ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 1993, том 330, № 6

МАТЕМАТИКА

УДК 519.61

КРИТЕРИИ УСТОЙЧИВОСТИ СЕМЕЙСТВА РАЗНОСТНЫХ СХЕМ

© 1993 г. Академик А. А. Самарский, А. В. Гулин

Поступило 11.02.92 г.

Рассматриваются операторно-разностные схемы

$$B\frac{y_{n+1}-y_n}{\tau}+Ay_n = 0, \quad n = 0,1,\ldots, \qquad (1)$$

где $y_n = y(t_n) \in H$, $t_n = n\tau$, $\tau > 0$, H – евклидово пространство со скалярным произведением $(\cdot, \cdot)$, A и B – линейные операторы в H. В дальнейшем предполагается, что A и B не зависят от n, B^{-1} существует. Если $D^* = D > 0$ – самосопряженный положительный в H оператор, то через H_D обозначается линейное пространство, состоящее из элементов пространства H и снабженное скалярным произведением $(y, v)_D = (Dy, v)$ и нормой $\|y\|_D = \sqrt{(y, y)_D}$. Разностная схема называется устойчивой в пространстве H_D, если при любом $y_0 \in H$ для решения задачи (1) справедливы неравенства

$$(Dy_{n+1}, y_{n+1}) \le (Dy_n, y_n), \quad n = 0, 1, \ldots .$$

Теория устойчивости операторно-разностных схем развита в [1 - 4]. В частности, в [2] показано, что если $A^* = A > 0$, то для устойчивости в H_A необходимо и достаточно, чтобы выполнялось операторное неравенство

$$B \ge 0.5\tau A. \qquad (2)$$

Доказано (см. [4]), что если $B^* = B > 0$, то условие (2) необходимо для устойчивости в любом пространстве H_D, т.е. неулучшаемо. В настоящей работе выделен класс устойчивых разностных схем с самосопряженным оператором A и несамосопряженным оператором B, для которого условие (2) не является необходимым для устойчивости в нормах пространств, отличных от H_A. Для этих схем получено неулучшаемое условие устойчивости в виде операторного неравенства, выполнение которого необходимо для устойчивости в любом H_D и достаточно для устойчивости в некотором H_D. В дальнейшем через E обозначается единичный оператор.

Теорема 1. *Пусть $B = E + \tau\sigma A$, где $\sigma^* = \sigma$, $A^* = A$. Если схема* (1) *устойчива в каком-либо пространстве H_D, то справедливо операторное неравенство*

$$A + \tau A\mu A \ge 0, \qquad (3)$$

где $\mu = \sigma - 0.5E$.

Обратно, если выполнено (3), *то схема* (1) *устойчива в H_{B^*B}. Если выполнено* (3) *и существует A^{-1}, то схема* (1) *устойчива и в пространстве H_{A^2}.*

Сформулируем теорему, позволяющую облегчить проверку выполнения условия устойчивости (3). В дальнейшем H и H_1 – евклидовы пространства, может быть, разной размерности, $(\cdot, \cdot)_H$ и $(\cdot, \cdot)_{H_1}$ – скалярные произведения соответственно в H и в H_1.

Теорема 2. *Пусть $B = E + \tau\sigma A$, $\sigma^* = \sigma$, $A = L^*L > 0$, где L: $H \to H_1$, L^*: $H_1 \to H$. Если схема* (1) *устойчива в каком-либо пространстве H_D, то в пространстве H_1 справедливо операторное неравенство*

$$E + \tau L\mu L^* \ge 0, \quad \mu = \sigma - 0.5E. \qquad (4)$$

Обратно, если выполнено (4), *то схема* (1) *устойчива в H_{A^2}.*

Рассмотрим в качестве примера разностную схему

$$y_i^{n+1} - y_i^n = \tau\,[\sigma_i y_{\bar{x}x,\,i}^{n+1} + (1-\sigma_i)\,y_{\bar{x}x,\,i}^n]\,,$$
$$n = 0, 1, \ldots, \quad i = 1, 2, \ldots, N-1, \qquad (5)$$
$$y_0^n = y_N^n = 0, \quad y_i^0 = u_0(x_i),$$

аппроксимирующую уравнение теплопроводности. Здесь оператор A определяется как

$$(Ay)_i = -y_{\bar{x}x,\,i}, \quad i = 1, 2, \ldots, N-1, \quad y_0 = y_N = 0,$$

и является самосопряженным и положительно-определенным. Применение теоремы 2 сводит исследование устойчивости схемы (5) к проверке неотрицательности симметричной трехдиагональной матрицы $Q = (q_{ij})$ порядка N, ненулевые элементы которой определены ниже:

$$q_{ii} = 1 + \gamma(\mu_{i-1} + \mu_i)\,, \quad i = 2, 3, \ldots, N-1,$$
$$q_{11} = 1 + \gamma\mu_1, \quad q_{NN} = 1 + \gamma\mu_{N-1},$$
$$q_{i,\,i+1} = q_{i+1,\,i} = -\gamma\mu_i, \quad i = 1, 2, \ldots, N-1,$$

где $\gamma = \tau / h^2$, $\mu_i = \sigma_i - 0.5$, $i = 1, 2, \ldots, N-1$.

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

Справедливо следующее

Утверждение. *Если схема* (5) *устойчива в какой-либо норме, то минимальное собственное значение* $q_{\min}$ *матрицы* Q *неотрицательно. Обратно, если* $q_{\min} \geq 0$, *то схема* (5) *устойчива в* H_{A^2}.

Сформулируем достаточные условия устойчивости схемы (5), вытекающие из теоремы (2).

Следствие. *Если выполнены неравенства*

$$\sigma_i \geq \frac{1}{2} - \frac{1}{2\gamma}, \quad i = 1, 2, \ldots, N-1, \quad \gamma = \frac{\tau}{h^2},$$

$$\frac{\sigma_i + \sigma_{i-1}}{2} \geq \frac{1}{2} - \frac{1}{4\gamma}, \quad i = 2, 3, \ldots, N-1,$$

то схема (5) *устойчива в* H_{A^2}.

Если оператор A схемы (1) является самосопряженным и положительно-определенным, то можно ставить вопрос об устойчивости в пространствах H_{A^m}, где $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Обозначим:

$$\mu = \sigma - 0.5E, \; P_m = A^{m-1} + 0.5\tau(A^{m-1}\mu A + A\mu A^{m-1}).$$

Теорема 3. *Если* $B = E + \tau\sigma A$, $\sigma^* = \sigma$, $A^* = A > 0$, *то для устойчивости схемы* (1) *в пространстве* H_{A^m} *необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство* $P_m \geq 0$.

Замечание. Из представления P_m в виде

$$P_m = 0.5\,(A^{m-2}P_2 + P_2A^{m-2}),$$

где $P_2 = A + \tau A\,\mu A$, следует существование схем, устойчивых в H_{A^2} и не устойчивых в H_A.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 93–012–801)

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Самарский А.А.* // ЖВМиМФ. 1967. Т. 7. № 5. С. 1096 - 1133.
2. *Самарский А.А.* // ДАН. 1968. Т. 181. № 4. С. 808 - 811.
3. *Самарский А.А., Гулин А.В.* Устойчивость разностных схем. М.: Наука, 1973. 415 с.
4. *Самарский А.А., Гулин А.В.* // Мат. сб. 1976. Т. 99(141). № 3. С. 299 - 330.