ИЮЛЬ 1993 г., ТОМ 29, № 7

УДК 519.63

А. А. САМАРСКИЙ, П. Н. ВАБИЩЕВИЧ

РЕГУЛЯРИЗОВАННЫЕ ТРЕХСЛОЙНЫЕ РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ С НЕСАМОСОПРЯЖЕННЫМИ ОПЕРАТОРАМИ

Теория регуляризации разностных схем [1] позволяет улучшить качество разностных схем за счет введения регуляризирующих операторов. В работах [2, 3] теория регуляризации применяется для построения разностных схем для неустойчивых эволюционных задач. Двухслойные разностные схемы рассматриваются в [2] (задача с обратным временем для параболических уравнений), в [3] — трехслойные разностные схемы (задача Коши для эллиптических уравнений). Для некорректных задач математической физики используются ρ-устойчивые разностные схемы с $\rho > 1$ (допускается ограниченный рост решения).

Основные результаты получены (см. [1—3]) для разностных схем с самосопряженными разностными операторами. Сформулированы соответствующие необходимые и достаточные условия устойчивости регуляризованных разностных схем. Для разностных схем с несамосопряженными операторами в теории разностных схем [4] необходимые и достаточные условия двухслойных разностных схем получены в случае, когда один из разностных операторов является самосопряженным и положительным. Окончательные результаты установлены также в случае схем с весами. Ряд результатов по устойчивости трехслойных разностных схем с несамосопряженными операторами приведен в [4, 5].

В [6] теория регуляризации развивается для двухслойных разностных схем с несамосопряженными операторами. Рассматриваются разностные схемы для корректной и некорректной краевых задач с различными (самосопряженными и несамосопряженными) регуляризаторами. Достаточные условия ρ-устойчивости получены на основе энергетического тождества при определенном условии подчинения кососимметричной составляющей разностного оператора. В настоящей работе аналогичные регуляризованные схемы строятся для трехслойных разностных схем. Рассматриваются две модельные задачи: корректная — для уравнения колебаний с несамосопряженным эллиптическим оператором и некорректная — для эллиптического уравнения.

1. Краевые задачи. Обозначим через Ω ограниченную область m-мерного пространства R^m с достаточно гладкой границей $\partial\Omega$. В $R^m \times \times \{-\infty < t < \infty\}$ рассмотрим ограниченный цилиндр

$$Q = \{(x, t) \mid x \in \Omega, \quad 0 < t < T\}, \quad T > 0,$$

где $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$, с боковой поверхностью

$$\Gamma = \{(x, t) \mid x \in \partial\Omega, \quad 0 < t < T\}.$$

Определим для $x \in \Omega$ равномерно эллиптический оператор

$$Lu \equiv -\sum_{i,j=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) + \sum_{i=1}^{m} a_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} \tag{1.1}$$

с достаточно гладкими коэффициентами $a_{ij}(x) = a_{ji}(x)$, $a_i(x)$, $x \in \Omega$.

Будем рассматривать две краевые задачи. Пусть $u(x, t)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + Lu = 0, \quad (x, t) \in Q, \tag{1.2}$$

граничным условиям

$$u(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \Gamma, \tag{1.3}$$

при заданных начальных условиях

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad x \in \Omega, \tag{1.4}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \psi(x), \quad x \in \Omega. \tag{1.5}$$

Задача (1.1)—(1.5) есть обычная (корректная) краевая задача для уравнения колебаний с несамосопряженным эллиптическим оператором L. В некорректной задаче (задача Коши для эллиптического уравнения) ищется решение уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - Lu = 0, \quad (x, t) \in Q, \tag{1.6}$$

дополненного краевыми и начальными условиями (1.3)—(1.5). Некорректность задачи (1.3)—(1.6) обусловлена [7] неустойчивостью решения относительно малых изменений начальных условий (функций $\varphi(x)$, $\psi(x)$ в (1.4), (1.5)).

Обычным образом (см. [8]) от дифференциального оператора L, определенного по (1.1) с учетом (1.3), перейдем к сеточному оператору Λ. На сетке ω_h определим пространство сеточных функций $H = L_2(\omega_h)$ со скалярным произведением

$$(y, z) = \sum_{x \in \omega_h} y(x) z(x) h_1 h_2 \ldots h_m.$$

В H оператор Λ положителен ($\Lambda > 0$) и представим в виде суммы самосопряженного и кососимметричного операторов

$$\Lambda = \Lambda_0 + \Lambda_1, \tag{1.7}$$

где

$$\Lambda_0 = \frac{1}{2}(\Lambda + \Lambda^*), \quad \Lambda_1 = \frac{1}{2}(\Lambda - \Lambda^*), \tag{1.8}$$

причем $\Lambda_0 = \Lambda_0^* > 0$, $\Lambda_1 = -\Lambda_1^*$.

Будем считать, что для кососимметричного оператора Λ_1 выполнено условие подчинения

$$\|\Lambda_1 y\|^2 \leqslant c(\Lambda_0 y, y) \tag{1.9}$$

с постоянной c, которая не зависит от шагов сетки ω_h. Для эллиптических операторов (1.1) с самосопряженной главной частью оператор Λ_1 связан с аппроксимацией слагаемых с первыми производными.

С учетом введенных обозначений от задачи (1.1)—(1.5) придем к следующей дифференциально-разностной задаче. Решение определяется из уравнения

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \Lambda y = 0, \tag{1.10}$$

дополненного начальными условиями

$$y(x, 0) = \varphi(x), \quad x \in \omega_h, \tag{1.11}$$

$$\frac{dy}{dt}(x, 0) = \psi(x), \quad x \in \omega_h. \tag{1.12}$$

Аналогично для неустойчивой задачи (1.3)—(1.6) получим уравнение

$$\frac{d^2y}{dt^2} - \Lambda y = 0 \tag{1.13}$$

с начальными условиями (1.11), (1.12). Для того чтобы от (1.10)—(1.12) и (1.11), (1.12) перейти к соответствующим разностным схемам, введем по переменной t равномерную сетку

$$\omega_\tau = \{t \mid t = n\tau, \quad n = 0, 1, \dots N, \quad N\tau = T\}$$

с шагом $\tau > 0$.

2. Регуляризованные трехслойные разностные схемы. Рассмотрим корректную начально-краевую задачу для уравнения колебаний. Регуляризованные разностные схемы для задачи (1.10)—(1.12) построим на основе явной симметричной схемы

$$\frac{y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1}}{\tau^2} + \Lambda y_n = 0, \quad n = 1, 2, \dots \tag{2.1}$$

Трехслойные схемы имеют [4, 8] канонический вид

$$B\frac{y_{n+1} - y_{n-1}}{2\tau} + \tau^2 R\frac{y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1}}{\tau^2} + Ay_n = 0,$$
$$n = 1, 2, \dots, \tag{2.2}$$

при заданных $y_0(x) = \varphi(x)$, $y_1(x)$, $x \in \omega_h$. Схема (2.1) записывается в каноническом виде (2.2) с

$$B = 0, \quad R = \frac{1}{\tau^2}E, \quad A = \Lambda, \tag{2.3}$$

где E — единичный оператор. В данной работе сеточные операторы B, R и A в (2.2) предполагаются постоянными (не зависящими от n).

Обозначим через $\mathcal{R} > 0$ регуляризирующий сеточный оператор, и пусть $\alpha > 0$ — параметр регуляризации (возмущения). Регуляризованную схему для (2.3) запишем в виде

$$(E + \alpha\mathcal{R})\frac{y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1}}{\tau^2} + \Lambda y_n = 0. \tag{2.4}$$

Выбор регуляризатора $\mathcal{R} = \Lambda$ соответствует использованию обычной схемы с весами. Заслуживает внимания выбор $\mathcal{R} = \Lambda_0$, при котором $R = R^*$.

Для каждого $n = 1, 2, \dots$ определим вектор $Y^n = \{y_{n-1}, y_n\}$. Обозначим через H^2 прямую сумму пространств H: $H^2 = H \oplus H$. Для векторов $Y = \{y^1, y^2\}$ сложение и умножение в H^2 определяется покоординатно, а скалярное произведение

$$(Y, V) = (y^1, v^1) + (y^2, v^2).$$

Для разностной схемы (2.2) с $R = R^* > 0$, $A = A^*$, $4R - A \geqslant 0$ определим норму в H_D^2 выражением $\|Y^n\|_D = ((DY^n, Y^n))^{1/2}$, где

$$(DY^n, Y^n) = \frac{1}{4}\|y_n + y_{n-1}\|_A^2 + \|y_n - y_{n-1}\|_{R-(1/4)A}^2, \tag{2.5}$$

а норма в H_A определяется обычным образом: $\|y\|_A^2 = (Ay, y)$.

Трехслойная схема (2.2) записывается в виде двухслойной схемы [4]:

$$Y^{n+1} = SY^n, \tag{2.6}$$

где S — матрица ($S=(S_{\alpha\beta})$) с элементами

$$S_{11}=0, \quad S_{12}=E, \; S_{21}=-B_2^{-1}B_0, \; S_{22}=-B_2^{-1}B_1, \tag{2.7}$$

$$B_0=R-\frac{B}{2\tau}, \; B_1=A-2R, \; B_2=R+\frac{B}{2\tau}. \tag{2.8}$$

На основе (2.6) в [4] получены необходимые и достаточные условия при самосопряженных операторах A и R.

Рассмотрим регуляризованную схему (2.4) в случае, когда $A\neq A^*$, а регуляризатор $\mathscr{R}$ самосопряжен и положителен. Это соответствует тому, что в схеме (2.2)

$$R=R^*>0, \quad A=A_0+A_1, \, A_0=\frac{1}{2}(A+A^*)=A_0^*>0. \tag{2.9}$$

Обозначим через D_0 оператор, определяемый согласно (2.5), где A заменено A_0.

Т е о р е м а 1. *Для разностной схемы (2.2), (2.9) при выполнении неравенств*

$$R\geqslant\frac{1+\beta}{4}A, \; B\geqslant0, \; \beta>0, \tag{2.10}$$

$$\frac{\tau}{2}B+\tau^2R\geqslant\varepsilon E, \quad \varepsilon>0, \tag{2.11}$$

и выполнении условия подчиненности

$$\|A_1y\|^2\leqslant c(A_0y, y) \tag{2.12}$$

справедлива априорная оценка

$$\|Y^{n+1}\|_{D_0}=\left(1+\tau\left(\frac{c}{\varepsilon}\frac{1+\beta}{\beta}\right)^{1/2}\right)\|Y^n\|_{D_0}. \tag{2.13}$$

При выполнении (2.9) схему (2.2) можно записать в виде двухслойной схемы

$$Y^{n+1}=S_0Y^n+\Phi^n. \tag{2.14}$$

Здесь аналогично (2.6) компоненты матрицы S_0 определяются по формулам (2.7), (2.8), где A заменено A_0. Аналогично (2.5) определяется норма в H_{D_0}. Для вектора Φ^n имеем

$$\Phi^n=\{0, \; -B_2^{-1}A_1y_n\}. \tag{2.15}$$

Используя неравенство треугольника, из (2.14) получим

$$\|Y^{n+1}\|_{D_0}=\|S_0Y^n\|_{D_0}+\|\Phi^n\|_{D_0}. \tag{2.16}$$

Доказательство оценки устойчивости (2.13) основано на том, что при сформулированных предположениях (2.9), (2.10) справедлива оценка

$$\|S_0Y^n\|_{D_0}\leqslant\|Y^n\|_{D_0}. \tag{2.17}$$

Для последнего слагаемого в (2.16) с учетом (2.15) и (2.5) получим

$$\|\Phi^n\|_{D_0}=\frac{1}{4}\|B_2^{-1}v_n\|_{A_0}+\|B_2^{-1}v_n\|_{R-(1/4)A_0}=\|B_2^{-1}v_n\|_R, \tag{2.18}$$

где $v_n=A_1y_n$. При выполнении (2.11) имеет место (см., например, [5]) оценка

$$\|B_2^{-1}v_n\|_R\leqslant\tau\varepsilon^{-1/2}\|v_n\|. \tag{2.19}$$

Принимая во внимание условие подчиненности (2.12), из (2.18), (2.19) получим

$$\|\Phi^n\|_{D_0}\leqslant\tau(c/\varepsilon)^{1/2}\|y_n\|_{A_0}. \tag{2.20}$$

При выполнении первого неравенства (2.10) справедлива [4] оценка

$$\|y_n\|^2_{A_0} \leqslant \frac{1+\beta}{\beta} \|Y^n\|^2_{D_0}. \tag{2.21}$$

Подстановка (2.17), (2.11) в (2.16) дает искомую оценку (2.13) ρ-устойчивости разностной схемы (2.2), (2.9).

Следствие 1. *Для регуляризованной схемы (2.4) с* $\mathscr{R}=\Lambda_0$ *при* $\alpha \geqslant (1+\beta)\tau^2/4$ *и выполнении условия подчиненности (1.9) справедлива оценка*

$$\|Y^{n+1}\|_D = \left(1+\tau\left(c\frac{1+\beta}{\beta}\right)^{1/2}\right)\|Y^n\|_{D_0}, \tag{2.22}$$

причем $A_0=\Lambda_0$.

В данном случае $R=\tau^{-2}(E+\alpha A_0)$ и неравенство (2.10) будет, очевидно, выполнено при $\alpha \geqslant (1+\beta)\tau^2/4$, а в неравенстве (2.11) при любых $\alpha \geqslant 0$ можно взять $\varepsilon=1$. Неравенство (2.13) переписывается в виде (2.22).

Следствие 2. *При выполнении (1.9) и выборе* $\mathscr{R}=\Lambda_0^2$ *для разностной схемы (2.4) имеет место (2.22), если*

$$\alpha \geqslant \frac{\tau^4(1+\beta)^2}{64}. \tag{2.23}$$

Здесь снова можно взять $\varepsilon=1$ в неравенстве (2.11), а неравенство (2.10) преобразуется следующим образом:

$$\tau^2\left(R-\frac{1+\beta}{4}A\right)=E+\alpha\Lambda_0^2-\frac{\tau^2(1+\beta)}{4}\Lambda_0=$$

$$=\left(\alpha^{1/2}\Lambda_0-\frac{\tau^2(1+\beta)}{8\alpha^{1/2}}E\right)^2+\left(1-\frac{\tau^4(1+\beta)^2}{64\alpha}\right)E \geqslant 0.$$

Отсюда и следует оценка (2.23) для параметра регуляризации α.

Тем самым, основываясь на теореме 1 при условии подчиненности (1.9), доказана устойчивость регуляризованных разностных схем (2.4) с регуляризаторами $\mathscr{R}=\Lambda_0$ и $\mathscr{R}=\Lambda_0^2$. Для двухслойных разностных схем (см. [6]) аналогичные результаты получены и при выборе $\mathscr{R}=\Lambda, \mathscr{R}=\Lambda^2$.

3. Регуляризованные разностные схемы для эллиптической задачи Коши. Используем принцип регуляризации разностных схем для построения разностных схем для некорректной задачи (1.11)—(1.13). Соответствующая явная разностная схема для (1.11)—(1.13) имеет вид

$$\frac{y_{n+1}-2y_n+y_{n-1}}{\tau^2}-\Lambda y_n=0, \quad n=1, 2, \ldots \tag{3.1}$$

Схема (3.1) записывается в каноническом виде (2.2) с

$$B=0, \quad R=\frac{1}{\tau^2}E, \quad A=-\Lambda, \tag{3.2}$$

т. е. $A=A^*<0$.

Регуляризованная схема для (3.2), (2.2) имеет канонический вид (2.2) с

$$B=0, \quad R=\frac{1}{\tau^2}(E+\alpha\mathscr{R}), \quad A=-\Lambda. \tag{3.3}$$

Схемы (2.2), (3.2) и (2.2), (3.3) характеризуются тем, что оператор A отрицателен. Для того чтобы максимально учесть эту специфику, вместо канонической формы (2.2) используем запись трехслойной схемы в виде

$$B\frac{y_{n+1}-y_{n-1}}{2\tau}+\tau^2 R\frac{y_{n+1}-2y_n+y_{n-1}}{\tau^2}-A'y_n=0, \tag{3.4}$$
$$n=1, 2, \ldots$$

Пусть операторы разностной схемы (3.4) удовлетворяют условиям

$$R=R^*>0,\quad A'=A'_0+A'_1,\ A'_0=\frac{1}{2}(A'+(A')^*)>0. \tag{3.5}$$

Докажем следующее утверждение.

Теорема 2. *Для разностной схемы (3.4), (3.5) с $B=B^*\geqslant 0$ при выполнении неравенства*

$$\tilde{A}_0\geqslant\gamma\rho A'_0 \tag{3.6}$$

при $\gamma>0$ и $\rho>1$, где

$$\tilde{A}_0=\frac{\rho^2-1}{2\tau}B+(\rho-1)^2R-\rho A'_0, \tag{3.7}$$

неравенства (2.11) и условия подчиненности

$$\|A'_1y\|^2\leqslant c(A'_0y,y) \tag{3.8}$$

справедлива оценка

$$\|Y^{n+1}\|_{\tilde{D}_0}=\left(\rho+\frac{1}{\gamma}\left(2\frac{c}{\varepsilon}\right)^{1/2}\tau\right)\|Y^n\|_{\tilde{D}_0}, \tag{3.9}$$

а квадратичная форма $(\tilde{D}_0Y^n, Y^n)$ с $Y^n=\{y_{n-1}, y_n\}$ определяется выражением

$$(\tilde{D}_0Y^n, Y^n)=\frac{1}{4}\left\|\frac{1}{\rho}y_n+y_{n-1}\right\|^2_{\tilde{A}_0}+\left\|\frac{1}{\rho}y_n-y_{n-1}\right\|^2_{\tilde{R}-(1/4)\tilde{A}_0}, \tag{3.10}$$

причем

$$\tilde{R}=\frac{\rho^2-1}{4\tau}B+\frac{\rho^2+1}{2}R. \tag{3.11}$$

Доказательство основано на оценке ρ-устойчивости разностной схемы с самосопряженными операторами. Запишем схему (3.4) с несамосопряженным оператором A' в виде

$$B\frac{y_{n+1}-y_{n-1}}{2\tau}+\tau^2R\frac{y_{n+1}-2y_n+y_{n-1}}{\tau^2}+$$
$$+Ay_n=\varphi_n,\quad n=1,2,\ldots, \tag{3.12}$$

где $A=-A'_0$, а $\varphi_n=A'_1y_n$. Необходимым и достаточным условием ρ-устойчивости схемы (3.12) в $H_{\tilde{D}_0}$, где оператор $\tilde{D}_0$ определяется аналогично (3.10), при $\tilde{R}>0$ являются [4, 8, 9] операторные неравенства

$$\tilde{A}=\frac{\rho^2-1}{2\tau}B+(\rho-1)^2R+\rho A\geqslant 0, \tag{3.13}$$

$$4\tilde{R}-\tilde{A}=\frac{\rho^2-1}{2\tau}B+(\rho+1)^2R-\rho A\geqslant 0, \tag{3.14}$$

$$\frac{\tilde{B}}{\tau}=\frac{\rho^2+1}{2\tau}B+(\rho^2-1)R\geqslant 0. \tag{3.15}$$

Для схемы (3.4), (3.5) с учетом введенных обозначений неравенства (3.14), (3.15) с очевидностью выполняются. Принимая во внимание неравенство (3.6), приходим к выводу о справедливости и (3.13). Как и при доказательстве теоремы 1, запишем схему (3.4), (3.5) с учетом (3.12) в виде

$$Y^{n+1}=\tilde{S}_0Y^n+\Phi^n, \tag{3.16}$$

где

$$\Phi^n = \{0, B_2^{-1} A' y_n\}. \tag{3.17}$$

Аналогично (2.16), (2.17) имеем

$$\|Y^{n+1}\|_{\tilde D_0} = \rho \|Y^n\|_{\tilde D_0} + \|\Phi^n\|_{\tilde D_0}. \tag{3.18}$$

С учетом (3.10), (3.17) непосредственно получаем

$$\|\Phi^n\|_{\tilde D_0} = \frac{1}{\rho} \|B_2^{-1} \varphi_n\|_{\tilde R}, \tag{3.19}$$

где B_2 определяется согласно (2.8). Нетрудно показать, что аналогично (2.19) при выполнении (2.11) имеет место оценка

$$\|B_2^{-1} y\|_{\tilde R}^2 \leqslant \frac{\rho^2+1}{2} \frac{\tau^2}{\varepsilon} \|y\|^2. \tag{3.20}$$

Действительно, при $\rho > 1$ и выполнении (3.20) в силу (2.11) получим

$$\frac{\rho^2-1}{4\tau} B + \frac{\rho^2+1}{2} R \leqslant \frac{\rho^2+1}{2} \frac{\tau^2}{\varepsilon} B_2^2 \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\rho^2+1}{2} \left(\frac{B}{2\tau} + R \right).$$

Принимая во внимание условие подчиненности (3.8), из (3.19), (3.20) имеем

$$\|\Phi^n\|_{\tilde D_0} = \left(\frac{\rho^2+1}{2\rho^2} \frac{c}{\varepsilon} \right)^{1/2} \tau \|y_n\|_{A_0}. \tag{3.21}$$

Из неравенства (3.6) следует

$$\|y_n\|_{A_0} \leqslant \frac{1}{\gamma\rho} \|y_n\|_{\tilde A_0}. \tag{3.22}$$

При выполнении неравенства $4\tilde R \geqslant (1+\beta) \tilde A_0$, $\beta > 0$, аналогично (2.21) справедлива оценка

$$\|y_n\|_{\tilde A_0}^2 \leqslant \frac{1+\beta}{\beta} \|Y^n\|_{\tilde D_0}^2. \tag{3.23}$$

Для схемы (3.4), (3.5) с учетом (3.13), (3.14) получим

$$4\tilde R - (1+\beta) \tilde A = (1-\beta) \frac{\rho^2-1}{2\tau} B +$$

$$+ ((\rho+1)^2 - \beta(\rho-1)^2) R - (1-\beta)\tau A \geqslant 0.$$

Это неравенство для $\rho > 1$ и $A < 0$ будет выполнено при всех $0 < \beta \leqslant 1$. Поэтому в оценке (3.23) можно взять $\beta = 1$. Подставляя (3.21)—(3.23) в (3.18), получаем априорную оценку

$$\|Y^{n+1}\|_{\tilde D_0} = \left(\rho + \frac{1}{\gamma} (\rho^2+1)^{1/2} \rho^{-2} \left(\frac{c}{\varepsilon} \right)^{1/2} \tau \right) \|Y^n\|_{\tilde D_0},$$

загрубляя которую и приходим к (3.9).

Воспользуемся теоремой 2 для того, чтобы установить ρ-устойчивость регуляризованной разностной схемы (2.2), (3.3). Она записывается в виде (3.4), (3.5) при $A' = \Lambda$.

Следствие 1. *Для регуляризованной разностной схемы (2.2), (3.3) с $\mathscr{R} = \Lambda_0$ справедлива оценка устойчивости (3.9) с $\varepsilon = 1$ при*

$$\alpha \geqslant (1+\gamma) \frac{\rho}{(\rho-1)^2} \tau^2. \tag{3.24}$$

Для регуляризованной схемы (2.2), (3.3) величину ε в неравенстве (2.11) можно взять равной 1. Неравенство (3.6) при $\mathscr{R}=\Lambda_0$ для схемы (3.3) принимает вид

$$\tau^2(\rho-1)^2(E+\alpha\Lambda_0)-\rho\Lambda_0\geqslant\gamma\rho\,\Lambda_0.$$

Это неравенство заведомо выполняется при параметре регуляризации α, удовлетворяющем условию (3.24).

Неравенство (3.24) можно использовать для оценки величины ρ при заданном параметре регуляризации. В [3] доказано, что неравенство

$$(\rho-1)^2\chi-\tau^2\rho\geqslant 0$$

для положительных χ, τ и $\rho>1$ выполнено при

$$\rho\geqslant\exp(\chi^{-1/2}\tau).$$

Поэтому неравенство (3.24) будет выполнено при

$$\rho=\exp((\alpha/(1+\gamma))^{-1/2}\tau). \tag{3.25}$$

С л е д с т в и е 2. *Для регуляризованной разностной схемы (2.2), (3.3) с* $\mathscr{R}=\Lambda_0^2$ *справедлива оценка устойчивости (3.9) с* $\varepsilon=1$ *при*

$$\alpha\geqslant\frac{(1+\gamma)^2\tau^4\rho^2}{4(\rho-1)^4}. \tag{3.26}$$

В этом случае неравенство (3.6) преобразуется следующим образом:

$$E+\alpha\Lambda_0^2-\frac{(1+\gamma)\rho\tau^2}{(\rho-1)^2}\Lambda_0=\left(\alpha^{1/2}\Lambda_0-\frac{(1+\gamma)\rho\tau^2}{2\alpha^{1/2}(\rho-1)^2}E\right)^2+$$
$$+\left(1-\frac{(1+\gamma)^2\rho^2\tau^4}{4\alpha(\rho-1)^4}\right)E\geqslant 0.$$

Отсюда получаем оценку (3.26) для α. Аналогично (3.25) при заданном α ρ-устойчивость (оценка (3.9)) имеет место при

$$\rho=\exp(((1+\gamma)/2)^{1/2}\alpha^{-1/4}\tau). \tag{3.27}$$

Оценки ρ-устойчивости (3.9), (3.25), (3.27) согласуются с оценками, которые получены (см. [3]) для самосопряженных сеточных операторов $\mathscr{R}$ и A.

Литература

1. С а м а р с к и й А. А. // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 1967. Т. 7, № 1. С. 62—93.
2. С а м а р с к и й А. А., В а б и щ е в и ч П. Н. // Мат. моделирование. 1990. Т. 2, № 11. С. 89—98.
3. S a m a r s k i i A. A., V a b i s h c h e v i c h P. N. // Mathematical Models and Methods in Applied Scieces. 1992. Vol. 3, N 3. P. 295—315.
4. С а м а р с к и й А. А., Г у л и н А. В. Устойчивость разностных схем. М., 1973.
5. А р д е л я н Н. В. // Вестн. Моск. ун-та. Вычислит. математика и кибернетика. 1979. № 2. С. 65—59.
6. С а м а р с к и й А. А., В а б и щ е в и ч П. Н. // Мат. моделирование. 1992. Т. 4, № 2. С. 36—44.
7. Т и х о н о в А. Н., А р с е н и н В. Я. Методы решения некорректных задач. М., 1986.
8. С а м а р с к и й А. А. Теория разностных схем. М., 1983.
9. Г у л и н А. В. // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 1968. Т. 8, № 4. С. 899—902.

Институт математического моделирования РАН

Поступила в редакцию 19 февраля 1993 г.