ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ОДНОГО КЛАССА РАЗНОСТНЫХ СХЕМ *

А.В. ГУЛИН, А.А. САМАРСКИЙ

В работах [1 – 5] была развита теория устойчивости разностных схем, рассматриваемых как операторно-разностные уравнения в абстрактных пространствах. Двуслойная разностная схема определяется как уравнение

$$B\frac{y_{n+1}-y_n}{\tau}+Ay_n=0, \quad n=0,\ 1,\ \dots , \tag{1}$$

с линейными операторами A и B, действующими в гильбертовом пространстве H.

Здесь $\tau > 0$ – шаг сетки $\{t_n=n\tau\}$ по времени, $y_n = y(t_n)$ – функция t_n со значениями в H, задано начальное значение y_0 . В дальнейшем, не оговаривая этого специально, будем предполагать, что H – евклидово пространство, операторы A и B не зависят от n, оператор B^{-1} существует. Пусть в H определено скалярное произведение (,). Неравенство $C\geq 0$ ($C>0$) означает, что $(Cx,x)\geq 0$ для всех $x\in H$ ($(Cx,x)>0$ для всех $0\neq x\in H$). Через H_D, где $D^*=D>0$, обозначается пространство H, снабженное скалярным произведением $(y,v)_D=(Dy,v)$ и нормой $\|y\|_D=\sqrt{(Dy,y)}$.

Разностная схема (1) называется *устойчивой в пространстве* H_D (или, что то же самое, в норме D), если при любых $y_0\in H$ для решения задачи (1) справедливы неравенства

$$(Dy_{n+1},y_{n+1})\leq (Dy_n,y_n), \quad n=0,\ 1,\ \dots \tag{2}$$

Устойчивость в H_D эквивалентна выполнению операторного неравенства

$$D\geq S^*DS, \tag{3}$$

где $S=E-\tau B^{-1}A$ – оператор перехода схемы (1), E – единичный оператор. Отметим, что свойство устойчивости неинвариантно относительно нормы D. Одна из важных задач теории устойчивости – поиск нормы, в которой устойчива данная схема или класс схем. В [2] были получены критерии устойчивости схемы (1) в пространствах H_A и

*ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 1993. т.29, №7, с.1163-1173.

H_B. Так, было доказано, что если $A^* = A > 0$, то для устойчивости в H_A необходимо и достаточно, чтобы выполнялось операторное неравенство

$$B \geq 0,5\tau A. \tag{4}$$

В работах [4, 5] показано, что если $B^* = B > 0$, $A^* = A > 0$, то (4) необходимо для устойчивости в любом пространстве H_D, в то же время имеются устойчивые схемы с $B^* \neq B$, $A^* = A > 0$, не удовлетворяющие условию (4).

В настоящей работе выделен еще один класс разностных схем, для которых неравенство (4) является лишь достаточным условием устойчивости. Этот класс определяется условиями

$$A^* = A, \quad B = E + \tau\sigma A, \tag{5}$$

где σ – самосопряженный оператор. Схемы с оператором B вида (5) являются обобщением схемы с весами на тот случай, когда вес $\sigma = \sigma(x)$ – функция пространственного переменного x. В этом случае оператор σ в (5) представляется диагональной матрицей $\sigma = \mathrm{diag}\,[\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_m]$. Заметим, что если A и σ неперестановочны, то оператор (5) не является, вообще говоря, самосопряженным.

В теореме 1 доказано, что если A^{-1} существует, то выполнение операторного неравенства

$$A^{-1} + \tau(\sigma - 0,5)E \geq 0 \tag{6}$$

необходимо для устойчивости схемы (1), (5) в любой норме и достаточно для устойчивости в норме $D = A^2$. Если $A^* = A > 0$, то условие

$$E + 0,5\tau(A\sigma + \sigma A - A) \geq 0, \tag{7}$$

эквивалентное в случае схемы (1), (5) условию (4), необходимо и достаточно для устойчивости в H_A. Отсюда, учитывая неэквивалентность неравенств (6), (7), получаем множество схем вида (1), (5), для которых условие (4) не является необходимым для устойчивости в нормах, отличных от A.

В качестве иллюстрации рассмотрена схема

$$\frac{y_i^{n+1} - y_i^n}{\tau} = \sigma_i y_{\bar{x}x,i}^{n+1} + (1 - \sigma_i) y_{\bar{x}x,i}^n, \tag{8}$$
$$i = 1, 2, \ldots, N-1, \quad y_0^n = y_N^n = 0,$$

аппроксимирующая на равномерной сетке с шагом $h = 1/N$ уравнение теплопроводности. Показано, что для ее устойчивости достаточно потребовать, чтобы весовые множители σ_i удовлетворяли неравенствам

$$\sigma_i \geq \frac{1}{2} - \frac{1}{2\gamma}, \quad i = 1,\ 2,\ \ldots\ ,\ N-1, \quad \gamma = \frac{\tau}{h^2},$$

$$\frac{\sigma_i + \sigma_{i-1}}{2} \geq \frac{1}{2} - \frac{1}{4\gamma}, \quad i = 2,\ 3,\ \ldots\ ,\ N-1.$$

В частности, схема с $\sigma_i = 0,5(1+(-1)^i)$, полученная чередованием явной и чисто неявной схем, устойчива при условии $\gamma \leq 1$. Отметим, что в этом случае применение принципа замороженных коэффициентов приводит к более грубому достаточному условию устойчивости $\gamma \leq 0,5$.

Приведены примеры схем вида (8), устойчивых в H_{A^2} и неустойчивых в H_A. Так, если $\sigma_1 = 4,5 + 2\sqrt{5}$, $\sigma_2 = \sigma_3 = \cdots = \sigma_{N-1} = 0,5$, то схема абсолютно устойчива в H_{A^2} и при $\gamma > 1$ неустойчива в H_A.

Основная трудность при исследовании схемы (8) – переход от операторного неравенства (6) к непосредственно проверяемым условиям для числовых параметров σ_i, γ, определяющих схему. Показано, что если $A = L^*L > 0$, то (6) эквивалентно операторному неравенству

$$Q = E + \tau L(\sigma - 0,5)L^* \geq 0.$$

Это позволило сформулировать необходимые и достаточные условия устойчивости схемы (8) в терминах собственных значений симметричной трехдиагональной матрицы, представляющей оператор Q и зависящей только от параметров γ, σ_i,
$i = 1,\ 2,\ \ldots\ ,\ N - 1$, данной схемы.

Теорема о необходимых и достаточных условиях устойчивости. При исследовании устойчивости будем исходить из неравенства (3). Основным предположением в дальнейшем является предположение о симметризуемости оператора перехода S.

Лемма 1 *Пусть существуют обратимый оператор K и самосопряженный оператор $\tilde{S}$ такие, что*

$$S = K^{-1}\tilde{S}K. \tag{9}$$

Тогда, если для какого-либо самосопряженного положительного оператора D выполнено неравенство (3), то справедливы неравенства

$$-E \leq \tilde{S} \leq E. \tag{10}$$

Обратно, из (9), (10) следует неравенство (3) для оператора $D = K^*K > 0$.

Доказательство. Из (3) следует, что все собственные значения оператора S не превосходят 1 по модулю. То же самое справедливо и для подобного ему оператора $\tilde{S}$. Отсюда и в силу самосопряженности $\tilde{S}$ получаем неравенства (10). Предположим теперь, что выполнены условия (9), (10). Полагая $D = K^*K$, получим

$$S^*DS = (K^*\tilde{S}(K^*)^{-1})(K^*K)(K^{-1}\tilde{S}K) = K^*\tilde{S}^2K.$$

Из неравенства (10) следует, что $\tilde{S}^2 \leq E$, поэтому

$$S^*DS = K^*\tilde{S}^2K \leq K^*K = D,$$

т. е. приходим к неравенству (3) с $D = K^*K$.

Теорема 1 *Пусть* $A^* = A$, $\sigma^* = \sigma$, $B = E + \tau\sigma A$, *существуют* A^{-1} *и* B^{-1}. *Если схема (1) устойчива в какой-либо норме, то выполнено операторное неравенство*

$$A^{-1} + \tau\mu \geq 0, \tag{11}$$

где $\mu = \sigma - 0,5E$. *Обратно, если выполнено (11), то схема (1), (5) устойчива в* H_{A^2}.

Доказательство. Покажем, что для оператора перехода схемы (1), (5) выполнено условие (9). Действительно,

$$S = E - \tau(E + \tau\sigma A)^{-1}A = A^{-1}(E - \tau(A^{-1} + \tau\sigma)^{-1})A = A^{-1}\tilde{S}A,$$

т.е. выполнено (9) с $K = A$ и

$$\tilde{S} = E - \tau(A^{-1} + \tau\sigma)^{-1}. \tag{12}$$

Если схема устойчива в какой-либо норме, то справедливо неравенство (3) с $D^* = D > 0$. Учитывая лемму 1, получим, что для оператора (12) справедливы неравенства (10), т.е.

$$-E \leq E - \tau(A^{-1} + \tau\sigma)^{-1} \leq E.$$

Отсюда получаем два неравенства:

$$A^{-1} + \tau\sigma \geq 0 \text{ и}$$

$$A^{-1} + \tau\sigma \geq 0,5\tau E, \tag{13}$$

причем первое неравенство следует из второго, а второе – совпадает с требуемым неравенством (11). Первое утверждение теоремы 1 доказано. Достаточность условия (11) для устойчивости в H_{A^2} следует немедленно из леммы 1, если положить $K = A$ и учесть, что для оператора (12) неравенства (10) и (13) эквивалентны.

Замечание. Из теоремы 1 следует, что если схема (1), (5) устойчива в какой-либо норме, то она устойчива и в H_{A^2}.

Следствие. *При тех же условиях, что и в теореме 1, операторное неравенство*

$$A + \tau A\mu A \geq 0, \tag{14}$$

где $\mu = \sigma - 0,5E$, необходимо для устойчивости схемы (1), (5) в какой-либо норме и достаточно для устойчивости в H_{A^2}.

Справедливость этого утверждения следует из эквивалентности операторных неравенств (11) и (14).

Известно, что из устойчивости по начальным данным в смысле (2) следует устойчивость по правой части. Покажем, что условие (11) достаточно и для устойчивости по правой части.

Теорема 2 *Если A – самосопряженный обратимый оператор, $\sigma^* = \sigma$, $B = E + \tau\sigma A$ и выполнено (11), то для решения задачи*

$$B\frac{y_{n+1} - y_n}{\tau} + Ay_n = \varphi_n, \quad n = 0, 1, \dots, \quad y_0 \text{ задан}, \tag{15}$$

справедлива оценка

$$\|y_{n+1}\|_{A^2} \leq \|y_0\|_{A^2} + \|\varphi_0\| + \|\varphi_n\| + \sum_{j=1}^{n} \tau \left\|\varphi_{\bar{t},j}\right\|, \tag{16}$$

где $\|\varphi_j\| = \sqrt{(\varphi_j, \varphi_j)}$, $\varphi_{\bar{t},j} = (\varphi_j - \varphi_{j-1})/\tau$.

Доказательство. Воспользуемся следующей априорной оценкой, полученной в [4]. Если существует A^{-1} и для решения однородного уравнения (1) справедлива оценка

$$\|y_{n+1}\|_{(1)} \leq \|y_n\|_{(1)},$$

где $\|\cdot\|_{(1)}$ – какая-либо норма, то для неоднородного уравнения (15) выполняется оценка

$$\|y_{n+1}\|_{(1)} \leq \|y_0\|_{(1)} + \left\|A^{-1}\varphi_0\right\|_{(1)} + \left\|A^{-1}\varphi_n\right\|_{(1)} +$$

$$+\sum_{j=1}^{n}\tau\left\|A^{-1}\varphi_{\bar{t},j}\right\|_{(1)}.$$

В случае нормы $\|\cdot\|_{(1)} = \|\cdot\|_{A^2}$ эта оценка совпадает с (16).

Леммы об операторных неравенствах. Приведем утверждения, позволяющие облегчить проверку неравенств (11) и (14) для конкретных разностных схем. Оказывается, что в определенных случаях неравенство (11) упрощается, если перейти к эквивалентному неравенству в другом пространстве. Пусть H и H_1 – евклидовы пространства, может быть различной размерности, $(\ ,\ )_H$ и $(\ ,\ )_{H_1}$ – скалярные произведения в этих пространствах. Пусть задан оператор L, действующий из H в H_1, и определен сопряженный к L оператор L^*, действующий из H_1 в H.

Лемма 2 *Пусть $L : H \to H_1$, $L^* : H_1 \to H$, $A = L^*L > 0$, K – самосопряженный в H оператор. Тогда неравенство*

$$A^{-1} \geq K \tag{17}$$

эквивалентно неравенству

$$E \geq LKL^* \tag{18}$$

в пространстве H_1.

Доказательство. Для обратимого самосопряженного оператора A неравенство (17) эквивалентно неравенству

$$A \geq AKA, \tag{19}$$

так что достаточно доказать эквивалентность (18) и (19). Эти неравенства означают соответственно, что

$$(AKAy, y)_H \leq (Ay, y)_H \tag{20}$$

для любого $y \in H$ и

$$(LKL^*v, v)_{H_1} \leq (v, v)_{H_1} \tag{21}$$

для любого $v \in H_1$. Для $A = L^*L$ неравенство (20) можно переписать в виде

$$(LKL^*(Ly), Ly)_{H_1} \leq (Ly, Ly)_{H_1}. \tag{22}$$

Пусть $y \in H$ – любой элемент и выполнено (18). Полагая $v = Ly$ в неравенстве (21), приходим к неравенству (22). Тем самым доказано, что из (18) следует (17). Покажем, что, наоборот, неравенство (18) следует из (17). Пусть $v \in H_1$ – любой элемент и выполнено неравенство (19), эквивалентное (17). Покажем, что тогда для любого $v \in H_1$ справедливо неравенство (21). Полагая в (20) $y = A^{-1}L^*v$, получим

$$(AKAy, y)_H = (AKL^*v, A^{-1}L^*v)_H = (KL^*v, L^*v)_H =$$
$$= (LKL^*v, v)_{H_1} \le (Ay, y)_H =$$
$$= (A^{-1}L^*v, L^*v)_H = (LA^{-1}L^*v, v)_{H_1},$$

т.е. для любого $v \in H_1$ справедливо неравенство

$$(LKL^*v, v)_{H_1} \le (Cv, v)_{H_1}, \tag{23}$$

где

$$C = LA^{-1}L^* \tag{24}$$

– самосопряженный неотрицательный в H_1 оператор. Оператор (24) является проектором, т.е. $C^2 = C$. Известно, что спектр такого оператора состоит не более чем из двух точек: $\lambda = 0$ и $\lambda = 1$.

Отсюда и в силу самосопряженности C заключаем о справедливости неравенств $0 \le C \le E$. Из неравенств (23) и $C \le E$ следует (21) при любом $v \in H_1$. Лемма 2 доказана.

Теорема 3 *Пусть в схеме (1), (5) оператор A может быть представлен в виде $A = L^*L$, где $L : H \to H_1$, $L^* : H_1 \to H$. Пусть $L^*L > 0$, $\sigma^* = \sigma$, $(E + \sigma\tau A)^{-1}$ существует. Если схема устойчива в какой-либо норме, то справедливо операторное неравенство*

$$E + \tau L\mu L^* \ge 0, \quad \mu = \sigma - 0,5 \tag{25}$$

в пространстве H_1. Обратно, если выполнено (25), то существует $(E + \sigma\tau A)^{-1}$ и схема (1), (5) устойчива в H_{A^2}.

Доказательство следует из теоремы 1 и леммы 3, если положить $K = -\tau\mu$ в неравенствах (17) и (18).

Необходимо отметить, что противоположные (17), (18) неравенства

$$A^{-1} \le K, \tag{26}$$

$$E \le LKL^*, \tag{27}$$

где $A = L^*L$, не эквивалентны. Неравенство (26) следует из (27). Действительно, учитывая (27), получим, что

$$(AKAy, y)_H = ((LKL^*)Ly, Ly)_{H_1} \ge (Ly, Ly)_{H_1} = (Ay, y)_H$$

при любом $y \in H$. Тем самым, справедливо операторное неравенство

$$A \leq AKA, \tag{28}$$

эквивалентное (26).

Без дополнительных предположений неравенство (27) не следует из (26). Так, если $K = 2A^{-1}$, то (26) выполнено, а неравенство (27) принимает вид $C \geq 0,5E$, где оператор C определен согласно (24). Последнее неравенство не выполняется, если ядро оператора L^* содержит ненулевой элемент.

Пусть по-прежнему $L : H \to H_1$, $L^* : H_1 \to H$. Представим H_1 в виде прямой суммы $H_1 = H_1^{(1)} \oplus H_1^{(2)}$ двух ортогональных подпространств, где $H_1^{(1)}$ – образ оператора L, $H_1^{(2)}$ – ядро оператора L^*.

Лемма 3 *Пусть $A = L^*L > 0$, $K^* = K : H \to H$. Неравенство (26) выполнено тогда и только тогда, когда*

$$(v, v)_{H_1} \leq (LKL^*v, v)_{H_1} \tag{29}$$

для всех $v \in H_1^{(1)}$.

Доказательство. Достаточно доказать эквивалентность операторного неравенства (28) и условия (29). Поскольку $A = L^*L$, неравенство (28) означает, что

$$(L^*Ly, y)_H \leq (L^*LKL^*Ly, y)_H$$

или

$$(Ly, Ly)_{H_1} \leq ((LKL^*)Ly, Ly)_{H_1} \tag{30}$$

для любого $y \in H_1$. Пусть v – любой элемент из $H_1^{(1)}$. Тогда существует $y \in H$ такой, что $v = Ly$. Если выполнено (26), то справедливо неравенство (3) с $Ly = v$, т.е. неравенство (29). Таким образом, из (26) следует (29) для любого $v \in H_1^{(1)}$. Обратно, пусть $y \in H$ – любой вектор и выполнено условие (29). Тогда для вектора $v = Ly$ имеем согласно (29), что

$$(Ly, Ly)_{H_1} \leq ((LKL^*)Ly, Ly)_{H_1},$$

т.е. приходим к неравенству (30), эквивалентному (28). Лемма 3 доказана.

Разностная схема с пространственно неоднородными весовыми множителями. Рассмотрим в качестве иллюстрации разностную схему

$$\frac{y_i^{n+1} - y_i^n}{\tau} = \sigma_i y_{\bar{x}x,i}^{n+1} + (1 - \sigma_i) y_{\bar{x}x,i}^n, \tag{31}$$

$$i = 1, 2, \dots, N-1, \quad y_0^n = y_N^n = 0, \quad n = 0, 1, \dots, \quad y_i^0 = u_0(x_i),$$

аппроксимирующую уравнение теплопроводности. Здесь $y_i^n = y(x_i, t_n)$, $x_i = ih$, $hN = 1$, $t_n = n\tau$, $\tau > 0$, $y_{\bar{x}x,i} = (y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1})/h^2$, σ_i – весовые множители.

Разностная схема (31) имеет канонический вид (1), (5), где $y_n = (y_1^n, y_2^n, \dots, y_{N-1}^n)^T$, $\sigma = \mathrm{diag}[\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{N-1}]$,

$$(Ay)_i = -y_{\bar{x}x,i}, \quad i = 1, 2, \dots, N-1, \quad y_0 = y_N = 0. \tag{32}$$

Пространство H состоит в данном случае из функций $y_i = y(x_i)$, заданных на сетке $\omega_h = \{x_i = ih,\ i = 0, 1, \dots, N,\ hN = 1\}$ и удовлетворяющих условию $y_0 = y_N = 0$. В H введены скалярное произведение и норма

$$(y, z) = \sum_{i=1}^{N-1} y_i z_i h, \quad \|y\| = \sqrt{(y, y)}.$$

Свойства оператора A хорошо изучены [3, с. 37]. Оператор A является самосопряженным и положительно определенным, поэтому можно применить теорему 1, которая приведет к необходимому и достаточному условию устойчивости в форме операторного неравенства (11). Более сложно перейти от (11) к непосредственно проверяемым условиям в виде неравенств для заданных параметров σ_i, τ, h. Для этого необходимо воспользоваться теоремой 3, представив оператор A в виде произведения $A = L^*L$. Наряду с основным пространством введем в рассмотрение пространство H_1 как множество функций $v_i = v(x_i)$, заданных на сетке $\omega_h^+ = \{x_i = ih,\ i = 1, 2, \dots, N\}$, и снабженное скалярным произведением

$$(v, w] = \sum_{i=1}^{N} v_i w_i h.$$

Определим оператор $L : H \to H_1$ формулами

$$(Ly)_i = y_{\bar{x},i} = \frac{y_i - y_{i-1}}{h}, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad y_0 = y_N = 0, \tag{33}$$

и найдем сопряженный к L оператор $L^* : H_1 \to H$. Будем иметь

$$(Ly, v] = \sum_{i=1}^{N} (y_i - y_{i-1})v_i =$$

$$= -\sum_{i=1}^{N-1} y_i(v_{i+1} - v_i) = (y, L^*v),$$

где

$$(L^*v)_i = -v_{x,i} = -\frac{v_{i+1} - v_i}{h}, \quad i = 1, 2, \ldots, N-1. \tag{34}$$

Итак, взаимно сопряженные операторы L и L^* определяются согласно (33), (34). Произведение L^*L приводит к оператору разностной схемы (31), определенному согласно (32).

Перейдем к формулировке теоремы об устойчивости схемы (31). Пусть τ, h – шаги сетки, σ_i – весовые множители, $\mu_i = \sigma_i - 0,5$, $i = 1, 2, \ldots, N-1$, $\gamma = \tau/h^2$. Введем в рассмотрение симметричную трехдиагональную матрицу $Q = (q_{ij})$ порядка N, у которой элементы главной и побочной диагоналей определены следующим образом:

$$q_{ii} = 1 + \gamma(\mu_{i-1} + \mu_i), \quad i = 2, 3, \ldots, N-1, \quad q_{11} = 1 + \gamma\mu_1,$$

$$q_{NN} = 1 + \gamma\mu_{N-1}, \quad q_{i,i+1} = q_{i+1,i} = -\gamma\mu_i, \quad i = 1, 2, \ldots, N-1. \tag{35}$$

Теорема 4 *Если схема (31) устойчива в какой-либо норме, то минимальное собственное значение $q_{\min}$ матрицы Q неотрицательно. Обратно, если $q_{\min} \geq 0$, то схема (31) устойчива в H_{A^2}, так что для ее решения справедлива оценка*

$$\|y^n_{\bar{x}x}\| \leq \left\|y^0_{\bar{x}x}\right\|, \quad n = 0, 1, \ldots, \tag{36}$$

где $\|y^n_{\bar{x}x}\| = \left(\sum\limits_{i=1}^{N-1} h(y^n_{\bar{x}x,i})^2\right)^{1/2}$.

Доказательство. Для схемы (31) выполнены все условия теоремы 3, поэтому справедливо необходимое и достаточное условие устойчивости (25). Пусть операторы L и L^* определены согласно (33), (34). Рассмотрим оператор

$$Q = E + \tau L\mu L^*, \quad \mu = \mathrm{diag}[\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{N-1}], \tag{37}$$

где $\mu_i = \sigma_i - 0,5$, $i = 1, 2, \ldots, N-1$. В разностном представлении этот оператор задается формулами

$$(Qv)_1 = v_1 - \frac{\tau\mu_1}{h} v_{x,1},$$

$$(Qv)_i = v_i - \tau(\mu v_x)_{\bar{x},i}, \quad i = 1, 2, \ldots, N-1,$$

$$(Qv)_N = v_N + \frac{\tau\mu_{N-1}}{h} v_{\bar{x},N},$$

или, более подробно,

$$(Qv)_1 = (1 + \gamma\mu_1)v_1 - \gamma\mu_1 v_2,$$

$$(Qv)_i = -\gamma\mu_{i-1}v_{i-1} + (1 + \gamma(\mu_i + \mu_{i-1}))v_i -$$

$$-\gamma\mu_i v_{i+1}, \quad i = 2, 3, \ldots, N-1,$$

$$(Qv)_N = -\gamma\mu_{N-1}v_{N-1} + (1 + \gamma\mu_{N-1})v_N.$$

Таким образом, матрица с элементами (35) является матрицей оператора (37), отвечающего согласно теореме 3 за устойчивость схемы (31). Неотрицательность оператора Q эквивалентна неотрицательности всех собственных значений матрицы (35), т.е. условию $q_{\min} \geq 0$. При этом устойчивость схемы (31) в пространстве H_{A^2}, гарантированная теоремой 3, означает выполнение оценки (36). Теорема 4 доказана.

Заметим, что нахождение минимального собственного значения симметричной трехдиагональной матрицы является несложной вычислительной задачей и может быть осуществлено, например, методом бисекции (см. [6]).

В отдельных случаях собственные значения матрицы (35) удается найти в аналитическом виде. Это прежде всего случай постоянного весового множителя, когда $\sigma_i = \sigma$, $i = 1, 2, \ldots, N-1$. При этом собственные значения q_k матрицы (35) имеют вид

$$q_k = 1 + 4\mu\gamma \sin^2 \frac{\pi k h}{2}, \quad k = 0, 1, \ldots, N-1,$$

где $\mu = \sigma - 0,5$, $\gamma = \tau/h^2$. Тем самым, теорема 4 приводит к известному необходимому и достаточному условию устойчивости

$$\sigma \geq \frac{1}{2} - \frac{h^2}{4\tau}. \tag{38}$$

Приведем теперь некоторые следствия теоремы 4, относящиеся к схемам с переменными весовыми множителями.

С л е д с т в и е 1. *Пусть $\sigma_i = 1$, если i нечетное, и $\sigma_i = 0$, если i четное. Тогда условие $\gamma \leq 1$ необходимо для устойчивости схемы (31) в любой норме и достаточно для устойчивости в H_{A^2}.*

Доказательство. Запишем матрицу оператора (37) в виде $Q = E+\gamma M$, где E – единичная матрица порядка N, M – симметричная трехдиагональная матрица с элементами

$$m_{ii} = \mu_{i-1} + \mu_i, \quad i = 2, 3, \ldots, N-1, \quad m_{11} = \mu_1,$$

$$m_{NN} = \mu_{N-1}, \quad m_{i,i+1} = m_{i+1,i} = -\mu_i, \tag{39}$$
$$i = 1, 2, \ldots, N-1.$$

Для указанных σ_i имеем $\mu_i = (-1)^{i-1}\cdot 0,5$, $i = 1, 2, \ldots, N-1$. Задача на собственные значения $Mv = mv$ или, более подробно,

$$(-1)^{i-1}(v_{i-1} - v_{i+1}) = 2mv_i, \quad i = 2, 3, \ldots, N-1,$$

$$v_1 - v_2 = 2mv_1, \quad (-1)^{N-1}(v_{N-1} - v_N) = 2mv_N,$$

имеет решение $m_k = \sin\dfrac{\pi k}{N}$,

$$v_j^{(k)} = (-1)^{j(j-1)/2}\cos\left[\pi\left(\frac{k}{N}+\frac{1}{2}\right)\left(j-\frac{1}{2}\right)\right], \quad j = 1, 2, \ldots, N.$$

Здесь $k = 0, \pm1, \pm2, \ldots, \pm\left(\dfrac{N}{2}-1\right), -\dfrac{N}{2}$, если N четное, и $k = 0, \pm1, \pm2, \ldots, \pm\dfrac{N-1}{2}$, если N нечетное. Минимальным среди собственных значений $q_k = 1+\gamma\sin\dfrac{\pi k}{N}$ матрицы (35) является

$$q_{\min} = \begin{cases} 1-\gamma\cos\pi h, & \text{если } N \text{ четное}, \\ 1-\gamma\cos\dfrac{\pi h}{2}, & \text{если } N \text{ нечетное}. \end{cases}$$

Из неравенства $q_{\min} \geq 0$ при фиксированном γ и при $h \to 0$ получаем требуемое условие $\gamma \leq 1$.

Следствие 2. *Пусть $\sigma_i = 0,5$, если i четное. Тогда условия*

$$\sigma_i \geq \frac{1}{2} - \frac{1}{2\gamma} \tag{40}$$

для нечетных i необходимы и достаточны для устойчивости схемы (31).

Доказательство. Поскольку $\mu_i = 0$ при четных i, уравнение $Mv = mv$ распадается на несколько независимых задач на собственные значения для матриц второго порядка. Собственные значения m_k матрицы (39) имеют вид

$$m_k = 2\mu_k, \quad k = 1, 2, \dots, N-1,$$

и условие $q_{\min} \ge 0$ совпадает с условием (40). Заметим, что система неравенств (40) эквивалентна одному неравенству

$$\sigma_{\min} \ge \frac{1}{2} - \frac{1}{2\gamma},$$

где $\sigma_{\min}$ – минимальный из всех весовых множителей σ_i.

Следствие 3. *Пусть $\sigma_2 = \sigma_3 = \dots = \sigma_{N-2} = 0,5$. Тогда условия $\sigma_1 \ge \frac{1}{2} - \frac{1}{2\gamma}$, $\sigma_{N-1} \ge \frac{1}{2} - \frac{1}{2\gamma}$ необходимы и достаточны для устойчивости схемы (31).*

Приведем полезные достаточные условия устойчивости, следующие из теоремы 4.

Теорема 5 *Если выполнены неравенства*

$$\sigma_i \ge \frac{1}{2} - \frac{1}{2\gamma}, \quad i = 1, 2, \dots, N-1, \quad \gamma = \frac{\tau}{h^2}, \tag{41}$$

$$\frac{\sigma_i + \sigma_{i-1}}{2} \ge \frac{1}{2} - \frac{1}{4\gamma}, \quad i = 2, 3, \dots, N-1, \tag{42}$$

то схема (31) устойчива в H_{A^2}.

Доказательство. Из теоремы Гершгорина (см. [7], с. 390) следует, что для неотрицательности собственных значений матрицы (35) достаточно потребовать

$$1 + \gamma\left(\mu_{i-1} + \mu_i\right) \ge \gamma\left(|\mu_{i-1}| + |\mu_i|\right), \quad i = 2, 3, \dots, N-1,$$

$$1 + \gamma\mu_1 \ge \gamma\,|\mu_1|, \quad 1 + \gamma\mu_{N-1} \ge \gamma\,|\mu_{N-1}|.$$

Отсюда, используя эквивалентность неравенства $|x_1| + |x_2| \le a$ при вещественных x_1 и x_2 системе двух неравенств

$$|x_1 + x_2| \le a, \quad |x_1 - x_2| \le a,$$

приходим к условиям (41), (42).

Рассмотрим еще несколько частных случаев схемы (31). Из (41), (42), следует, что все схемы с $\sigma_i \ge 0,5$, $i = 1, 2, \dots, N-1$, абсолютно устойчивы, т.е. устойчивы при любых $\gamma = \tau/h^2$.

Если для некоторого k имеем $\sigma_i \geq 0,5$, $i \neq k$, и $\sigma_k = 0$, то схема устойчива при условии $\gamma \leq 1$.

Если $\sigma_i = \dfrac{1}{2} - \dfrac{h^2}{12\tau}$, $i \neq k$ (схема повышенного порядка точности), и $\sigma_k = 0$, то схема устойчива при условии $\gamma \leq 5/6$.

Если $\sigma_i = \dfrac{1}{2} - \dfrac{h^2}{12\tau}$, $i \neq k$, $\sigma_k = 0,5$, то схема абсолютно устойчива.

Устойчивость в H_A. Если оператор A схемы (1) является самосопряженным и положительным, можно ставить вопрос о необходимых и достаточных условиях устойчивости в пространстве H_A и вообще в пространствах H_{A^m}, где $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Обозначим $\mu = \sigma - 0,5$ и

$$P_m = A^{m-1} + \frac{\tau}{2}\left(A^{m-1}\mu A + A\mu A^{m-1}\right). \tag{43}$$

Теорема 6 *Если $A^* = A > 0$, $\sigma^* = \sigma$, то для устойчивости схемы (1), (5) в пространстве H_{A^m} необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство*

$$P_m \geq 0. \tag{44}$$

Доказательство следует из эквивалентности неравенства (43) неравенству (3) с $D = A^m$.

При $m = 2$ из (43), (44) получаем неравенство

$$P_2 = A + \tau A\mu A \geq 0, \tag{45}$$

которое, как следует из теоремы 1, необходимо для устойчивости не только в H_{A^2}, но и в любой норме. Таким образом, для любого m из неравенства

$$A^{m-1} + \frac{\tau}{2}\left(A^{m-1}\mu A + A\mu A^{m-1}\right) \geq 0 \tag{46}$$

следует неравенство (44). Как показывают простейшие примеры, неравенство (46) при $m \neq 2$ не следует из (45). Неэквивалентность (45) и (46) можно получить также из представления

$$P_m = 0,5(A^{m-2}P_2 + P_2A^{m-2}).$$

Остановимся подробнее на критерии устойчивости схемы (31) в пространстве H_A. Поставим в соответствие схеме (31) симметричную трехдиагональную матрицу $P_1 = (p_{ij}^{(1)})$ порядка $N-1$, где

$$p_{ii}^{(1)} = 1 + 2\gamma\mu_i, \quad i = 1, 2, \ldots, N-1,$$

$$p_{i,i+1}^{(1)} = p_{i+1,i}^{(1)} = -0,5\gamma(\mu_i + \mu_{i+1}), \quad i = 1, 2, \dots, N-2. \tag{47}$$

Из теоремы 6 при $m = 1$ следует

Теорема 7 *Для устойчивости схемы (31) в пространстве H_A необходимо и достаточно, чтобы все собственные значения матрицы (47) были неотрицательными.*

Рассмотрим несколько следствий из этой теоремы. Если σ не зависит от i, то получаем известное условие устойчивости (38). Пусть в схеме (31) $\sigma_i = 0$, если i четное, и $\sigma_i = 1$, если i нечетное. Тогда для устойчивости в H_A, так же, как и в H_{A^2}, необходимо и достаточно, чтобы $\gamma \leq 1$.

Приведем пример схемы (31), устойчивой в H_{A^2} и неустойчивой в H_A. Пусть σ_1 - любое число и $\sigma_2 = \sigma_3 = \dots = \sigma_{N-1} = 0,5$. Тогда собственными значениями матрицы (47) являются 1 (кратность $N-3$) и $1 + \gamma(1 \pm \sqrt{5}/2)\mu_1$. Необходимое и достаточное условие устойчивости в H_A принимает вид

$$-(2\sqrt{5} - 4) \leq \gamma\mu_1 \leq 2\sqrt{5} + 4. \tag{48}$$

В то же время, согласно следствию 3 из теоремы 4, схема устойчива в H_{A^2} тогда и только тогда, когда $\gamma\mu_1 \geq -0,5$. Таким образом, в промежутках $-0,5 \leq \mu_1\gamma < -(2\sqrt{5}-4)$, $\mu_1\gamma > 2\sqrt{5}+4$ схема устойчива в H_{A^2} и неустойчива в H_A.

Аналогично теореме 5 доказывается следующая теорема о достаточных условиях устойчивости в H_A.

Теорема 8 *Если выполнены неравенства*

$$1 - 0,5\gamma\mu_{i-1} + \gamma\mu_i - 0,5\gamma\mu_{i+1} \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, N-2,$$

$$1 + 0,5\gamma\mu_{i-1} + 3\gamma\mu_i + 0,5\gamma\mu_{i+1} \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, N-2,$$

$$1 + 0,5\gamma\mu_{i-1} + 2\gamma\mu_i - 0,5\gamma\mu_{i+1} \geq 0, \quad i = 2, 3, \dots, N-1,$$

$$1 - 0,5\gamma\mu_{i-1} + 2\gamma\mu_i + 0,5\gamma\mu_{i+1} \geq 0, \quad i = 2, 3, \dots, N-1,$$

где $\mu_i = \sigma_i - 0,5$, $\mu_0 = -\mu_1$, $\mu_N = -\mu_{N-1}$, $\gamma = \tau/h^2$, то схема (31) устойчива в H_A.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 93-012-801).

Литература

1. Самарский А.А. // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 1967. Т. 7, N 5. С. 1096 – 1133.

2. Самарский А.А. // Докл. АН СССР. 1968. Т. 181, N 4. С. 808 – 811.

3. Самарский А.А., Гулин А.В. Устойчивость разностных схем. М., 1973.

4. Самарский А.А., Гулин А.В. // Мат. сб. 1976. Т. 99(141), N 3. С. 299 – 330.

5. Гулин А.В. // Докл. АН СССР. 1979. Т. 244, N 4. С. 797 – 799.

6. Уилкинсон Дж.Х. Алгебраическая проблема собственных значений. М., 1970.

7. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М., 1988.