ЖУРНАЛ
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Том 35, 1995 № 7

ПОСВЯЩАЕТСЯ ПАМЯТИ А. А. ДОРОДНИЦЫНА

УДК 519.6:517.958

© 1995 г. П. Н. ВАБИЩЕВИЧ, А. А. САМАРСКИЙ

(*Москва*)

УСТОЙЧИВОСТЬ ПРОЕКЦИОННО-РАЗНОСТНЫХ СХЕМ ДЛЯ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ[1)]

При численном решении нестационарных задач математической физики важнейшей является проблема устойчивости приближенного решения по начальным данным и правой части. В настоящее время получены основные результаты об устойчивости разностных схем. Развивается общая теория устойчивости проекционно-разностных схем (схем конечных элементов) для приближенного решения линейных нестационарных задач. Установлены условия устойчивости схем, записанных в канонической форме, по начальным данным в виде неравенств для соответствующих билинейных форм. Получены условия устойчивости двухслойных схем метода конечных элементов с весами по начальным данным.

В настоящее время основные успехи использования проекционных методов приближенного решения краевых задач связываются с методом конечных элементов. При рассмотрении нестационарных задач применяется подход с конечно-элементной аппроксимацией по пространственным переменным и разностными аппроксимациями по времени. Такие комбинированные методы порождают проекционно-разностные схемы, которые и рассматриваются в данной работе.

Проблемы использования метода конечных элементов для нестационарных задач математической физики отражены в книгах [1]—[3]. Подробное изложение теоретических аспектов содержится в книге [4]. При обосновании схем конечных элементов большое внимание уделяется получению априорных оценок устойчивости приближенного решения по начальным данным и правой части. Принципиальный момент связан с изучением зависимости от параметров дискретизации по временной и пространственным переменным. Такие оценки устойчивости являются базовыми при исследовании сходимости приближенного решения к точному.

В настоящее время оценки устойчивости проекционно-разностных схем получают для каждой конкретной схемы отдельно и самостоятельно. Аналогичная ситуация имела место и в теории разностных схем до создания общей теории устойчивости операторно-разностных схем [5]—[7], когда удалось получить общие необходимые и достаточные условия устойчивости двух- и трехслойных разностных схем, которые рассматриваются в сеточных гильбертовых пространствах. Разностная схема записывается в единой канонической форме, а необходимые и достаточные условия формулируются в виде операторных

[1)] Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 93-012-801)

неравенств. На этой теоретической основе удается проанализировать основные классы разностных схем для типовых задач математической физики. В этом случае исследование конкретной схемы сводится к необходимости ее записи в канонической форме и проверке выполнения общих условий устойчивости.

Естественным является желание построить аналогичную теорию устойчивости и для проекционно-разностных схем, которая, как и следовало ожидать, имеет тесную связь с теорией устойчивости операторно-разностных схем. Необходимо сразу же отметить две имеющиеся возможности развития исследований в этом направлении. Первая возможность связана с рассмотрением соответствующих разностных схем для коэффициентов разложения приближенного решения по соответствующему конечно-элементному базису. Здесь можно ограничиться операторной записью схемы для коэффициентов в гильбертовом пространстве векторов с обычной евклидовой нормой. В этом случае можно использовать имеющиеся результаты об устойчивости разностных схем.

Вторая возможность построения общей теории устойчивости более точно учитывает специфику проекционно-разностных схем и базируется на рассмотрении исходных схем конечных элементов в проекционной формулировке. Основные результаты удается получить без явного рассмотрения матричных задач для коэффициентов конечно-элементного разложения, а лишь с привлечением свойств билинейных форм.

В данной работе строится теория устойчивости двухслойных схем конечных элементов. Для проекционно-разностных схем, записанных в канонической форме, получены достаточные условия устойчивости по начальным данным. Приведены также априорные оценки устойчивости по правой части. Совпадающие необходимые и достаточные условия получены для схем с симметричными билинейными формами. В качестве примера рассматривается двухслойная схема с весами.

§ 1. Устойчивость схем конечных элементов

Теория устойчивости операторно-разностных схем [8], [9] строится на общих методологических принципах. Тот же подход реализуется и при рассмотрении схем конечных элементов. Основные принципы формулируются следующим образом:

1) проекционно-разностная схема рассматривается как самостоятельный объект исследования, формально не зависящий от исходной дифференциальной задачи;

2) используется унифицированная (каноническая) форма записи схем, рассматриваемых в подпространстве конечных элементов;

3) условия устойчивости формулируются в виде неравенств для соответствующих билинейных форм.

На основе этих принципов можно ориентироваться на получение общих и достаточно простых условий, которые позволяют проводить исследование устойчивости проекционно-разностных схем по единой схеме. Это дает возможность классифицировать известные схемы, достаточно просто получить условия устойчивости новых схем, т. е. избавит от необходимости каждый раз получать искомую априорную оценку устойчивости, воспользовавшись общими результатами.

1. Каноническая форма двухслойных схем. Проекционно-разностные схемы естественно рассматривать в обобщенной формулировке, и при их записи удобно ограничиваться использованием билинейных форм, не переходя к операторным формулировкам. В этом проявляется их главное методологическое отличие от разностных схем, которые ориентированы на использование операторных (матричных) формулировок.

При рассмотрении нестационарных задач схемы конечных элементов строятся на основе простейших разностных аппроксимаций по времени. Пусть $t = t_n = n\tau$, $n = 0, 1, \ldots,$ где $\tau > 0$ — шаг по времени. Для величин на временно́м слое t_n будем использовать нижний индекс n.

Будем считать, что ищется приближенное решение некоторой начально-краевой задачи в области Ω с границей $\partial\Omega$, и пусть $(\cdot, \cdot)$, $\|\cdot\|$ — скалярное произведение и норма в $L_2(\Omega)$, т. е.

$$(u, v) = \int_\Omega u(x)\, v(x)\, dx, \qquad \|u\| = (u, u)^{1/2}.$$

С симметричной билинейной положительно-определенной формой $d(u, v)$, для которой

$$d(u, v) = d(v, u), \qquad d(u, u) \geq \delta\, \|u\|^2, \quad \delta > 0, \quad \forall\, u, v,$$

свяжем гильбертово пространство $\mathcal{H}_d$ со скалярным произведением и нормой

$$(u, v)_d = d(u, v), \qquad \|u\|_d = [d(u, u)]^{1/2}.$$

Обозначим через $\mathcal{V}^h$ пространство конечных элементов. Приближенное решение на момент времени $t = t_n$ обозначим через y_n, $y_n \in \mathcal{V}^h$. Двухслойная схема характеризуется тем, что решение на новом временно́м слое $n + 1$ определяется по решению на предыдущем, т. е. в схеме участвуют y_n и y_{n+1}. По аналогии с разностными схемами [8], [9] двухслойные схемы конечных элементов будем записывать в виде

$$(1.1) \qquad b_n\left(\frac{y_{n+1} - y_n}{\tau}, v\right) + a_n(y_n, v) = (f_n, v) \qquad \forall\, v \in \mathcal{V}^h, \quad n = 0, 1, \ldots,$$

где $b_n(\cdot, \cdot)$, $a_n(\cdot, \cdot)$ — некоторые билинейные формы. Необходимо из (1.1) найти приближенное решение y_n, $n = 1, 2, \ldots,$ при условии, что y_0 известно. Начальное условие для схемы (1.1) находится согласно

$$(y_0, v) = (u_0, v) \qquad \forall\, v \in \mathcal{V}^h,$$

где функция $u_0(x) \in \nu$ определяет начальное условие для точного решения исходной задачи.

Любая двухслойная схема конечных элементов записывается в виде (1.1), который будем называть канонической формой двухслойной проекционно-разностной схемы.

2. Устойчивость проекционно-разностных схем. Естественно разделять устойчивость схем конечных элементов по начальным данным

и по правой части. Вначале рассмотрим однородные двухслойные схемы ($f_n = 0$ в (1.1)), т. е.

$$(1.2) \qquad b_n\left(\frac{y_{n+1} - y_n}{\tau}, v\right) + a_n(y_n, v) = 0 \qquad \forall\, v \in \mathcal{V}^h, \quad n = 0, 1, \ldots,$$

при заданном $y_0 \in \mathcal{V}^h$.

Проекционно-разностную схему (1.2) будем называть устойчивой по начальным данным в пространстве $\mathcal{H}_d$, если при любом $y_0 \in \mathcal{V}_d^h$ приближенное решение удовлетворяет оценке

$$(1.3) \qquad \|y_{n+1}\|_d \le \|y_n\|_d.$$

Условие устойчивости (1.3) не всегда оправдано, например в случае, когда для точного решения исходной дифференциальной задачи норма решения растет или уменьшается соответствующим образом. Такая ситуация типична для некорректных эволюционных задач, когда норма решения растет и регуляризация направлена на то, чтобы контролировать этот рост [10]. Естественно стремиться, чтобы и приближенное решение передавало такое поведение точного решения. С этой целью вместо (1.3) используется более общее понятие ρ-устойчивости схемы [8], [9].

Назовем проекционно-разностную схему (1.2) ρ-устойчивой, если для нормы приближенного решения выполнено условие

$$(1.4) \qquad \|y_{n+1}\|_d \le \rho\, \|y_n\|_d,$$

где $\rho > 0$ и ρ^n ограничено равномерно по τ.

Для конкретизации выбора $\rho > 1$ обычно используют два представления:

$$\rho = \exp(c\,\tau), \qquad \rho = 1 + c\tau,$$

где положительная постоянная c не зависит от τ. При таких ρ из (1.4) следует оценка устойчивости разностного решения по начальным данным вида

$$(1.5) \qquad \|y_{n+1}\|_d \le \exp(ct_{n+1})\, \|y_0\|_d.$$

При $0 < \rho < 1$ оценка (1.5) будет иметь место при $\rho = \exp(c\tau)$ и с отрицательной постоянной c.

§ 2. Условия устойчивости схем конечных элементов

В теории устойчивости операторно-разностных схем [8], [9] получены точные (совпадающие необходимые и достаточные) условия устойчивости. Они будут служить естественным ориентиром при получении условий устойчивости проекционно-разностных схем. Фактически речь идет о прямом перенесении результатов об устойчивости разностных схем на класс схем конечных элементов.

Необходимо специально отметить, что адекватный математический аппарат теории устойчивости операторно-разностных схем связан с операторными формулировками в соответствующих конечномерных гильбертовых пространствах: разностная схема записывается как операторное уравнение, условия устойчивости формулируются в виде операторных неравенств и т. д. Для проекционно-

разностных схем при исследовании вопросов точности приближенного решения естественно ограничиться рассмотрением соответствующих билинейных форм. В то же самое время реализация проекционно-разностных схем связана с переходом к операторным формулировкам (матричным задачам). Это нашло отражение, в частности, в выборе канонической формы проекционно-разностных схем в виде (1.1).

1. Условия устойчивости в $\mathcal{H}_a$. Ограничимся для простоты случаем, когда в схеме (1.2) билинейные формы $b_n(\cdot, \cdot)$ и $a_n(\cdot, \cdot)$ постоянны, т. е. не зависят от n:

$$b\left(\frac{y_{n+1} - y_n}{\tau}, v\right) + a(y_n, v) = 0 \qquad \forall v \in \mathcal{V}^h, \quad n = 0, 1, \ldots. \tag{2.1}$$

Начнем с получения энергетического тождества для схемы (2.1). Будем использовать безындексные обозначения, когда

$$y = y_n, \qquad \hat{y} = y_{n+1}, \qquad y_t = (\hat{y} - y)/\tau.$$

Лемма 1. *Пусть в проекционно-разностной схеме* (2.1) *билинейная форма* $a(\cdot, \cdot)$ *симметрична. Тогда имеет место тождество*

$$2\tau\left(b(y_t, y_t) - \frac{\tau}{2} a(y_t, y_t)\right) + a(\hat{y}, \hat{y}) - a(y, y) = 0. \tag{2.2}$$

С учетом введенных обозначений и того, что

$$y = \frac{\hat{y} + y}{2} - \frac{\tau}{2} y_t,$$

перепишем (2.1) в виде

$$b(y_t, v) - \frac{\tau}{2} a(y_t, v) + a\left(\frac{\hat{y} + y}{2}, v\right) = 0 \qquad \forall v \in \mathcal{V}^h. \tag{2.3}$$

Выбирая $v = 2\tau y_t = 2(\hat{y} - y)$ и учитывая симметричность билинейной формы $a(\cdot, \cdot)$, из (2.3) непосредственно получаем тождество (2.2). Аналогичное тождество имеет место и в более общем случае переменных (зависящих от n) билинейных форм.

Основной результат об устойчивости проекционно-разностной схемы (2.1) в $\mathcal{H}_a$ формулируется в виде следующего утверждения.

Теорема 1. *Пусть в схеме* (2.1) *билинейная форма* $a(\cdot, \cdot)$ *симметрична и положительно определена. Тогда условие*

$$b(v, v) \geq \frac{\tau}{2} a(v, v) \qquad \forall v \in \mathcal{V}^h \tag{2.4}$$

является необходимым и достаточным для выполнения априорной оценки

$$a(y_{n+1}, y_{n+1}) \leq a(y_n, y_n), \tag{2.5}$$

т. е. проекционно-разностная схема (2.1) *устойчива в* $\mathcal{H}_a$.

Доказательство базируется на использовании тождества (2.2). При выполнении условий (2.4) из тождества (2.2) получим оценку (2.5), тем самым условия (2.4) достаточны.

При доказательстве необходимости исходим из того, что имеет место оценка (2.5), в частности и при $n = 0$. В силу тождества (2.2) имеем

$$b(y_t, y_t) - \frac{\tau}{2} a(y_t, y_t) \geq 0, \qquad n = 0. \tag{2.6}$$

Любую функцию v из $\mathcal{V}^h$ можно представить как $(y_1 - y_0)/\tau$, выбирая соответствующее начальное условие $y_0 \in \mathcal{V}^h$. Поэтому из (2.6) следует (2.4). Тем самым условие (2.4) является необходимым для устойчивости схемы (2.1) в $\mathcal{H}_a$.

2. Устойчивость в $\mathcal{H}_b$. Полученные условия обеспечивают устойчивость проекционно-разностных схем и в других нормах. В качестве характерного примера отметим устойчивость в $\mathcal{H}_b$ схемы (2.1) при дополнительном предположении о симметричности билинейной формы $b(\cdot, \cdot)$, а именно: справедлива

Теорема 2. *Пусть в схеме* (2.1) *билинейные формы* $b(\cdot, \cdot)$ *и* $a(\cdot, \cdot)$ *симметричны и положительно определены. Тогда при выполнении неравенства* (2.4) *верна оценка*

$$b(y_{n+1}, y_{n+1}) \leq b(y_n, y_n), \tag{2.7}$$

т. е. проекционно-разностная схема (2.1) *устойчива в* $\mathcal{H}_b$.

Доказательство базируется на использовании второго основного энергетического тождества для схемы (2.1).

Лемма 2. *Пусть в проекционно-разностной схеме* (2.1) *билинейные формы* $b(\cdot, \cdot)$ *и* $a(\cdot, \cdot)$ *симметричны. Тогда имеет место тождество*

$$\tau^2 \left(b(y_t, y_t) - \frac{\tau}{2} a(y_t, y_t) \right) + b(\hat{y}, \hat{y}) - b(y, y) + \frac{\tau}{2} a(\hat{y} + y, \hat{y} + y) = 0. \tag{2.8}$$

Для доказательства (2.8) положим в (2.1)

$$v = 2\tau\hat{y} = \tau^2 y_t + \tau(\hat{y} + y).$$

Имеем с учетом симметричности билинейной формы $b(\cdot, \cdot)$

$$b(y_t, v) = \tau^2 b(y_t, y_t) + b(\hat{y}, \hat{y}) - b(y, y).$$

Аналогично,

$$a(y, v) = a\left(\frac{\hat{y} + y}{2} - \frac{\tau}{2} y_t, \tau(\hat{y} + y) + \tau^2 y_t \right) =$$

$$= \frac{\tau}{2} a(\hat{y} + y, \hat{y} + y) - \frac{\tau^3}{2} a(y_t, y_t).$$

Подстановка в (2.1) этих выражений приводит нас к доказываемому тождеству (2.8).

В условиях теоремы из (2.8) непосредственно следует оценка устойчивости (2.7) схемы (2.1) в $\mathcal{H}_b$.

§ 3. Условия ρ-устойчивости проекционно-разностных схем

Специального внимания заслуживают условия ρ-устойчивости проекционно-разностных схем, которые позволяют существенно расширить класс исследуемых схем. Отдельно рассмотрим устойчивость проекционно-разностных схем с $\rho > 1$ (рост нормы приближенного решения со временем) и схемы с $0 < \rho < 1$ (убывание нормы). Как и при доказательстве теоремы 2, в дальнейшем ограничимся формулированием лишь достаточных условий устойчивости.

1. Устойчивость схем с $\rho > 1$. Для схем с $\rho > 1$ исследование проводится без предположения о симметричности билинейной формы $b(\cdot, \cdot)$.

Теорема 3. *Пусть в схеме* (2.1) *билинейная форма* $a(\cdot, \cdot)$ *симметрична и положительно определена. Тогда при*

$$b(v, v) \geq \frac{\tau}{1+\rho} a(v, v) \qquad \forall v \in \mathcal{V}^h, \tag{3.1}$$

где $\rho > 1$, *имеет место априорная оценка*

$$a(y_{n+1}, y_{n+1}) \leq \rho^2 a(y_n, y_n) \tag{3.2}$$

и тем самым проекционно-разностная схема (2.1) *ρ-устойчива в* $\mathcal{H}_a$.

Будем исходить из энергетического тождества (2.2). Добавим и вычтем выражение $2\tau^2 (1+\rho)^{-1} a(y_t, y_t)$, что позволит переписать (2.2) в виде

$$2\tau \left[b(y_t, y_t) - \frac{\tau}{1+\rho} a(y_t, y_t)\right] + a(\hat{y}, \hat{y}) - a(y, y) - \frac{\rho - 1}{\rho + 1} \tau^2 a(y_t, y_t) = 0.$$

Принимая во внимание (3.1), отсюда получаем неравенство

$$(\rho + 1) a(\hat{y}, \hat{y}) - (\rho + 1) a(y, y) - (\rho - 1) a(\hat{y} - y, \hat{y} - y) \leq 0.$$

С учетом симметричности билинейной формы $a(\cdot, \cdot)$ получим

$$a(\hat{y}, \hat{y}) - \rho a(y, y) + (\rho - 1) a(\hat{y}, y) \leq 0.$$

Принимая во внимание

$$|a(\hat{y}, y)| \leq [a(\hat{y}, \hat{y}) a(y, y)]^{1/2},$$

приходим к неравенству

$$a(\hat{y}, \hat{y}) - \rho a(y, y) - (\rho - 1) [a(\hat{y}, \hat{y}) a(y, y)]^{1/2} \leq 0.$$

Оно справедливо при $a(\hat{y}, \hat{y}) \leq \rho^2 a(y, y)$, т. е. при выполнении оценки ρ-устойчивости (3.2) схемы (2.1) в $\mathcal{H}_a$. Теорема 3 доказана.

2. Устойчивость проекционно-разностных схем с произвольным $\rho > 0$. В более общем случае ρ-устойчивость схем с произвольным $\rho > 0$ устанавливается при предположении о симметричности билинейных форм $b(\cdot, \cdot)$ и $a(\cdot, \cdot)$, а именно: справедлива

Теорема 4. *Пусть в схеме* (2.1) *билинейные формы* $b(\cdot, \cdot)$ *и* $a(\cdot, \cdot)$ *симметричны и* $b(\cdot, \cdot)$ *положительно определена. Если при* $\rho > 0$ *выполнено двухстороннее неравенство*

$$\frac{1-\rho}{\tau} b(v, v) \leq a(v, v) \leq \frac{1+\rho}{\tau} b(v, v) \qquad \forall v \in \mathcal{V}^h, \tag{3.3}$$

то проекционно-разностная схема (2.1) ρ-*устойчива в* $\mathcal{H}_b$, *т. е. для решения выполнена оценка*

$$b(y_{n+1}, y_{n+1}) \le \rho^2 b(y_n, y_n). \tag{3.4}$$

При использовании обозначений $y_n = \rho^n w_n$ доказываемое неравенство (3.4) эквивалентно неравенству

$$b(w_{n+1}, w_{n+1}) \le b(w_n, w_n), \tag{3.5}$$

т. е. достаточно доказать обычную ($\rho = 1$) устойчивость для приближенного решения $w_n \in \mathcal{V}^h$, $n = 0, 1, \ldots$.

Проекционно-разностная схема (2.1) переписывается в виде

$$b\left(\frac{w_{n+1} - w_n}{\tau}, v\right) + \tilde{a}(w_n, v) = 0 \qquad \forall\, v \in \mathcal{V}^h, \quad n = 0, 1, \ldots, \tag{3.6}$$

где симметричная билинейная форма

$$\tilde{a}(w, v) = \frac{1}{\rho} a(w, v) + \frac{\rho - 1}{\rho\tau} b(w, v).$$

Условия устойчивости схемы (3.6) рассмотрены ранее (см. теорему 2). Оценка (3.5) будет иметь место при

$$\tilde{a}(v, v) \ge 0 \qquad \forall\, v \in \mathcal{V}^h, \tag{3.7}$$

$$b(v, v) \ge \frac{\tau}{2} \tilde{a}(v, v) \qquad \forall\, v \in \mathcal{V}^h. \tag{3.8}$$

Неравенство (3.7) есть не что иное, как первое из неравенств (3.3), а (3.8) — второе. Из справедливости (3.5) следует выполнение искомой оценки (3.4) ρ-устойчивости схемы (2.1) в $\mathcal{H}_b$.

Специально подчеркнем, что в условиях теоремы положительная определенность формы $a(\cdot, \cdot)$ не предполагается. Это дает возможность [10] рассмотреть ρ-устойчивость схем для условно корректных эволюционных задач.

§ 4. Схемы с весами

В качестве характерного примера проекционно-разностных схем можно отметить двухслойные схемы с весами. Сформулируем условия их устойчивости в виде соответствующих неравенств для билинейных форм.

1. Схемы с симметричной формой $a(\cdot, \cdot)$. Исследуется проекционно-разностная схема

$$b\left(\frac{y_{n+1} - y_n}{\tau}, v\right) + a(\sigma y_{n+1} + (1 - \sigma) y_n, v) = 0 \tag{4.1}$$

$$\forall\, v \in \mathcal{V}^h, \quad n = 0, 1, \ldots,$$

где σ — числовой параметр (вес). При $\sigma = 0$ схема (4.1) есть явная схема, $\sigma = 1$ — чисто неявная, $\sigma = 0.5$ — симметричная (Кранка — Николсона) схема. Будем вначале рассматривать случай, когда билинейная форма $a(\cdot, \cdot)$ симметрична. На основе теоремы 1 приходим к следующему результату.

Теорема 5. *Пусть в схеме с весами* (4.1) *билинейная форма* $a(\cdot, \cdot)$ *симметрична и положительно определена. Тогда условие*

$$b(v, v) + (\sigma - 1/2)\,\tau a(v, v) \geq 0 \qquad \forall\, v \in \mathcal{V}^h \tag{4.2}$$

является необходимым и достаточным для устойчивости схемы (4.1) *в* $\mathcal{H}_a$.

Для доказательства этого утверждения запишем схему с весами (4.1) в каноническом виде:

$$\tilde{b}\left(\frac{y_{n+1} - y_n}{\tau}, v\right) + \tilde{a}(y_n, v) = 0 \qquad \forall\, v \in \mathcal{V}^h, \quad n = 0, 1, \ldots, \tag{4.3}$$

с

$$\tilde{b}(w, v) = b(w, v) + \sigma\tau a(w, v), \qquad \tilde{a}(w, v) = a(w, v), \qquad w, v \in \mathcal{V}^h.$$

Необходимое и достаточное условие устойчивости схемы (4.3)

$$\tilde{b}(v, v) \geq \frac{\tau}{2}\,\tilde{a}(v, v) \qquad \forall\, v \in \mathcal{V}^h$$

приводит к условию (4.2).

Из (4.2) вытекает, что при $b(v, v) \geq 0$ для устойчивости схемы (4.1) достаточно выполнить условия $\sigma \geq 0.5$. При выполнении неравенства

$$a(v, v) \leq \Delta b(v, v) \qquad \forall\, v \in \mathcal{V}^h$$

устойчивость имеет место в случае $\sigma < 0.5$ при следующих ограничениях на шаг по времени:

$$\tau \leq 2\Delta/(1 - 2\sigma).$$

Типичной является ситуация с $\Delta = \Delta(h)$, где h — параметр конечно-элементного разбиения, т. е. в этом случае речь идет об условной устойчивости схем с весами.

2. Схемы с симметричной формой $b(\cdot, \cdot)$. Для математического моделирования обычна ситуация, когда используется схема с весами (4.1), в которой билинейная форма $a(\cdot, \cdot)$ несимметрична, но зато симметрична билинейная форма $b(\cdot, \cdot)$. Здесь уже не удается напрямую использовать сформулированные выше результаты об устойчивости двухслойных проекционно-разностных схем.

Теорема 6. *Пусть в схеме с весами* (4.1) *будет* $a(v, v) \geq 0$, *а билинейная форма* $b(\cdot, \cdot)$ *симметрична и положительно определена. Тогда условия* $\sigma \geq 0.5$ *достаточно для устойчивости схемы с весами* (4.1) *в* $\mathcal{H}_b$.

Положим в схеме (4.1)

$$v = \sigma\hat{y} + (1 - \sigma)\,y = (\sigma - 1/2)\,\tau y_t + (\hat{y} + y)/2$$

и получим

$$(\sigma - 1/2)\,\tau b(y_t, y_t) + (2\tau)^{-1}\,[b(\hat{y}, \hat{y}) - b(y, y)] + a(v, v) = 0.$$

Из этого равенства в условиях теоремы следует устойчивость схемы (4.1) в $\mathcal{H}_b$.

Отметим, что для операторно-разностных схем (см., например, [9]) устойчивость схем с весами устанавливается и в некоторых других, более сложных нормах, которые трудно получить при рассмотрении проекционно-разностной схемы.

§ 5. Устойчивость по правой части

Выше рассматривалась устойчивость схем конечных элементов по начальным данным (однородная схема (2.1)). Приведем характерные оценки устойчивости двухслойных проекционно-разностных схем по правой части. Снова ориентиром служат известные оценки теории устойчивости операторно-разностных схем [8], [9]. Ограничимся типовыми примерами простейших оценок устойчивости приближенного решения по правой части и начальным данным.

1. Устойчивость в $\mathcal{H}_a$. Будем рассматривать проекционно-разностную схему с неоднородной правой частью:

$$b\left(\frac{y_{n+1}-y_n}{\tau}, v\right) + a(y_n, v) = (f_n, v) \qquad \forall\, v \in \mathcal{V}^h, \quad n = 0, 1, \ldots. \tag{5.1}$$

Отдельно выделим случай симметричной положительно-определенной формы $a(\cdot, \cdot)$.

Теорема 7. *Пусть в схеме* (5.1) *билинейная форма* $a(\cdot, \cdot)$ *симметрична и положительно определена. Если выполнено условие*

$$b(v, v) \geq \varepsilon(v, v) + \frac{\tau}{2} a(v, v) \qquad \forall\, v \in \mathcal{V}^h, \tag{5.2}$$

где ε *— любое положительное число, то для решения имеет место априорная оценка*

$$a(y_{n+1}, y_{n+1}) \leq a(y_0, y_0) + \frac{1}{2\varepsilon}\sum_{k=0}^{n} \tau \|f_k\|^2. \tag{5.3}$$

Схему (5.1) перепишем в виде

$$b(y_t, v) - \frac{\tau}{2} a(y_t, v) + a\left(\frac{\hat{y}+y}{2}, v\right) = (f_n, v) \qquad \forall\, v \in \mathcal{V}^h$$

и положим $v = 2\tau y_t = 2(\hat{y} - y)$. Принимая во внимание неравенство

$$2\tau(f_n, y_t) \leq 2\tau\varepsilon \|y_t\|^2 + \frac{\tau}{2\varepsilon}\|f_n\|^2$$

и условие (5.2), получаем

$$a(y_{n+1}, y_{n+1}) \leq a(y_n, y_n) + \frac{\tau}{2\varepsilon}\|f_n\|^2.$$

Из этого неравенства следует доказываемая оценка (5.3).

Заметим, что оценка устойчивости по правой части получена в несколько более жестких предположениях (ср. (5.2) с необходимыми и достаточными условиями (2.4)), чем устойчивость по начальным данным.

2. Оценка устойчивости в $\mathcal{H}_b$. Приведем аналог теоремы 2 для неоднородной схемы (5.1). Правая часть будет оцениваться в норме сопряженного к $\mathcal{H}_a$ пространства с использованием обозначений

$$\|v\|_{*,a} = \sup_{\|u\|_a=1} |(u, v)|.$$

Теорема 8. *Пусть в схеме* (5.1) *билинейные формы* $b(\cdot, \cdot)$ *и* $a(\cdot, \cdot)$ *симметричны и положительно определены. Если выполнено условие*

$$b(v, v) \geq \frac{\tau}{2}(1+\varepsilon)\, a(v, v) \qquad \forall\, v \in \mathcal{V}^h \tag{5.4}$$

с $\varepsilon > 0$, *то для решения справедлива априорная оценка*

$$b(y_{n+1}, y_{n+1}) \leq b(y_0, y_0) + \frac{1+\varepsilon}{2\varepsilon} \sum_{k=0}^{n} \tau \|f_k\|^2_{*,a}. \tag{5.5}$$

Аналогично лемме 2 имеем тождество

$$\tau^2 \left[b(y_t, y_t) - \frac{\tau}{2} a(y_t, y_t) \right] + b(\hat{y}, \hat{y}) - b(y, y) + \tag{5.6}$$

$$+ \frac{\tau}{2} a(\hat{y} + y, \hat{y} + y) = 2\tau (f_n, \hat{y}).$$

Для правой части (5.6) получим

$$2\tau (f_n, \hat{y}) = \tau (f_n, \hat{y} + y) + \tau^2 (f_n, y_t) \leq$$

$$\leq \frac{\tau}{2} a(\hat{y} + y, \hat{y} + y) + \frac{\tau}{2} \|f_n\|^2_{*,a} + \frac{\tau^3 \varepsilon}{2} a(y_t, y_t) + \frac{\tau}{2\varepsilon} \|f_n\|^2_{*,a}.$$

Подстановка в (5.6) с учетом (5.4) приводит к доказываемой оценке (5.5).

Авторы глубоко признательны А. В. Гулину за обсуждение результатов работы.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. *Митчелл Э., Уэйт Р.* Метод конечных элементов для уравнений с частными производными. М.: Мир, 1981.
2. *Стренг Г., Фикс Дж.* Теория метода конечных элементов. М.: Мир, 1977.
3. *Флетчер К.* Численные методы на основе метода Галеркина. М.: Мир, 1988.
4. *Thomee V.* Galerkin finite element method for parabolic problems//Lect. Notes in Math. Berlin: Springer, 1984.
5. *Самарский А. А.* Классы устойчивых схем//Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1967. Т. 7. № 5. С. 1096—1133.
6. *Самарский А. А.* Необходимые и достаточные условия устойчивости двухслойных разностных схем//Докл. АН СССР. 1968. Т. 181. № 4. С. 808—811.
7. *Самарский А. А.* Об устойчивости трехслойных разностных с хем//Докл. АН СССР. 1970. Т. 192. № 5. С. 998—1001.
8. *Самарский А. А.* Теория разностных схем. М.: Наука, 1989.
9. *Самарский А. А., Гулин А. В.* Устойчивость разностных схем. М.: Наука, 1973.
10. *Самарский А. А., Вабищевич П. Н.* Разностные схемы для неустойчивых задач//Матем. моделирование. 1990. Т. 2. № 11. С. 89—98.

Поступила в редакцию 20.03.95