Беларуси

Поступила в редакцию
4 декабря 1995 г.