1995. Т. 31, № 9. С. 1563 — 1569

УДК 519.63

ВЕКТОРНЫЕ АДДИТИВНЫЕ СХЕМЫ ДЕКОМПОЗИЦИИ ОБЛАСТИ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

А.А. Самарский, П.Н.Вабищевич

В настоящее время большое внимание уделяется методам декомпозиции области при решении задач математической физики [1 — 4]. Данный класс методов применяется при рассмотрении задач в сложных составных областях. Методы декомпозиции области строятся с целью перехода к решению отдельных слабо связанных между собой задач в отдельных более простых подобластях и поэтому должны рассматриваться как наиболее перспективные при построении алгоритмов, ориентированных на параллельные ЭВМ. При применении методов декомпозиции для нестационарных задач рассматриваются два подхода. Первый класс методов связан с использованием стандартных неявных схем по времени. Для решения соответствующих дискретных эллиптических задач на каждом временном слое привлекаются хорошо разработанные итерационные методы декомпозиции в различных вариантах. Второй класс методов связан с построением безытерационных методов декомпозиции области при решении нестационарных задач. В работах [5 — 13] построены различные варианты схем декомпозиции области типа классических разностных схем переменных направлений, локально-одномерных схем (схем покомпонентного расщепления). Ориентируясь на параллельную реализацию методов декомпозиции, мы должны рассматривать регионально-аддитивные схемы (схемы расщепления по подобластям) с произвольным числом подобластей (групп подобластей). В то же самое время наиболее сильные результаты о сходимости приближенного решения получены для схем типа переменных направлений, т. е. при двухкомпонентном расщеплении. Схемы типа локально-одномерных схем (схемы покомпонентного расщепления) строятся на основе суммарной аппроксимации и имеют невысокую точность. В работах В. Н. Абрашина (см., например, [14, 15]) предложен класс безусловно устойчивых схем полной аппроксимации для произвольного многокомпонентного расщепления. Такие схемы анализируются в работе [16] с позиций общей теории устойчивости разностных схем [17, 18]. В данной работе проведено рассмотрение такого класса схем при использовании методов декомпозиции области. Исследуется точность регионально-аддитивных разностных схем первого и второго порядка по времени для модельной начально-краевой задачи для параболического уравнения второго порядка.

1. Постановка задачи. В двумерной области Ω ищется решение параболического уравнения со смешанными производными

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{\alpha,\beta=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\Big(k_{\alpha\beta}(x)\frac{\partial u}{\partial x_\beta}\Big) = 0, \quad x = (x_1, x_2) \in \Omega, \quad t > 0, \tag{1}$$

при выполнении условия симметричности $k_{\alpha\beta}(x) = k_{\beta\alpha}(x)$ для достаточно гладких коэффициентов уравнения и условия эллиптичности

$$\sum_{\alpha,\beta=1}^{2} k_{\alpha\beta}(x)\xi_\alpha\xi_\beta \geq m\sum_{\alpha=1}^{2}\xi_\alpha^2, \quad m > 0.$$

Уравнение (1) дополняется граничными и начальным условиями

$$u(x,t) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad t > 0, \tag{2}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \Omega. \tag{3}$$

Будем считать для простоты, что в области Ω можно ввести согласованную равномерную по каждому направлению x_α сетку с постоянными шагами h_α, $\alpha = 1,2$. Обозначим через ω множество внутренних узлов, а через $\partial\omega$ множество граничных узлов, разностное решение задачи (1) — (3) на момент времени t через $y(x,t)$, $x \in \bar{\omega} = \omega \cup \partial\omega$. Построение разностных схем в более общих случаях проводится аналогично, в частности, при использовании конечноэлементных аппроксимаций по пространству. Для того чтобы подчеркнуть это, используем операторную формулировку задачи.

Будем придерживаться стандартных безындексных обозначений теории разностных схем [17]. На множестве сеточных функций $y \in H$ таких, что $y(x) \equiv 0$, $x \notin \omega$, определим сеточный оператор A соотношением

$$Ay = -\frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta=1}^{2}\left((k_{\alpha\beta}y_{\bar{x}_\beta})_{x_\alpha} + (k_{\alpha\beta}y_{x_\beta})_{\bar{x}_\alpha}\right), \quad x \in \omega. \tag{4}$$

Для сеточных функций, обращающихся в нуль на $\partial\omega$, определим гильбертово пространство H, скалярное произведение и норму в котором введем соотношениями

$$(y,v) = \sum_{x\in\omega} y(x)v(x)h_1h_2, \quad \|y\| = (y,y)^{1/2}.$$

Поставим в соответствие (1) — (3) задачу Коши для дифференциально-разностного уравнения в H

$$dy/dt + Ay = 0, \quad x \in \omega, \quad t > 0, \tag{5}$$

$$y(x,0) = u_0(x), \quad x \in \omega, \tag{6}$$

с $A = A^* > 0$ [17].

2. Векторные схемы декомпозиции области. Будем считать, что область Ω состоит из p отдельных подобластей: $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \ldots \cup \Omega_p$, которые, вообще говоря, могут налегать друг на друга. Пусть ω_α — узлы ω, лежащие в Ω_α, $\alpha = 1,2,\ldots,p$. Определим функции

$$\chi_\alpha(x) = \begin{cases} > 0, & x \in \Omega_\alpha, \\ 0, & x \notin \Omega_\alpha, \end{cases} \quad \alpha = 1,2,\ldots,p, \tag{7}$$

причем

$$\sum_{\alpha=1}^{p}\chi_\alpha(x) = 1, \quad x \in \Omega. \tag{8}$$

Ограничимся рассмотрением класса схем декомпозиции, когда для оператора A имеет место аддитивное представление

$$A = \sum_{\alpha=1}^{p} A_\alpha, \tag{9}$$

причем операторы A_α, $\alpha = 1,2,\ldots,p$, связываются с отдельными подобластями, разбиением (7), (8), решением отдельных подзадач в подобластях Ω_α, $\alpha = 1,2,\ldots,p$.

Будем использовать расщепление (7) — (9), когда сеточные операторы A_γ, $\gamma = 1,2,\ldots,p$, аппроксимируют дифференциальные вырождающиеся эллиптические операторы

$$-\sum_{\alpha,\beta=1}^{2}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_{\alpha\beta}(x)\chi_\gamma(x)\frac{\partial u}{\partial x_\beta}\right), \quad \gamma = 1,2,\ldots,p.$$

В силу этого

$$A_\gamma y = -\frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta=1}^{2}\left((k_{\alpha\beta}\chi_\gamma y_{\bar{x}_\beta})_{x_\alpha} + (k_{\alpha\beta}\chi_\gamma y_{x_\beta})_{\bar{x}_\alpha}\right), \quad x \in \omega, \quad \gamma = 1,2,\ldots,p. \tag{10}$$

При использовании (7), (8), (10) имеем $A_\alpha = A_\alpha^* \geq 0$, $\alpha = 1, 2, \ldots, p$.

При простейшей декомпозиции области прямыми $x_i = \text{const}$, $i = 1, 2$, сеточный оператор A в уравнении (5) представляется в виде (9) с числом операторов $p > 2$ (многоцветное разбиение). Аддитивные разностные схемы для уравнения (5), (9) строятся на основе перехода к последовательности из p задач, каждая из которых связана с отдельным сеточным оператором A_α, $\alpha = 1, 2, \ldots, p$.

При использовании векторных аддитивных схем вместо (5), (6) рассматривается задача для вектора $Y = \{y_1, y_2, \ldots, y_p\}$, каждая отдельная компонента которого определяется как решение однотипных задач

$$\frac{dy_\alpha}{dt} + \sum_{\beta=1}^{p} A_\beta y_\beta = 0, \quad 0 < t \leq T, \tag{11}$$

$$y_\alpha(0) = y_0, \quad \alpha = 1, 2, \ldots, p. \tag{12}$$

Очевидно, что $y_\alpha(t) = y(t)$, и поэтому в качестве решения исходной задачи (5), (6) можно взять любую компоненту вектора $Y(t)$.

Обозначим через y^n разностное решение на момент времени $t^n = n\tau$, где $\tau > 0$ — шаг по времени. Рассмотрение начнем с простейшей разностной схемы с весами для системы уравнений (11), (12)

$$(E + \sigma\tau A_\alpha)\frac{y_\alpha^{n+1} - y_\alpha^n}{\tau} + \sum_{\beta=1}^{p} A_\beta y_\beta^n = 0, \quad \alpha = 1, 2, \ldots, p. \tag{13}$$

Переход на новый временной слой в схеме (13), как и в стандартных (скалярных) вариантах аддитивных разностных схем, связан с обращением на каждом временном шаге операторов $E + \sigma\tau A_\alpha$, $\alpha = 1, 2, \ldots, p$.

Под приближенным решением задачи (5), (6) будем понимать не отдельные компоненты вектора Y, а функцию $\bar{y}$, которая определяется следующим образом:

$$A\bar{y} = \sum_{\alpha=1}^{p} A_\alpha y_\alpha. \tag{14}$$

В этих условиях при $\sigma \geq p/2$ схема (13) абсолютно устойчива и для приближенного решения имеет место оценка

$$\|A\bar{y}^{n+1}\| \leq \|A\bar{y}^n\|. \tag{15}$$

Тем самым устойчивость устанавливается в норме гильбертова пространства H_D, $D = A^2$.

3. Сходимость схемы декомпозиции. Исследование сходимости разностных схем для нестационарных задач базируется на оценках устойчивости разностного решения по правой части. Особенности рассматриваемых векторных схем декомпозиции не позволяют ограничиться использованием простейших оценок решения по правой части, непосредственно вытекающие из устойчивости решения по начальным данным [17, 18]. Определим через $z_\alpha^n = y_\alpha^n - u^n$, $\alpha = 1, 2, \ldots, p$, погрешность соответствующей компоненты решения на момент времени t^n, где $u^n = u(x, t^n)$, $x \in \omega$, — точное достаточно гладкое решение задачи (1) — (3). Подстановкой в (13) получим систему уравнений для погрешностей

$$(E + \sigma\tau A_\alpha)\frac{z_\alpha^{n+1} - z_\alpha^n}{\tau} + \sum_{\beta=1}^{p} A_\beta z_\beta^n = \psi_\alpha^n, \quad \alpha = 1, 2, \ldots, p. \tag{16}$$

Для локальных погрешностей аппроксимации с учетом (9) имеем $\psi_\alpha^n = (E + \sigma\tau A_\alpha)(u^{n+1} - u^n)/\tau + Au^n$, $\alpha = 1, 2, \ldots, p$, и тем самым

$$\psi_\alpha^n = \sigma\tau A_\alpha \partial u/\partial t + O(\tau + |h|^2), \quad \alpha = 1, 2, \ldots, p, \tag{17}$$

где $|h|^2 = h_1^2 + h_2^2$.

Для получения соответствующей оценки сходимости разностной схемы (13) перепишем (16) в виде

$$(E+\sigma\tau A_\alpha)\frac{z_\alpha^{n+1}-z_\alpha^n}{\tau}+\frac{1}{2}\sum_{\beta=1}^p A_\beta(z_\beta^{n+1}+z_\beta^n)-\frac{\tau}{2}\sum_{\beta=1}^p A_\beta\frac{z_\beta^{n+1}-z_\beta^n}{\tau}=\psi_\alpha^n,\quad \alpha=1,2,\dots,p,$$

домножим каждое из уравнений ($\alpha=1,2,\dots,p$) скалярно на $2\tau A_\alpha z_{t,\alpha}^n$, $z_{t,\alpha}^n=(z_\alpha^{n+1}-z_\alpha^n)/\tau$ и просуммируем их:

$$2\tau\sum_{\alpha=1}^p(A_\alpha z_{t,\alpha}^n,z_{t,\alpha}^n)+2\sigma\tau^2\sum_{\alpha=1}^p(A_\alpha z_{t,\alpha}^n,A_\alpha z_{t,\alpha}^n)-\tau^2\Big(\sum_{\alpha=1}^p A_\alpha z_{t,\alpha}^n,\sum_{\alpha=1}^p A_\alpha z_{t,\alpha}^n\Big)+$$

$$+\Big(\sum_{\alpha=1}^p A_\alpha(z_\alpha^{n+1}+z_\alpha^n),\sum_{\alpha=1}^p A_\alpha(z_\alpha^{n+1}-z_\alpha^n)\Big)=2\tau\sum_{\alpha=1}^p(\psi_\alpha^n,A_\alpha z_{t,\alpha}^n). \tag{18}$$

Для правой части (18) используем оценку

$$\sum_{\alpha=1}^p(\psi_\alpha^n,A_\alpha z_{t,\alpha}^n)\le\sum_{\alpha=1}^p(z_{t,\alpha}^n,A_\alpha z_{t,\alpha}^n)+\frac{1}{4}\sum_{\alpha=1}^p(\psi_\alpha^n,A_\alpha\psi_\alpha^n). \tag{19}$$

С учетом неравенства $(\sum\limits_{\alpha=1}^p A_\alpha v_\alpha)^2\le p\sum\limits_{\alpha=1}^p(A_\alpha v_\alpha)^2$ имеем

$$2\sigma\sum_{\alpha=1}^p(A_\alpha v_\alpha,A_\alpha v_\alpha)-\Big(\sum_{\alpha=1}^p A_\alpha v_\alpha,\sum_{\alpha=1}^p A_\alpha v_\alpha\Big)\ge(2\sigma-p)\sum_{\alpha=1}^p(A_\alpha v_\alpha,A_\alpha v_\alpha)\ge 0 \tag{20}$$

при приведенных выше ограничениях $\sigma\ge p/2$. Кроме того,

$$\Big(\sum_{\alpha=1}^p A_\alpha(z_\alpha^{n+1}+z_\alpha^n),\sum_{\alpha=1}^p A_\alpha(z_\alpha^{n+1}-z_\alpha^n)\Big)=\Big(\sum_{\alpha=1}^p A_\alpha z_\alpha^{n+1},\sum_{\alpha=1}^p A_\alpha z_\alpha^{n+1}\Big)-$$

$$-\Big(\sum_{\alpha=1}^p A_\alpha z_\alpha^n,\sum_{\alpha=1}^p A_\alpha z_\alpha^n\Big)=\|A\bar z^{n+1}\|^2-\|A\bar z^n\|^2,$$

где по аналогии с (14)

$$A\bar z^n=\sum_{\alpha=1}^p A_\alpha z_\alpha^n, \tag{21}$$

т. е. $\bar z^n=\bar y^n-u^n$. Тогда с учетом (19), (20) от (18) можно перейти к неравенству

$$\|A\bar z^{n+1}\|^2\le\|A\bar z^n\|^2+\frac{\tau}{2}\sum_{\alpha=1}^p(\psi_\alpha^n,A_\alpha\psi_\alpha^n). \tag{22}$$

Принимая во внимание (17), из (22) получим искомую оценку для погрешности.

Теорема 1. *Векторная аддитивная схема (9), (10), (13) декомпозиции области при $\sigma\ge p/2$ сходится безусловно, а для погрешности (21) верна оценка*

$$\|A\bar z^{n+1}\|\le M_1(\tau+|h|^2+M_2\tau\max_\alpha\|A\chi_\alpha\|), \tag{23}$$

где постоянные M_1 и M_2 зависят только от точного решения задачи (1) — (3).

Для получения (23) необходимо в эту оценку подставить представление (17) для погрешности аппроксимации и учесть выбор операторов декомпозиции согласно (10).

Приведенный результат демонстрирует существенную зависимость скорости сходимости векторной схемы декомпозиции области от разбиения и диаметра подобластей налегания. Имеет смысл выделить отдельно предельный случай неналегающих друг на друга подобластей. В этом случае из оценки (23) получаем для точности разностного решения оценку $O(\tau|h|^{-3/2}+|h|^2)$. Заметим, что при $p=2$ использование схем типа переменных направлений дает существенно лучшую оценку $O(\tau|h|^{-1/2}+|h|^2)$ (см., например, [13]).

4. Другие операторы декомпозиции. Отметим возможность применения векторных аддитивных схем типа (13) при использовании несамосопряженных операторов декомпозиции. В работе [11] выделены три основных класса операторов декомпозиции. Можно ориентироваться на задание операторов A_α, $\alpha=1,2,\ldots,p$, в виде [6, 7]:

$$A_\alpha=\chi_\alpha(x)A,\quad \alpha=1,2,\ldots,p. \tag{24}$$

Еще одна возможность связана с использованием следующего представления для операторов декомпозиции:

$$A_\alpha=A\chi_\alpha(x),\quad \alpha=1,2,\ldots,p. \tag{25}$$

Очевидно, что для расщеплений (8), (24) и (8), (25) $A_\alpha\neq A_\alpha^*$, $\alpha=1,2,\ldots,p$, в отличие от симметричного расщепления (8), (10). Различное задание операторов декомпозиции можно интерпретировать как задание различных граничных условий на границах подобластей.

Исследование устойчивости и сходимости векторных аддитивных схем декомпозиции области (9), (13), (24) и (9), (13), (25) проводится на основе предварительного преобразования этих схем. Рассмотрим, например, схему (9), (13), (24), которая имеет вид

$$(E+\sigma\tau\chi_\alpha A)\frac{y_\alpha^{n+1}-y_\alpha^n}{\tau}+\sum_{\beta=1}^{p}\chi_\beta Ay_\beta^n=0,\quad \alpha=1,2,\ldots,p. \tag{26}$$

Определим функции $v_\alpha^n=A^{1/2}y_\alpha^n$ и домножим каждое из уравнений (26) на $A^{1/2}$ и перепишем (26) в виде

$$(E+\sigma\tau\tilde A_\alpha)\frac{v_\alpha^{n+1}-v_\alpha^n}{\tau}+\sum_{\beta=1}^{p}\tilde A_\beta v_\beta^n=0,\quad \alpha=1,2,\ldots,p, \tag{27}$$

где теперь $\tilde A_\alpha=A^{1/2}\chi_\alpha A^{1/2}$, причем $\tilde A_\alpha=(\tilde A_\alpha)^*\geq 0$. Схема (27) относится к классу схем, рассмотренных выше. В частности, аналогично (14) определим $\bar v$ из $A\bar v=\sum\limits_{\alpha=1}^{p}\tilde A_\alpha v_\alpha$. Тем самым для схемы декомпозиции (26) под приближенным решением исходной задачи будем понимать функцию $\bar y$, для которой $A\bar y=\sum\limits_{\alpha=1}^{p}\chi_\alpha Ay_\alpha$.

Аналогичные соображения для схемы декомпозиции (9), (13), (25) приводят к схеме (27), в которой $v_\alpha^n=A^{-1/2}y_\alpha^n$ и $\tilde A_\alpha=A^{-1/2}\chi_\alpha A^{-1/2}$, причем приближенное решение определяется по наиболее простой формуле $\bar y=\sum\limits_{\alpha=1}^{p}\chi_\alpha y_\alpha$. Дальнейшее рассмотрение приводит к следующему утверждению.

Теорема 2. *Векторные аддитивные схемы декомпозиции области (9), (13), (24) и (9), (13), (25) при $\sigma\geq p/2$ сходятся безусловно, а для погрешности верна оценка*

$$\|A\bar z^{n+1}\|_D\leq M_1(\tau+|h|^2+M_2\tau\max_\alpha\|A\chi_\alpha\|), \tag{28}$$

где $D=A$ для схемы (9), (13), (24) и $D=A^{-1}$ для схемы (9), (13), (25).

Сравнивая (23) с (28) видим, что использование различных операторов декомпозиции позволяет получить схемы, сходящиеся в различных нормах.

5. Схемы второго порядка по времени. В силу сильной зависимости точности рассмотренных выше векторных схем первого порядка по времени от декомпозиции области имеет смысл обратиться к схемам второго порядка по времени. Ограничимся исследованием простейших трехслойных схем.

Для задачи (11), (12) с определением операторов декомпозиции, согласно (9), (10), будем использовать схему

$$\frac{y_\alpha^{n+1}-y_\alpha^{n-1}}{2\tau}+\sigma\tau^2A_\alpha\frac{y_\alpha^{n+1}-2y_\alpha^n+y_\alpha^{n-1}}{\tau^2}+\sum_{\beta=1}^{p}A_\beta y_\beta^n=0,\quad \alpha=1,2,\ldots,p. \tag{29}$$

Схема (9), (10), (29) безусловно устойчива при $\sigma \geq p/4$.

Сформулируем соответствующую задачу для погрешности. Имеем

$$\frac{z_\alpha^{n+1} - z_\alpha^{n-1}}{2\tau} + \sigma\tau^2 A_\alpha \frac{z_\alpha^{n+1} - 2z_\alpha^n + z_\alpha^{n-1}}{\tau^2} + \sum_{\beta=1}^{p} A_\beta z_\beta^n = \psi_\alpha^n, \quad \alpha = 1, 2, \ldots, p, \tag{30}$$

где теперь $\psi_\alpha^n = (u^{n+1} - u^{n-1})/(2\tau) + \sigma\tau^2 A_\alpha (u^{n+1} - 2u^n + u^{n-1})/\tau^2 + Au^n$, $\alpha = 1, 2, \ldots$. Аналогично (17) получим

$$\psi_\alpha^n = \sigma\tau^2 A_\alpha \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + O(\tau^2 + |h|^2), \quad \alpha = 1, 2, \ldots, p, \tag{31}$$

т. е. исходная задача аппроксимируется со вторым порядком по времени.

Для получения априорной оценки перепишем (30) в более удобных обозначениях. Положим $v_\alpha^{n+1} = z_\alpha^{n+1} + z_\alpha^n$, $w_\alpha^{n+1} = z_\alpha^{n+1} - z_\alpha^n$, так что $w_\alpha^{n+1} + w_\alpha^n = v_\alpha^{n+1} - v_\alpha^n$. В новых обозначениях

$$\frac{w_\alpha^{n+1} + w_\alpha^n}{2\tau} + \sigma A_\alpha (w_\alpha^{n+1} - w_\alpha^n) + \frac{1}{4}\sum_{\beta=1}^{p} A_\beta (v_\beta^{n+1} + v_\beta^n - (w_\beta^{n+1} - w_\beta^n)) = \psi_\alpha^n, \quad \alpha = 1, 2, \ldots, p.$$

Домножим при каждом $\alpha = 1, 2, \ldots, p$ уравнение скалярно на $A_\alpha(w_\alpha^{n+1} + w_\alpha^n) = A_\alpha(v_\alpha^{n+1} - v_\alpha^n)$ и сложим их:

$$\frac{1}{2\tau}\sum_{\alpha=1}^{p}(A_\alpha(w_\alpha^{n+1} + w_\alpha^n), w_\alpha^{n+1} + w_\alpha^n) + \sigma\sum_{\alpha=1}^{p}(\|A_\alpha w_\alpha^{n+1}\|^2 - \|A_\alpha w_\alpha^n\|^2) -$$

$$-\frac{1}{4}\Big(\|\sum_{\alpha=1}^{p} A_\alpha w_\alpha^{n+1}\|^2 - \|\sum_{\alpha=1}^{p} A_\alpha w_\alpha^n\|^2\Big) + \frac{1}{4}\Big(\|\sum_{\alpha=1}^{p} A_\alpha v_\alpha^{n+1}\|^2 - \|\sum_{\alpha=1}^{p} A_\alpha v_\alpha^n\|^2) = \sum_{\alpha=1}^{p}(\psi_\alpha^n, A_\alpha(w_\alpha^{n+1} + w_\alpha^n)).$$

Принимая во внимание, что

$$\sum_{\alpha=1}^{p}(\psi_\alpha^n, A_\alpha(w_\alpha^{n+1} + w_\alpha^n)) \leq \frac{1}{2\tau}\sum_{\alpha=1}^{p}(A_\alpha(w_\alpha^{n+1} + w_\alpha^n), w_\alpha^{n+1} + w_\alpha^n) + \frac{\tau}{2}\sum_{\alpha=1}^{p}(A_\alpha\psi_\alpha^n, \psi_\alpha^n),$$

приходим к неравенству

$$\mathcal{E}^{n+1} \leq \mathcal{E}^n + \frac{\tau}{2}\sum_{\alpha=1}^{p}(A_\alpha\psi_\alpha^n, \psi_\alpha^n), \tag{32}$$

где

$$\mathcal{E}^n = \frac{1}{4}\|\sum_{\alpha=1}^{p} A_\alpha v_\alpha^n\|^2 + \sigma\sum_{\alpha=1}^{p}\|A_\alpha w_\alpha^n\|^2 - \frac{1}{4}\|\sum_{\alpha=1}^{p} A_\alpha w_\alpha^n\|^2.$$

С учетом $\|\sum_{\alpha=1}^{p} A_\alpha w_\alpha^n\|^2 \leq p\sum_{\alpha=1}^{p}\|A_\alpha w_\alpha^n\|^2$ получим

$$\mathcal{E}^n \geq \frac{1}{4}\|\sum_{\alpha=1}^{p} A_\alpha v_\alpha^n\|^2 \tag{33}$$

при $\sigma \geq p/4$.

На основе (32), (33) и выражения для погрешности аппроксимации (31) при соответствующем определении y_α^1 [17] получим искомую оценку для погрешности. А именно справедлива

Теорема 3. *Векторная аддитивная схема декомпозиции области (9), (10), (29) при $\sigma \geq p/4$ сходится безусловно, а для погрешности верна оценка*

$$\|A(\bar{z}^{n+1} + \bar{z}^n)\| \leq M_1(\tau^2 + |h|^2 + M_2\tau^2 \max_\alpha \|A\chi_\alpha\|). \tag{34}$$

Таким образом, построенная регионально-аддитивная схема второго порядка по времени при использовании декомпозиции без наложения подобластей имеет для точности оценку типа

$O(\tau^2|h|^{-3/2}+|h|^2)$. Такие схемы декомпозиции уже могут быть рекомендованы для практического использования.

Замечание. Аналогично рассматриваются регионально-аддитивные схемы второго порядка по времени с операторами декомпозиции (24), (25). Подобно теореме 2 сходимость устанавливается в H_D, $D = A$ и $D = A^{-1}$ соответственно.

6. Обобщения. Среди возможных продолжений данной работы отметим наиболее принципиальные. Прежде всего это относится к рассмотрению задач типа (5), (6) с несамосопряженным оператором A. В этом случае операторы декомпозиции строятся на основе рассмотрения самосопряженной и кососимметричной части оператора A.

Отдельного внимания заслуживают схемы декомпозиции области для эволюционных уравнений второго порядка. Основой такого рассмотрения является теория трехслойных векторных аддитивных разностных схем.

Авторы выражают искреннюю благодарность В. Н. Абрашину за полезные обсуждения проблем использования векторных аддитивных схем.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 93 — 012 — 801).

Литература

1. Domain Decomposition Methods in Science and Engineering/ Eds. A. Quarteroni, J. Periaux, Yu. Kuznetsov and O. B. Widlund. Providence, 1994.
2. *Агошков В. И.* // Вычислительные процессы и системы /Под ред. Г. И. Марчука. М., 1991. Вып. 8. С. 4 — 51.
3. *Quarteroni A.* // Surveys on Mathematics for Industry. 1991. Vol. 1, N 1. P. 75 — 118.
4. *Tallec P. Le* // Computational Mechanics Advances. 1994. Vol. 1, N 2. P. 121 — 220.
5. *Лаевский Ю. М.* //Вариационно-разностные методы в задачах численного анализа. Новосибирск, 1987. С. 112 — 128.
6. *Вабищевич П. Н.* // Вестн. МГУ. Сер. 15. Вычислительная математика и кибернетика. 1989. № 3. С. 61 — 63.
7. *Вабищевич П. Н.* // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 1989. Т. 29, № 12. С. 1822 — 1829.
8. *Laevsky Yu. M.* // Sov. J. of Numer. Anal. and Math. Model. 1990. Vol. 5, N 2. P. 244 — 249.
9. *Druja M.* // Proc. IV Intern. Simp. on Domain Decomposition Methods for Partial Differential Equations. Philadelphia, 1990. P. 264 — 271.
10. *Лаевский Ю. М.* // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 1992. Т. 32, № 11. С. 1744 — 1755.
11. *Vabishchevich P. N.* // Advances in Numerical Methods and Applications. Singapore, 1994. P. 293 — 299.
12. *Вабищевич П. Н., Вераховский В. А.* // Вестн. МГУ. Сер. 15. Вычислительная математики и кибернетика. 1994. № 3. С. 17 — 22.
13. *Вабищевич П. Н.* // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 1994. Т. 34, № 12. С. 1832 — 1842.
14. *Абрашин В. Н.* // Дифференц. уравнения. 1990. Т. 26, № 2. С. 314 — 323.
15. *Абрашин В. Н., Муха В. А.* // Дифференц. уравнения. 1992. Т. 28, № 10. С. 1786 — 1799.
16. *Вабищевич П. Н.* // Изв. вузов. Математика. 1994. № 9. С. 11 — 15.
17. *Самарский А. А.* Теория разностных схем. М., 1989.
18. *Самарский А. А., Гулин А. В.* Устойчивость разностных схем. М., 1973.

Институт математического моделирования РАН

Поступила в редакцию 29 мая 1995 г.