ВСЕСОЮЗНЫЙ ЦЕНТР МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Академии наук СССР

А.А. Самарский, П.Н. Вабищевич

РЕГУЛЯРИЗОВАННЫЕ РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ С НЕСАМОСОПРЯЖЕННЫМИ ОПЕРАТОРАМИ

Препринт № 18 за 1991 г.

Москва

УДК 519.6

АННОТАЦИЯ

Принцип регуляризации разностных схем развивается для двухслойных разностных схем с несамосопряженными разностными операторами. Рассматривается обычная краевая задача для параболического уравнения второго порядка с несамосопряженным эллиптическим оператором. Строятся устойчивые разностные схемы с различными типами регуляризаторов. Исследование регуляризованных разностных схем базируется на соответствующем энергетическом тождестве. Получены достаточные условия устойчивости двухслойных разностных схем с несамосопряженными операторами. В качестве второго примера рассматриваются разностные схемы для некорректной параболической задачи с обратным временем. Исследуются соответствующие ρ-устойчивые разностные схемы.

ABSTRACT

Principle of difference schemes regularization is developed for two- layers difference achemes with nonselfadjoint difference operators. A common boundary problem for a second order parabolic equation with nonselfadjoint elliptic operator is considered. Stable difference schemes with different types of regularizators are constructed. Investigation of regularized difference schemes is based on an appropriate energetic identity. Sufficient conditions of stability of two- layer differance schemes with nonselfadjoint operatora are obtained. Difference schemes for incorrect parabolic problem with reversed tima are treated as the second example. Appropriate ρ-stable difference schemes are investigated.

Введение

Теория регуляризации разностных схем [1] позволяет строить классы устойчивых разностных схем на основе введения регуляризирующих операторов. Выбор регуляризатора подчинен дополнительным соображениям, связанным с аппроксимацией и вычислительной реализацией соответствующей разностной схемы. На этом пути могут быть, в частности, построены экономичные разностные схемы для приближенного решения нестационарных задач математической физики.

В работах [2,3] теория регуляризации применяется для построения разностных схем для неустойчивых эволюционных задач. В [2] рассматриваются двухслойные разностные схемы на примере задачи с обратным временем для параболических уравнений. Аналогичные вопросы для трехслойных разностных схем (задача Коши для эллиптических уравнений) обсуждаются в [3]. Обобщение результатов теории регуляризации разностных схем на случай некорректных задач достигается за счет использования ρ-устойчивых разностных схем с $\rho > 1$.

В [1-3] теория регуляризации применяется для разностных схем с самосопряженными разностными операторами. Получены соответствующие необходимые и достаточные условия устойчивости регуляризованных разностных схем. Отдельного рассмотрения заслуживает случай разностных схем с несамосопряженными операторами. В общей теории разностных схем [4] совпадающие необходимые и достаточные условия двухслойных разностных схем получены в случае, когда один из разностных операторов является самосопряженным и положительным. Окончательные результаты получены также в случае схем с весами.

В данной работе теория регуляризации развивается для двухслойных разностных схем с несамосопряженными операторами. Рассматриваются разностные схемы для корректной краевой задачи с различными (самосопряженными и несамосопряженными) регуляризаторами. Строятся ρ-устойчивые разностные схемы для некорректной задачи. Достаточные условия устойчивости получены на основе энергетического тождества и формулируются в виде легко проверяемых операторных неравенств. Полученные результаты рассматриваются как естественное развитие теории регуляризации разностных схем [1-3] для корректных и некорректных задач для нестационарных уравнений математической физики.

1. Краевые задачи

Обозначим через Ω ограниченную область m-мерного пространства R^m с достаточно гладкой границей $\partial\Omega$. В $R^m \times \{-\infty < t < \infty\}$ рассмотрим ограниченный цилиндр

$$Q = \{ (x,t) \mid x \in \Omega, \quad 0 < t < T \}, \quad T > 0,$$

где $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$, с боковой поверхностью

$$\Gamma = \{ (x,t) \mid x \in \partial\Omega, \quad 0 < t < T \}.$$

Определим для $x \in \Omega$ равномерно эллиптический оператор

$$L u \equiv - \sum_{i,j=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) + \sum_{i=1}^{m} a_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \qquad (1.1)$$

с достаточно гладкими коэффициентами $a_{ij}(x) = a_{ji}(x)$, $a_i(x)$, $x \in \Omega$.

Будем рассматривать две краевые задачи. Пусть $u(x,t)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t} + L u = 0, \quad (x,t) \in Q, \qquad (1.2)$$

граничным условиям

$$u(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \Gamma \qquad (1.3)$$

при заданном начальном условии

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in D. \qquad (1.4)$$

Задача (1.1)-(1.4) есть обычная (корректная) краевая задача для параболического уравнения с несамосопряженным эллиптическим оператором $\mathcal{L}$. В некорректной задаче с обратным временем (ретроспективная обратная задача [5]) ищется решение уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \mathcal{L}\, u = 0, \quad (x,t) \in Q, \tag{1.5}$$

дополненного краевыми и начальными условиями (1.3),(1.4). Некорректность задачи (1.3)-(1.5) обусловлена неустойчивостью решения относительно малых изменений начального условия (функции $u_0(x)$ в (1.4)).

От дифференциального оператора $\mathcal{L}$, определенного по (1.1) с учетом (1.3), перейдем (см. [6]) к сеточному оператору $\mathcal{A}$. Не приводя конкретного выражения для $\mathcal{A}$, отметим лишь важнейшие его свойства. На сетке ω_h определим пространство сеточных функций $H = L_2(\omega_h)$ со скалярным произведением

$$(y,z) = \sum_{x \in \omega_h} y(x)\, z(x)\, h_1 h_2 \ldots h_m .$$

В H оператор $\mathcal{A}$ положителен ($\mathcal{A} > 0$) и представим в виде суммы самосопряженного и кососимметричного операторов:

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 + \mathcal{A}_1, \tag{1.6}$$

где

$$\mathcal{A}_0 = \frac{1}{2} (\mathcal{A} + \mathcal{A}^*), \quad \mathcal{A}_1 = \frac{1}{2} (\mathcal{A} - \mathcal{A}^*), \tag{1.7}$$

причем $\mathcal{A}_0 = \mathcal{A}_0^* > 0$, $\mathcal{A}_1 = - \mathcal{A}_1^*$.

Помимо этого примем, что для кососимметричного оператора $\mathcal{A}_1$ выполнено условие подчинения

$$\|\mathcal{A}_1 v\|^2 \leqslant c\, (\mathcal{A}_0 v, v) \tag{1.8}$$

с положительной постоянной c, которая не зависит от шагов сетки ω_h. Для эллиптических операторов (1.1) с самосопряженной главной частью оператор $\mathcal{A}_1$ связан с аппроксимацией слагаемых с первыми производными.

С учетом введенных обозначений от задачи (1.1)-(1.4) придем к следующей дифференциально- разностной задаче. Решение определяется из уравнения

$$\frac{dv}{dt} + \mathcal{A}\, v = 0, \tag{1.9}$$

дополненного начальным условием

$$v(x,0) = u_0(x), \quad x \in \omega_h. \tag{1.10}$$

Аналогично для неустойчивой задачи (1.3)-(1.5) получим уравнение

$$\frac{dv}{dt} - \mathcal{A}\, v = 0, \tag{1.11}$$

которое дополняется начальным условием (1.10). Для того, чтобы от (1.9),(1.10) и (1.10),(1.11) перейти к соответствующим разностным схемам введем по переменной t равномерную сетку

$$\omega_\tau = \{ t \mid t = n\,\tau, \quad n = 0,1, \ldots, N, \quad N\,\tau = T\}$$

с шагом $\tau > 0$.

2. Регуляризованные разностные схемы

Рассмотрим сначала корректную начально- краевую задачу для параболического уравнения. Регуляризованные разностные схемы для задачи (1.9),(1.10) построим на основе простейшей явной схемы:

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{\tau} + \mathcal{A}\, y_n = 0, \quad n = 0,1, \ldots . \tag{2.1}$$

Двухслойные схемы записываются в каноническом виде [4,6]:

$$B\,\frac{y_{n+1} - y_n}{\tau} + A\, y_n = 0, \quad n = 0,1, \ldots . \tag{2.2}$$

Для схемы (2.1) имеем $B = E$, $A = \mathcal{A}$.

В соответствии с принципом регуляризации перейдем от исходной разностной схемы (2.1) к некоторой другой (возмущенной) схеме. Пусть $\mathcal{R} = > 0$ – регуляризирующий сеточный оператор, через α обозначим параметр регуляризации (возмущения). Регуляризованную схему для (2.1) запишем в виде

$$(E + \alpha \mathcal{R}) \frac{y_{n+1} - y_n}{\tau} + \mathcal{A} y_n = 0, \quad n = 0,1,\dots . \quad (2.3)$$

В простейшем случае регуляризирующий сеточный оператор задается в виде $\mathcal{R} = \mathcal{A}$. Тогда регуляризованная схема (2.3) идентифицируется с разностными схемами с весами ($\alpha = \sigma \tau$).

Теорема 1. *Регуляризованная схема* (2.3) *с* $\mathcal{R} = \mathcal{A}$, $\mathcal{A} \geq 0$ *безусловно устойчива в* H *и в* H_D, $D = B^*B$, $B = E + \alpha \mathcal{R}$ *при* $\alpha \geq \tau/2$.

Доказательство устойчивости в H хорошо известно [4,6]. Запишем схему (2.5) при $\mathcal{R} = \mathcal{A}$ в виде:

$$\begin{aligned} & y_{n+1} = S y_n, \\ & S = E - \tau B^{-1} A = E - \tau (E + \alpha \mathcal{A})^{-1} \mathcal{A}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Устойчивость в H имеет место, если $J = E - S^* S \geq 0$. Для перестановочных операторов A и B имеем

$$\begin{aligned} & E - S^*S = E - (E - \tau A^* (B^*)^{-1}) (E - \tau B^{-1} A) = \\ & = \tau ((B^*)^{-1} A^* + A B^{-1}) - \tau^2 (B^*)^{-1} A^* A B^{-1} \geq 0. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Домножая (2.5) слева на B^*, а справа на B (неравенство при этом остается в силе), получим для (2.4)

$$\begin{aligned} & B^*(E - S^*S) B = \tau (A^*B + B^*A) - \tau^2 A^*A = \\ & = \tau (A^* + A) + \tau (2 \alpha - \tau) A^*A \geq 0. \end{aligned} \quad (2.6)$$

С учетом предположения $\mathcal{A} \geq 0$ неравенство (2.6) будет выполнено при $\alpha \geqslant \tau/2$.

Доказательство устойчивости в H_D при $D = B^*B$ проводится полностью аналогично. В терминах операторных неравенств условие устойчивости в H_D, $D = D^* > 0$ эквивалентно выполнению [4] неравенства $J = D - S^*D\,S \geqslant 0$. В нашем случае $D = B^*B$ и поэтому

$$D - S^*D\,S = B^*B - (B^* - \tau\,A^*)\,(B - \tau\,A) = \\ = \tau\,(A^*B + B^*A) - \tau^2\,A^*A. \tag{2.7}$$

Подстановка $B = E + \alpha\,\mathcal{A}$, $A = \mathcal{A}$ в (2.7) дает неравенство

$$\tau\,(\mathcal{A}^* + \mathcal{A}) - (\tau^2 - 2\,\alpha\,\tau)\,\mathcal{A}^*\mathcal{A} \geqslant 0.$$

Неравенство будет выполнено для операторов $\mathcal{A} \geqslant 0$ при $\alpha \geqslant \tau/2$.

В [4] доказана устойчивость схем с весами в H_D, если операторы A и D перестановочны. Однако из этого не следует устойчивость в H_D при $D = B^*B$.

Для рассмотренных регуляризованных схем с $\mathcal{R} = \mathcal{A}$ устойчивость доказана без учета условия подчиненности (1.8). Однако на этом пути не удается рассмотреть некоторые другие возможные регуляризаторы, например, $\mathcal{R} = \mathcal{A}_0$.

Теорема 2. *Для разностной схемы* (2.2) с $A_0 = 0.5\,(A + A^*) > 0$ *при*

$$B - \frac{\tau}{2}\,A \geqslant \varepsilon\,E, \quad \varepsilon > 0 \tag{2.8}$$

и выполнении неравенства подчиненности

$$\|A_1 y\|^2 \leqslant c\,(A_0\,y,\,y) \tag{2.9}$$

($A_1 = 0.5\,(A - A^*)$) *справедлива оценка*

$$\|y_{n+1}\|_{A_0} \leqslant \left(1 + \frac{c}{4\,\varepsilon}\,\tau\right)\|y_n\|_{A_0}. \tag{2.10}$$

Доказательство основывается на следующем простом утверждении.

Лемма. *Для разностной схемы* (2.2) *справедливо энергетическое* *тождество*

$$\tau\ ((2\ B - \tau\ A)\ y_t,\ y_t) + (A_0\ y_{n+1},\ y_{n+1}) - \\ - (A_0\ y_n,\ y_n) + 2\ \tau\ (A_1\ y_n,\ y_t) = 0. \tag{2.11}$$

Для того, чтобы получить (2.11) достаточно скалярно умножить (2.2) на $2\ \tau y_t = 2\ (y_{n+1} - y_n)$ и учесть равенство $A = A_0 + A_1$.

Принимая во внимание равенство (2.11) и условие (2.8), имеем

$$2\ \tau\ \varepsilon\ (y_t,\ y_t) + (A_0\ y_{n+1},\ y_{n+1}) - (A_0\ y_n,\ y_n) \leqslant \\ \leqslant 2\ \tau\ |-(A_1\ y_n,\ y_t)| \tag{2.12}$$

Правая часть оценивается с учетом (2.9) следующим образом:

$$|-(A_1\ y_n,\ y_t)| \leqslant \varepsilon\ \|y_t\|^2 + \frac{1}{4\ \varepsilon}\ \|A_1\ y_n\|^2 \leqslant \\ \leqslant \varepsilon\ \|y_t\|^2 + \frac{c}{4\ \varepsilon}\ (A_0\ y_n,\ y_n). \tag{2.13}$$

Подстановка (2.13) в (2.12) дает

$$(A_0\ y_{n+1},\ y_{n+1}) \leqslant (1 + \frac{c}{2\ \varepsilon}\ \tau)\ (A_0\ y_n,\ y_n).$$

Отсюда с учетом неравенства

$$(1 + \frac{c}{2\ \varepsilon}\ \tau)^{1/2} \leqslant 1 + \frac{c}{4\ \varepsilon}\ \tau$$

и следует искомая оценка устойчивости (2.10).

Используем теперь доказанную теорему 2 для исследования регуляризованной разностной схемы (2.3) при различных регуляризаторах.

Следствие 1. Для регуляризованной схемы (2.3) с $\mathcal{R} = \mathcal{A}$ или $\mathcal{R} = \mathcal{A}_0$ при $\alpha \geqslant \tau/2$ и выполнении условия подчиненности (1.8) справедлива оценка

$$\|y_{n+1}\|_{\mathcal{A}_0} \leqslant \left(1 + \frac{c}{4}\tau\right) \|y_n\|_{\mathcal{A}_0}.$$

В данном случае неравенство (2.8) очевидно выполнено при $\alpha \geqslant \tau/2$ и выборе $\varepsilon = 1$.

Следствие 2. При выполнении (1.8) и выборе $\mathcal{R} = \mathcal{A}^* \mathcal{A}$ или $\mathcal{R} = \mathcal{A}_0^2$ для разностной схемы (2.3) имеет место

$$\|y_{n+1}\|_{\mathcal{A}_0} \leqslant \left(1 + \frac{c}{4\varepsilon}\tau\right) \|y_n\|_{\mathcal{A}_0}, \tag{2.14}$$

если

$$\alpha \geqslant \frac{\tau^2}{16(1 - \varepsilon)}. \tag{2.15}$$

Например, при $\mathcal{R} = \mathcal{A}^*\mathcal{A}$ из неравенства (2.8) получим

$$B - \frac{\tau}{2} A = E + \alpha \mathcal{A}^*\mathcal{A} - \frac{\tau}{2} \mathcal{A} =$$
$$(\alpha^{1/2} \mathcal{A}^* - \frac{\tau}{4} \alpha^{-1/2} E) (\alpha^{1/2} \mathcal{A} - \frac{\tau}{4} \alpha^{-1/2} E) +$$
$$+ (1 - \frac{\tau}{16\alpha})E \geqslant \varepsilon E.$$

Отсюда следует оценка (2.15) для параметра регуляризации α, а из (2.10) - оценка (2.14) для разностного решения.

Тем самым с помощью теоремы 2 при условии подчиненности (1.8) доказана устойчивость регуляризованных разностных схем (2.3) в H_D, $D = \mathcal{A}_0$ с регуляризаторами $\mathcal{R} = \mathcal{A}_0$, $\mathcal{R} = \mathcal{A}_0^* \mathcal{A}_0$ и $\mathcal{R} = \mathcal{A}_0^2$.

3. Регуляризованные разностные схемы для неустойчивой задачи

Применим теперь принцип регуляризации разностных схем для построения разностных схем для некорректной задачи (1.10),(1.11). Выпишем явную разностную схему для (1.10),(1.11):

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{\tau} - \mathcal{A} y_n = 0, \quad n = 0,1, \dots . \tag{3.1}$$

Регуляризованная схема для (3.1) записывается в каноническом виде (2.2) с

$$B = E + \alpha \mathcal{R}, \quad A = -\mathcal{A}. \tag{3.2}$$

Для разностной схемы (3.2),(2.2) сформулируем утверждение, аналогичное теореме 1.

Теорема 3. *Регуляризованная схема* (3.2),(2.2) *с* $\mathcal{R} = \mathcal{A}$, $\mathcal{A} \geq 0$ *ρ-устойчива в* H *и в* H_D, $D = B^*B$ *с*

$$\rho = 1 + \frac{1}{\alpha}\tau. \tag{3.3}$$

Доказательство проводится аналогично случаю прямой задачи. Схема (3.2) при $R = \mathcal{A}$ переписывается в виде

$$y_{n+1} = S\, y_n, \quad S = E + \tau(E + \alpha\, \mathcal{A})^{-1}\mathcal{A}. \tag{3.4}$$

Для двухслойных разностных схем [4] ρ-устойчивость имеет место, если $\mathcal{J} = \rho^2 E - S^*S \geq 0$. Аналогично (2.5) для перестановочных операторов A и B имеем

$$\begin{aligned} &\rho^2 E - S^*S = \\ &= \rho^2 E - (E - \tau A^* (B^*)^{-1})(E - \tau B^{-1}A) = \\ &= (\rho^2 - 1) E + \tau ((B^*)^{-1}A^* + A B^{-1}) - \\ &- \tau^2 (B^*)^{-1}A^*A B^{-1} \geq 0. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Домножая (3.5) слева на B^*, а справа на B, получим

$$\begin{aligned} &B^*(\rho^2 E - S^*S) B = \\ &= (\rho^2 - 1) B^*B + \tau (A^*B + B^*A) - \tau^2 A^*A \geq 0. \end{aligned}$$

Для схемы (3.2),(3.4) это неравенство принимает вид

$$(\rho^2 - 1) E + (\alpha (\rho^2 - 1) - \tau) (\mathcal{A}^* + \mathcal{A}) + \\ + (\alpha^2 (\rho^2 - 1) - 2\alpha \tau - \tau^2) \mathcal{A}^*\mathcal{A} \geqslant 0. \tag{3.6}$$

Первый член в левой части (3.6) отрицателен в силу $\rho > 1$. Поэтому неравенство (3.6) будет выполнено при

$$\tau^2 + 2 \alpha \tau + (1 - \rho^2) \alpha^2 \leqslant 0, \tag{3.7}$$

$$\tau + (1 - \rho^2) \alpha \leqslant 0. \tag{3.8}$$

Учитывая только положительные α, получим, что неравенство (3.7) выполняется при

$$\alpha \geqslant \alpha_0 = \frac{\tau}{\rho - 1}. \tag{3.9}$$

При таких α выполняется и неравенство (3.8).

В нашем случае по заданному параметру регуляризации α ищется величина ρ. Из (3.9) следует, что мы можем взять ρ в виде (3.3), что и завершает доказательство устойчивости разностной схемы (3.2),(2.2) в H.

Разностная схема (2.2) ρ-устойчива в H_D, если выполнено неравенство $\mathcal{J} = \rho^2 D - S^* D S \geqslant 0$. В случае $D = B^* B$ имеем

$$\rho^2 D - S^* D S = \rho^2 B^* B - (B^* - \tau A^*) (B - \tau A) = \\ = (\rho^2 - 1) B^* B + \tau (A^* B + B^* A) - \tau^2 A^* A. \tag{3.10}$$

При задании B и A в виде (3.2) и $\mathcal{R} = \mathcal{A}$ неравенство (3.10) дает уже рассмотренное неравенство (3.6). Отсюда и следует устойчивость разностной схемы (3.2),(2.2) и в H_D, $D = B^* B$.

Рассмотрим теперь разностные схемы для (1.10),(1.11) при выборе других регуляризаторов.

Теорема 4. *Для разностной схемы* (2.2) с

$$A = -\mathcal{A}, \quad \mathcal{A}_0 = \frac{1}{2}(\mathcal{A} + \mathcal{A}^*) > 0 \tag{3.11}$$

при

$$B \geqslant \tau\beta\mathcal{A} + \varepsilon E, \tag{3.12}$$

где $\beta = 1/(\rho - 1)$, $\varepsilon > 0$, $\rho > 1$, *и выполнении неравенства подчиненности*

$$\|\mathcal{A}_1 y\|^2 \leqslant c\,(\mathcal{A}_0 y, y) \tag{3.13}$$

$(\mathcal{A}_1 = 0.5\,(\mathcal{A} - \mathcal{A}^*))$ *справедлива оценка*

$$\|y_{n+1}\|_{\mathcal{A}_0} \leqslant (\rho + \frac{c}{4\varepsilon}\tau)\,\|y_n\|_{\mathcal{A}_0}. \tag{3.14}$$

Это утверждение можно рассматривать как обобщение теоремы 2 на неустойчивые задачи типа (1.10),(1.11), для которых характерно изменение знака оператора A.

Для схемы (2.2),(3.11) в силу леммы имеем энергетическое равенство

$$2\tau\,((B + \frac{1}{2}\tau A)\,y_t, y_t) - (\mathcal{A}_0 y_{n+1}, y_{n+1}) + \\ + (\mathcal{A}_0 y_n, y_n) - 2\tau\,(\mathcal{A}_1 y_n, y_t) = 0. \tag{3.15}$$

Аналогично (2.13) при выполнении (3.13) имеем

$$|(\mathcal{A}_1 y_n, y_t)| \leqslant \varepsilon\,\|y_t\|^2 + \frac{1}{4\varepsilon}\|\mathcal{A}_1 y_n\|^2 \leqslant \\ \leqslant \varepsilon\,\|y_t\|^2 + \frac{c}{4\varepsilon}(\mathcal{A}_0 y_n, y_n). \tag{3.16}$$

Принимая во внимание (3.12),(3.16), из (3.15) получим

$$2\tau^2((\beta + \frac{1}{2})\mathcal{A}_0 y_t, y_t) - (\mathcal{A}_0 y_{n+1}, y_{n+1}) + \tag{3.17}$$

$$+ (A_0 y_n, y_n) \leqslant \frac{c\,\tau}{2\,\varepsilon} (A_0 y_n, y_n).$$

В силу обобщенного неравенства Коши- Буняковского

$$(A_0 y_n, y_{n+1}) \leqslant \|y_n\|_{A_0} \|y_{n+1}\|_{A_0}$$

получим

$$\begin{aligned} \tau^2 (A_0 y_t, y_t) &= \|y_{n+1} - y_n\|^2 \geqslant \\ &\geqslant \|y_{n+1}\|^2_{A_0} + \|y_n\|^2_{A_0} - 2 \|y_{n+1}\|_{A_0}\|y_n\|_{A_0}. \end{aligned} \tag{3.18}$$

Подставляя (3.18) в (3.17), придем к неравенству

$$\begin{aligned} &2\,\beta\, \|y_{n+1}\|^2_{A_0} - 2\,(2\,\beta + 1)\, \|y_{n+1}\|_{A_0}\|y_n\|_{A_0} + \\ &+ (2\,\beta + 2 - \frac{c\,\tau}{2\,\varepsilon})\, \|y_n\|^2_{A_0} \leqslant 0. \end{aligned} \tag{3.19}$$

Обозначим

$$\xi = \|y_{n+1}\|_{A_0} \;/\; \|y_n\|_{A_0}. \tag{3.20}$$

Тогда неравенство (3.19) дает

$$\beta\,\xi^2 - (2\,\beta + 1)\,\xi + (\beta + 1 - \frac{c\,\tau}{4\,\varepsilon}) \leqslant 0. \tag{3.21}$$

Неравенство (3.21) будет выполнено при $1 \leqslant \xi \leqslant \xi^*$, где

$$\begin{aligned} \xi^* &= (2\,\beta + 1 + (1 + \frac{c\,\tau}{\varepsilon}\,\beta)^{1/2})/(2\,\beta) < \\ &< 1 + \frac{1}{\beta} + \frac{c\,\tau}{4\,\varepsilon}. \end{aligned} \tag{3.22}$$

Подставляя значение $\beta = (\rho - 1)^{-1}$ и учитывая (3.20), мы получим доказываемую оценку (3.14) разностного решения на $n + 1$ временном слое.

Применим теперь теорему 4 для исследования регуляризованных разностных схем для некорректной задачи (1.10),(1.11). Схема (2.2),(3.2) записывается в виде (2.2),(3.11) при

$$B = E + \alpha \mathcal{R}. \tag{3.23}$$

Следствие 1. Для регуляризованной схемы (2.2),(3.11),(3.23) с $\mathcal{R} = \mathcal{A}$ или $\mathcal{R} = \mathcal{A}_0$ при выполнении условия подчиненности (1.8) справедлива оценка

$$\|y_{n+1}\|_{\mathcal{A}_0} \leqslant (\rho + \frac{c}{4}\tau)\ \|y_n\|_{\mathcal{A}_0},$$

если $\alpha \geqslant \tau/(\rho - 1)$.

Неравенство (3.13), например, в случае $\mathcal{R} = \mathcal{A}$ принимает вид

$$(\rho - 1)\ (E + \alpha\ \mathcal{A}) - \tau\ \mathcal{A} \geqslant (\rho - 1)\ \varepsilon\ E.$$

Оно с очевидностью выполняется при $\alpha \geqslant \tau/(\rho - 1)$, если положить $\varepsilon = 1$. Совершенно аналогично рассматривается случай $\mathcal{R} = \mathcal{A}_0$.

Следствие 2. При выполнении (1.8) и выборе $\mathcal{R} = \mathcal{A}^*\mathcal{A}$ или $\mathcal{R} = \mathcal{A}_0^2$ для разностной схемы (3.11),(3.23) имеет место

$$\|y_{n+1}\|_{\mathcal{A}_0} \leqslant (\rho + \frac{c}{4\ \varepsilon}\tau)\ \|y_n\|_{\mathcal{A}_0}, \tag{3.24}$$

если

$$\alpha \geqslant \frac{\tau^2}{4\ (\rho - 1)^2(1 - \varepsilon)}. \tag{3.25}$$

Рассмотрим, например, случай $\mathcal{R} = \mathcal{A}^*\mathcal{A}$. Из неравенства (3.12) для схемы (3.11),(3.23) получим

$$(\rho - 1)B - \tau\ \mathcal{A} = (\rho - 1)\ (E + \alpha\ \mathcal{A}^*\mathcal{A}\ ) - \tau\ \mathcal{A}\ =$$

$$= (\rho - 1)\ (\alpha^{1/2}\ \mathcal{A}^* - \frac{\tau}{2(\rho - 1)}\alpha^{-1/2}\ E)$$

$$(\alpha^{1/2} A_h - \frac{\tau}{2(\rho - 1)} \alpha^{-1/2} E) - \frac{\tau^2}{4 \alpha (\rho - 1)} E +$$

$$+ (\rho - 1) E \geq (\rho - 1) \varepsilon E.$$

Это неравенство будет выполнено при выборе параметра регуляризации α согласно (3.25), а из (3.13) следует оценка (3.24). Аналогично рассматривается случай $R = A_0^2$.

Литература

1. Самарский А.А. О регуляризации разностных схем// ЖВМ и МФ. - 1967. - Т. 7, № 1. - С.62-93.
2. Самарский А.А., Вабищевич П.Н. Разностные схемы для неустойчивых задач: Препр. ИПМ АН СССР им.М.В.Келдыша № 111.- М., 1990. - 23с.
3. Самарский А.А., Вабищевич П.Н. Регуляризованные разностные схемы для эволюционных уравнений второго порядка: Препр. ВЦММ АН СССР № . - М., 1991. - 29с.
4. Самарский А.А., Гулин А.В. Устойчивость разностных схем. - М.: Наука, 1975. - 416с.
5. Алифанов О.М. Обратные задачи теплообмена. - М.: Машиностроение, 1988. - 280с.
6. Самарский А.А. Теория разностных схем. - М.: Наука, 1983.-616с.

А.А. Самарский, П.Н. Вабищевич" Регуляризованные разностные схемы с несамосопряженными операторами".
Редактор Б.Н. Четверушкин. Корректор П.Н. Вабищевич.

Подписано в печать 15.07 91г. Заказ № 37
Формат бумаги 60Х90 1/16 Тираж 175экз.
Объём 0,8 уч.-изд.л. Цена 10 коп.

055 (02)2

Отпечатано на ротапринтах в Институте прикладной математики АН СССР

Москва, Миусская пл. 4.