ВСЕСОЮЗНЫЙ ЦЕНТР МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ
Академии наук СССР

А.А. Самарский, П.Н. Вабищевич

РЕГУЛЯРИЗОВАННЫЕ РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ ДЛЯ ЭВОЛЮЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Препринт № 17 за 1991г.

Москва

УДК 519.6

АННОТАЦИЯ

В работе рассматриваются вопросы приближенного решения неустойчивых задач для эволюционных уравнений второго порядка. Важнейшим примером таких задач является классическая задача Коши для эллиптических уравнений. Ее некорректность обусловлена (пример Адамара) неустойчивостью решения относительно малых возмущений начальных условий.

Обсуждается также задача продолжения решений корректных эллиптических задач за границу расчетной области. Устойчивость соответствующих разностных схем исследуется на основе общей теории ρ-устойчивости. Развивается принцип регуляризации трехслойных разностных схем для неустойчивых задач. Показано, что регуляризованные разностные схемы соответствуют использованию некоторых вариантов метода квазиобращения.

ABSTRACT

The questions of approximate solving of nonstable problems for evolutionary equations of second order are discussed in this paper. The classical Cauchy problem for elliptic type equation is the significant example of analogous problem. The noncorrection of this problem (the Hadamard example) is conditioned by nonstability of the solution concerning small disturbance of the initial conditions.

The problem of the continuation of the correct elliptic problems solutions beyond the region boundary is also discussed in the paper. The stability of approximate finite schemes is investigated on the base of the general theory of ρ-stability. The principle of the regularization of three-layer finite schemes is developed for the nonstable problems. The fact that the regularization finite schemes corresponds to the employment of some variants of quasiinversion is illustrated.

Введение

Большое прикладное значение имеют обратные задачи для уравнений математической физики, которые некорректны в классическом смысле [1]. Можно отметить, в частности, обратные задачи теплообмена [2,3]. В разведочной геофизике (грави-, магнито- и электроразведке) одной из основных является проблема продолжения потенциальных полей [4-6]. Это приводит к необходимости приближенного решения некорректных задач для эллиптических уравнений. Хорошо известно [7], что для эллиптических уравнений некорректной является задача Коши. Отметим также задачу продолжения решений корректных эллиптических краевых задач в прилегающую к границе область, которая сводится к задаче с начальными данными. К таким неустойчивым задачам мы приходим при рассмотрении стационарной граничной обратной задачи теплопроводности [2,3].

Рассматриваемые задачи принадлежат к классу условно корректных. При сужении класса допустимых решений (выделении класса корректности) имеется непрерывная зависимость решения от начальных условий. Для их приближенного решения используются методы регуляризации [1].

Методы приближенного решения некорректных эволюционных задач можно разделить на два класса. В первом из них возмущаются начальные условия, которые и задаются с некоторой погрешностью. Второй класс методов устойчивого решения некорректных задач для уравнений с частными производными связан с возмущением самого уравнения (метод квазиобращения [8]).

В методах с возмущением начальных условий наиболее широко используется экстремальная формулировка задачи [9]. Для соответствующей задачи оптимального управления системами, описываемыми уравнениями с частными производными [10], применяется метод регуляризации Тихонова [1,11]. К рассматриваемому классу методов приближенного решения неустойчивых эволюционных задач относятся и методы с нелокальным возмущением начальных условий. В этом случае регуляризирующий эффект обуславливается связыванием решения на начальный и конечный момент времени. Регуляризация некорректных эволюционных задач на основе нелокального возмущения начальных условий предложена в [12]. Вопросы численного решения задачи Коши для эллиптических уравнений на основе такого подхода обсуждаются в работе [13]. Особого внимания заслуживает эквивалентность (см., например, [14]) экстремальной формулировки некорректной эволюционной задачи и нелокальной задачи.

Метод квазиобращения [8] основан на некотором возмущении исходного уравнения, причем для возмущенного уравнения задача уже корректна. Здесь параметр возмущения выступает в качестве параметра регуляризации. В работе [8] задача Коши для эллиптических уравнений рассматривается в общей нерегулярной области. Ограничиваясь цилиндрическими областями можно построить варианты метода квазиобращения, аналогичные тем, которые имеются для задачи с обратным временем для параболических уравнений (см., например, [8,15,16]). Для общих расчетных областей переход к цилиндрической расчетной области можно осуществить на основе преобразования координат. Фактически такое преобразование проведено, например, в работе [17].

Рассматриваемые методы в отличие от методов с возмущением начальных условий, обычных [8] вариантов метода квазиобращения для эллиптической задачи Коши позволяют строить наиболее экономичные вычислительные алгоритмы. Решение некорректной задачи проводится последовательным переходом с одного временного слоя на другой. Тем самым наиболее полно учитывается специфика эволюционной задачи.

При приближенном решении прикладных некорректных задач можно придерживаться двух различных направлений. В первом из них для исходной непрерывной неустойчивой задачи строиться соответствующая регуляризованная задача, а затем осуществляется переход к дискретной задаче. Альтернативным является направление исследований, связанное с построением дискретных аналогов непосредственно неустойчивой задачи и последующей регуляризацией. Например, для корректных задач математической физики теория устойчивости разностных схем [18,19] строится независимо от непрерывной задачи.

Данная работа является частью наших исследований по построению разностных схем для неустойчивых задач на основе принципа регуляризации разностных схем [20]. В работе [21] проведена регуляризация разностных схем для некорректных эволюционных уравнений первого порядка на примере задачи с обратным временем для параболического уравнения. Построены соответствующие ρ-устойчивые двухслойные разностные схемы. Здесь получены аналогичные результаты для трехслойных разностных схем применительно к неустойчивым задачам для эволюционных уравнений второго порядка.

I. Некорректные задачи для эволюционных уравнений второго порядка

I.I. Задача Коши для эллиптических уравнений. В качестве важнейшего класса неустойчивых задач для эволюционных уравнений рассмотрим задачу Коши для эллиптических уравнений. Отдельно выделим также задачу продолжения решения корректной краевой задачи в прилегающую область. Такие задачи имеют большое прикладное значение, в частности, в разведочной геофизике. Задача продолжения решения эллиптической краевой задачи легко сводиться к задаче Коши. Полезной может оказаться также редукция задачи Коши к задаче продолжения.

Рассмотрим вначале задачу Коши для эллиптического уравнения второго порядка. Обозначим через Ω ограниченную область m-мерного пространства R^m с достаточно гладкой границей $\partial\Omega$. В $R^m \times \{-\infty < t < \infty\}$ рассмотрим ограниченный цилиндр

$$Q(0,T) = \{ (x,t) \mid x \in \Omega, \quad 0 < t < T \}, \quad T > 0,$$

где $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$, с боковой поверхностью

$$\Gamma(0,T) = \{ (x,t) \mid x \in \partial\Omega, \quad 0 < t < T \}.$$

Определим для $x \in \Omega$ равномерно эллиптический, самосопряженный оператор

$$\mathcal{L} u = - \sum_{i,j=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_i} (a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}) \qquad (1.1)$$

с достаточно гладкими коэффициентами $a_{ij}(x) = a_{ji}(x)$, $x \in \Omega$.

Рассматривается некорректная задача Коши для эллиптического уравнения второго порядка. Пусть $u(x,t)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - L\, u = 0, \quad (x,t) \in Q(0,T). \tag{1.2}$$

Для простоты, ограничимся граничными условиями

$$u(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \Gamma(0,T). \tag{1.3}$$

При $t = 0$ задаются два начальных условия. Пусть

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \Omega, \tag{1.4}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0, \quad x \in \Omega. \tag{1.5}$$

Поставленная задача (1.1)-(1.5) есть первый пример некорректной эволюционной задачи.

I.2. Задача продолжения. В качестве второго примера некорректной задачи для эллиптического уравнения (1.2) рассмотрим задачу продолжения решения задачи Дирихле в полуполосе

$$Q(-\infty,0) = \{ (x,t) \mid x \in \Omega, \ -\infty < t < 0 \}.$$

Пусть $u(x,t)$ определяется из решения уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - L\, u = 0, \quad (x,t) \in Q(-\infty,0), \tag{1.6}$$

дополненного граничными условиями первого рода:

$$u(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \Gamma(-\infty,0), \tag{1.7}$$

$$u(x,-\infty) = 0, \quad x \in \Omega, \tag{1.8}$$

$$u(x,0) = u_0(x) \quad x \in \Omega, \tag{1.9}$$

где $\Gamma(-\infty,0)$ аналогично $\Gamma(0,T)$ – боковая поверхность $Q(-\infty,0)$.

Задача продолжения ставится следующим образом. Решение задачи Дирихле (1.6)-(1.9) продолжается в прилегающую область $Q(0,T)$, т.е. в области $Q(-\infty,T)$ рассматривается задача для уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - L u = 0, \quad (x,t) \in Q(-\infty,T) \qquad (1.10)$$

с граничными условиями

$$u(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \Gamma(-\infty,T). \qquad (1.11)$$

По переменной t используются сформулированные выше условия (1.8),(1.9).

Задача продолжения (1.8)-(1.11) сводится к задаче Коши, если учесть, что из решения задачи Дирихле (1.6)-(1.9) находится функция

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \phi(x), \quad x \in \Omega. \qquad (1.12)$$

После этого в области $Q(0,T)$ можно рассматривать задачу Коши (1.2)-(1.4), (1.12).

I.3. Неустойчивость решения. Задача Коши (1.2)-(1.5) и задача продолжения (1.8)-(1.11) принадлежат к классу некорректных задач математической физики. Так же как и в ретроспективной обратной задаче для параболического уравнения [21] некорректность обусловлена неустойчивостью решения относительно малых возмущений начального условия (функции $\phi(x)$ в (1.4),(1.9)). Для задачи Коши широко известен следующий пример Ж.Адамара [7].

Пусть $m = 1$ и рассматривается уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < T \qquad (1.13)$$

с граничными условиями

$$u(0,t) = 0, \quad u(l,t) = 0. \tag{1.14}$$

Начальное условие (1.4) возмем в виде

$$u(x,0) = k^{-s}\left(\frac{2}{l}\right)^{1/2} \sin\left(\pi k \frac{x}{l}\right), \quad 0 < x < l, \tag{1.15}$$

а (1.5) дает

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0, \quad 0 < x < l. \tag{1.16}$$

При $s > 0$ в норме $\mathcal{H} = L_2(0,l)$ имеем

$$\|u(x,0)\|^2 = \int_0^l u^2(x,0)\,dx = k^{-2s} \to 0$$

при $k \to \infty$, т.е. начальное условие сколь угодно малое. Точное решение задачи (1.13)-(1.16) имеет вид

$$u(x,t) = k^{-s}\left(\frac{2}{l}\right)^{1/2} \operatorname{ch}\left(\pi \frac{k}{l} t\right) \sin\left(\pi k \frac{x}{l}\right), \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < T. \tag{1.17}$$

Из представления (1.17) следует, что

$$\|u(x,t)\| = k^{-s} \operatorname{ch}\left(\pi \frac{k}{l} t\right) \to \infty$$

при $k \to \infty$. Таким образом возмущения в начальном условии, сколь малыми они не были бы, неограниченно возрастают при $t > 0$. Аналогичный пример можно привести и для задачи продолжения (1.8)-(1.11).

I.4. Условная устойчивость. Для приближенного решения неустойчивых задач (1.2)-(1.5) и (1.8)-(1.11) выделяется класс априорных ограничений на решение, в котором имеется устойчивость по начальным данным. Будем рассматривать ограниченные решения. Например, для задачи продолжения (1.8)-(1.11) пусть

$$\|u(x,t)\| \leqslant M = \text{const}, \quad -\infty < t < T. \tag{1.18}$$

Обозначим через $w_k(x)$ и λ_k, $k = 1,2, \ldots$ – собственные функции и собственные значения оператора L, определенного по (1.1) на множестве функций удовлетворяющих граничному условию (1.3), причем [22] $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots$. Тогда для решения задачи (1.2)-(1.5) получим представление

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \exp(\lambda_k^{1/2}\, t)\, (u_0, w_k)\, w_k(x). \tag{1.19}$$

Для квадрата нормы из (1.19) получим

$$\|u(x,t)\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} (u_0,w_k)^{2(1-t/T)} \left((u_0,w_k)\exp(\lambda_k^{1/2}\, T)\right)^{2t/T}. \tag{1.20}$$

На основе неравенства Гельдера [23] из (1.20) получим

$$\|u(x,t)\|^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^{\infty} (u_0,w_k)^2\right)^{(1-t/T)} \left(\sum_{k=1}^{\infty} (u_0,w_k)\exp(\lambda_k^{1/2}\, T)^2\right)^{t/T} .$$

Из этого неравенства следует оценка

$$\|u(x,t)\| \leqslant \|u(x,0)\|^{1-t/T}\, \|u(x,T)\|^{t/T}. \tag{1.21}$$

Из (1.18) и (1.21) вытекает непрерывная зависимость в $L_2(D)$ решения $u(x,t)$ задачи продолжения для эллиптического уравнения (1.8)-(1.11) от начального условия в классе равномерно ограниченных по $t \in (-\infty,T]$ функций.

I.5. Дифференциально- разностная задача. Для приближенного решения неустойчивой задачи (1.2)-(1.5) будем использовать разностные методы. В области D введем сетку ω_h. Не ограничивая общности, будем считать, что сетка ω_h равномерна по каждому направлению. Шаг сетки по переменной x_i обозначим h_i, где $i = 1,2, \ldots, m$.

Аппроксимируем оператор L, определенный по (1.1) с учетом (1.3), соответствующим сеточным оператором $\mathcal{A}$. Конкретный выбор оператора $\mathcal{A}$ проводится на основе теории разностных схем [18], метода конечных элементов [24]. Отметим лишь наиболее важные свойства оператора $\mathcal{A}$, которые должны быть сохранены при переходе от дифференциального оператора к сеточному. На сетке ω_h определим пространство сеточных функций $H = L_2(\omega_h)$ со скалярным произведением

$$(y,z) = \sum_{x\in\omega_h} y(x)\, z(x)\, h_1 h_2 \dots h_m .$$

Оператор $\mathcal{A}$ самосопряжен и положительно определен в H.

От задачи (1.2)-(1.5) перейдем к следующей дифференциально-разностной задаче. Ищется решение уравнения

$$\frac{d^2 v}{dt^2} - \mathcal{A} v = 0, \tag{1.22}$$

дополненного начальными условиями

$$v(x,0) = u_0(x), \quad x \in \omega_h, \tag{1.23}$$

$$\frac{dv}{dt}(x,0) = 0, \quad x \in \omega_h . \tag{1.24}$$

Для разностного решения задачи (1.22)-(1.24) введем сетку и по времени:

$$\omega_\tau = \{\, t \mid t = n\,\tau, \quad n = 0,1, \dots, N, \quad N\tau = T\},$$

где $\tau > 0$ - шаг сетки.

2. ρ-устойчивость трехслойных разностных схем

2.I. Устойчивость трехслойных разностных схем. Общая теория устойчивости [18,19] разностных схем базируется на записи разностной схемы в канонической форме. Для трехслойных разностных схем она имеет вид:

$$B\,\frac{y_{n+1} - y_{n-1}}{2\tau} + \tau^2 R\,\frac{y_{n+1} - 2\,y_n + y_{n-1}}{\tau^2} + A\, y_n = \phi_n,$$

$$n = 1,2, \dots \tag{2.1}$$

при заданных $y_0(x) = u_0(x)$, $y_1(x)$, $x \in \omega_h$. В (2.1) операторы A, B, R, вообще говоря, зависят от h_i, $i = 1, 2, \ldots, m$, τ и t. Для рассматриваемых нами модельных задач типа (1.1)-(1.5) предполагается, что разностные операторы A, B, R постоянные (не зависят от t). На основе общей теории устойчивости разностных схем [19] проводится обобщение результатов в различных направлениях (устойчивость по правой части, разностные схемы с несамосопряженными операторами, непостоянные операторы, устойчивость в более простых нормах и т.д.). В данной работе мы ограничимся исследованием устойчивости разностных схем по начальным данным и поэтому в (2.1) $\varphi_n = 0$.

Для корректных эволюционных задач обычное условие устойчивости в H_D по начальным данным имеет вид

$$\|y_{n+1}\|_D \le \|y_n\|_D, \quad \|y\|_D^2 = (Dy,y), \quad D = D^* > 0. \qquad (2.2)$$

При исследовании устойчивости трехслойных разностных схем приходиться использовать более сложные нормы. Полное обсуждение этого вопроса имеется в книге [19], где приведены наиболее важные нормы.

Для каждого $n = 1,2, \ldots$ определим вектор

$$Y^n = \{ \frac{1}{2}(y_n + y_{n-1}), \; y_n - y_{n-1} \}.$$

Обозначим через H^2 прямую сумму пространств H: $H^2 = H \oplus H$. Для векторов $Y = \{y^1, y^2\}$ слоение и умножение в H^2 определяется покоординатно, а скалярное произведение

$$(Y,V) = (y^1, v^1) + (y^2, v^2).$$

Для разностной схемы (2.1) с $R = R^*$, $A = A^* > 0$, $4R - A \ge 0$ определим норму в $H_{\mathcal{D}}^2$ выражением $\|Y^n\|_{\mathcal{D}} = ((\mathcal{D}\, Y^n, Y^n))^{1/2}$, где

$$(\mathcal{D}\, Y^n, Y^n) = \frac{1}{4}\, \|y_n + y_{n-1}\|_A^2 + \|y_n - y_{n-1}\|^2_{R - \frac{1}{4}A}, \qquad (2.3)$$

а норма в H_A определяется в соответствии с (2.2). Наше исследование базируется на общих результатах теории устойчивости трехслойных разностных схем [18,19].

Теорема 0 (основная). *Пусть в* (2.1) *операторы* A *и* R *постоянные (не зависят от* n), *самосопряженные и положительные операторы* ($A = A^* > 0$, $R = R^* > 0$). *Тогда условия*

$$B_0 = \frac{1}{2}(B + B^*) \geqslant 0 \tag{2.4}$$

$$R - \frac{1}{4}A \geqslant 0 \tag{2.5}$$

необходимы и достаточны для устойчивости схемы (2.1) *в* $H^2_{\mathcal{D}}$, *т.е. выполняется оценка* $\|Y^{n+1}\|_{\mathcal{D}} \leqslant \|Y^n\|_{\mathcal{D}}$.

Приведенный результат носит окончательный и неулучшаемый характер, так как речь идет о необходимых и достаточных условиях.

2.2. ρ-устойчивость. При рассмотрении разностных схем для некорректных задач типа (1.2)-(1.5) условие устойчивости $\|Y^{n+1}\|_{\mathcal{D}} \leqslant \|Y^n\|_{\mathcal{D}}$ не подходит и должно быть заменено на условие ρ-устойчивости. Это связано с тем, что само решение (его норма) рассматриваемой обратной задачи растет (см. представление (1.19)). На сеточном уровне это проявляется в том, что в дифференциально-разностной задаче (1.22)-(1.24) оператор $\mathcal{A}$ положительно определен.

Допуская рост решения задачи (1.22)-(1.24), будем использовать ρ-устойчивые разностные схемы. Трехслойная разностная схема (2.1) называется ρ-устойчивой [18], если

$$\|Y^{n+1}\|_{\mathcal{D}} \leqslant \rho \, \|Y^n\|_{\mathcal{D}}, \tag{2.6}$$

где $\rho > 0$ – любое число. Допуская ограниченный рост решения, можно положить

$$\rho = \exp(c\,\tau),$$

или

$$\rho = 1 + c\,\tau,$$

где положительная постоянная c не зависит от сетки (от τ и h). При таких ρ из (2.64) следует оценка устойчивости разностного решения по начальным данным вида:

$$\|Y^{n+1}\|_D \leqslant \exp(c\ t_{n+1})\ \|Y^0\|_D. \qquad (2.7)$$

Общие условия ρ-устойчивости трехслойных разностных схем получены в работе [25] и подробно изложены в [19].

Специфика разностных схем для некорректных задач проявляется в том, что условие устойчивости (2.6) имеет место с $\rho > 1$.

Теорема I. *Пусть в* (2.1) *операторы* A, R *и* B *постоянные (не зависят от* n) *и самосопряженные. Тогда при*

$$\frac{\rho^2 - 1}{2\tau} B + (\rho^2 + 1) R > 0 \qquad (2.8)$$

для ρ-устойчивости в H^2_D *с* $\rho > 0$ *необходимо и достаточно выполнение условий*

$$\frac{\rho^2 - 1}{2\tau} B + (\rho - 1)^2 R + \rho A \geqslant 0, \qquad (2.9)$$

$$\frac{\rho^2 - 1}{2\tau} B + (\rho + 1)^2 R - \rho A \geqslant 0, \qquad (2.10)$$

$$\frac{\rho^2 + 1}{2\tau} B + (\rho^2 - 1) R \geqslant 0. \qquad (2.11)$$

В данном случае оператор нормы D задается выражением

$$(D Y^n, Y^n) = \frac{1}{4} \left\| \frac{1}{\rho} y_n + y_{n-1} \right\|^2_{\tilde{A}} + \left\| \frac{1}{\rho} y_n - y_{n-1} \right\|^2_{\tilde{R} - \frac{1}{4}\tilde{A}},$$

где

$$\tilde{A} = \frac{\rho^2 - 1}{2\tau} B + (\rho - 1)^2 R + \rho A,$$

$$4 \tilde{R} - \tilde{A} = \frac{\rho^2 - 1}{2\tau} B + (\rho + 1)^2 R - \rho A.$$

Заметим, что для ρ-устойчивости трехслойной схемы (2.1) с $\rho > 1$ условие $A > 0$ не обязательно (в случае нашей задачи (1.22)-(1.24) имеем $A < 0$).

3. Регуляризация трехслойных разностных схем

3.I. Регуляризация явной схемы. Сначала применим принцип регуляризации разностных схем [20] для корректной эволюционной задачи для уравнения второго порядка. Параллельное изложение результатов по корректным и некорректным задачам позволяет более полно и глубоко прочувствовать специфику разностных методов для неустойчивых эволюционных задач. С другой стороны это демонстрирует мощь и общность единого используемого математического аппарата теории устойчивости разностных схем. Помимо этого, для корректных задач самостоятельный интерес могут представлять предложенные новые разностные схемы.

Рассмотрим дифференциально- разностную задачу (см. (1.22)-(1.24)):

$$\frac{d^2v}{dt^2} + \mathcal{A}\, v = 0, \tag{3.1}$$

$$v(x,0) = u_0(x), \quad x \in \omega_h, \tag{3.2}$$

$$\frac{dv}{dt}(x,0) = 0, \quad x \in \omega_h. \tag{3.3}$$

Запишем для задачи (3.1)-(3.3) обычную явную симметричную разностную схему:

$$\frac{y_{n+1} - 2\, y_n + y_{n-1}}{\tau^2} + \mathcal{A}\, y_n = 0, \quad n = 0,1,\ \dots\ . \tag{3.4}$$

Эта схема (см., например, [18,19]) устойчива при достаточно малых шагах по времени. Действительно, схема (3.4) записывается в каноническом виде (2.1) с

$$B = 0, \quad R = \frac{1}{\tau^2}\, E, \quad A = \mathcal{A}. \tag{3.5}$$

В силу $\mathcal{A} \leqslant \|\mathcal{A}\| E$ условие (2.5) дает

$$E - \frac{\tau^2}{4} \mathcal{A} \geqslant (\|\mathcal{A}\|^{-1} - \frac{\tau^2}{4}) \mathcal{A} \geqslant 0.$$

Это неравенство будет выполнено при $\tau^2 \leqslant 4 \|\mathcal{A}\|^{-1}$, т.е. при $\tau \leqslant O(h)$ - (условие Куранта).

Поправляя схему (3.4) на основе принципа регуляризации, построим абсолютно устойчивые разностные схемы.

Обозначим через $\mathcal{R} = \mathcal{R}^* > 0$ регуляризирующий сеточный оператор и пусть $\alpha > 0$ - параметр регуляризации (возмущения). Аналогично [20] регуляризованную схему для (3.4) запишем в виде

$$(E + \alpha \mathcal{R}) \frac{y_{n+1} - 2 y_n + y_{n-1}}{\tau^2} + \mathcal{A} y_n = 0. \qquad (3.6)$$

Используем два способа выбора регуляризатора: $\mathcal{R} = \mathcal{A}$ и $\mathcal{R} = \mathcal{A}^2$. Докажем следующее утверждение.

Теорема 2. *Разностная схема* (3.6) с $\mathcal{A} = \mathcal{A}^* > 0$ *безусловно устойчива при выборе регуляризатора* $\mathcal{R} = \mathcal{A}$, *если*

$$\alpha \geqslant \tau^2/4 - \|\mathcal{A}\|^{-1}, \qquad (3.7)$$

а для регуляризатора $\mathcal{R} = \mathcal{A}^2$, *если параметр регуляризации* $\alpha \geqslant \tau^4/64$.

Доказательство основывается на проверке необходимых и достаточных условий (2.4),(2.5). В нашем случае неравенство (2.4) всегда выполнено, так как для схемы (3.6) имеем $B = 0$. Для проверки условия (2.5) надо учесть, что

$$R = \tau^{-2}(E + \alpha \mathcal{R}), \quad A = \mathcal{A}. \qquad (3.8)$$

Отсюда из (2.5) получаем

$$(\|\mathcal{A}\|^{-1} + \alpha) \mathcal{A} \geqslant \frac{\tau^2}{4} \mathcal{A}.$$

Если параметр регуляризации α выбран согласно (3.7), то это неравенство будет выполнено.

Для регуляризатора $\mathcal{R} = \mathcal{A}^2$ и (1.8) неравенство (2.5) преобразуется следующим образом:

$$\tau^2 (R - 1/4\, A) = E + \alpha\, \mathcal{A}^2 - \tau^2/4\, \mathcal{A} =$$

$$= (\alpha^{1/2} \mathcal{A} - \tau^2/(8\, \alpha^{1/2})\, E)^2 + (1 - \tau^4/(64\, \alpha))\, E \geq 0.$$

Отсюда и следует, что при $\mathcal{R} = \mathcal{A}^2$ и $\alpha \geq \tau^4/64$ регуляризованная разностная схема (3.6) абсолютно устойчива.

Для схемы (3.6) выбор $\alpha = \sigma\tau^2$, $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$ при $\mathcal{R} = \mathcal{A}$ соответствует обычной [18,19] схеме с весами:

$$\frac{y_{n+1} - 2\, y_n + y_{n-1}}{\tau^2} -$$

$$+ \mathcal{A}\, (\sigma_1 y_{n+1} + (1 - \sigma_1 - \sigma_2)\, y_n + \sigma_2\, y_{n-1}) = 0.$$

Исследование таких схем регуляризации проведено в работе [20]. Отдельного внимания заслуживает регуляризованная схема (3.6),(3.8) с регуляризатором $\mathcal{R} = \mathcal{A}^2$.

3.2. Факторизованные схемы. Аналогично рассмотренному ранее случаю задачи для параболического уравнения [21] можно построить экономичные разностные схемы при приближенном решении многомерных задач (1.2)-(1.5). Ограничимся формулировкой лишь некоторых простейших результатов в этом направлении. Разностные схемы суммарной аппроксимации, схемы расщепления с различных позиций подробно обсуждаются в работах [18,19,26]. Здесь отмечается возможность построения факторизованных разностных схем на основе принципа регуляризации.

Рассмотрим случай, когда сеточный оператор $\mathcal{A}$ представим в виде суммы попарно перестановочных операторов:

$$\mathcal{A} = \sum_{k=1}^{p} \mathcal{A}_k, \quad \mathcal{A}_k = \mathcal{A}_k^* > 0,$$

$$\mathcal{A}_k \mathcal{A}_s = \mathcal{A}_s \mathcal{A}_k, \quad k,s = 1,2, \ldots, p. \qquad (3.9)$$

Теорема 3. *Факторизованная разностная схема* (2.1) *с*

$$B = 0, \quad R = \prod_{k=1}^{p} (E + \alpha \mathcal{R}_k), \quad A = \mathcal{A}, \qquad (3.10)$$

где $\mathcal{A}$ *удовлетворяет условиям* (3.9), *устойчива при* $\mathcal{R}_k = \mathcal{A}_k$, *если* $\alpha \geq \tau^2/4 - \|\mathcal{A}\|^{-1}$, *а при* $\mathcal{R}_k = \mathcal{A}_k^2$, *если* $\alpha \geq p\,\tau^4/64$.

При выборе оператора B согласно (3.9), (3.10) в случае $\mathcal{R}_k = \mathcal{A}_k$ имеем

$$\prod_{k=1}^{p} (E + \alpha \mathcal{A}_k) \geq E + \alpha \mathcal{A}.$$

Поэтому, как и в теореме 2, при выполнении (3.7) факторизованная схема (2.1), (3.9), (3.10) будет устойчива.

В случае $\mathcal{R}_k = \mathcal{A}_k^2$ для доказательства теоремы используется неравенство:

$$\prod_{k=1}^{p} (E + \alpha \mathcal{A}_k^2) \geq E + \alpha \sum_{k=1}^{p} \mathcal{A}_k^2 \geq E + \frac{\alpha}{p} \Big(\sum_{k=1}^{p} \mathcal{A}_k\Big)^2 =$$
$$= E + \frac{\alpha}{p} \mathcal{A}^2. \qquad (3.11)$$

Принимая во внимание теорему 2, получим, что при $\alpha \geq p\,\tau^2/64$ факторизованная схема (2.1), (3.9), (3.10) устойчива.

На основе принципа регуляризации могут быть получены и другие экономичные схемы для решения дифференциально-разностной задачи (3.1)-(3.3). В особой мере (см. [18,19,26]) это касается случая расщепления на два оператора ($p = 2$).

4. Регуляризация трехслойных разностных схем для неустойчивых задач

4.1. Регуляризация явной схемы для неустойчивой задачи. Обратимся теперь к некорректной задаче с начальными данными для эллиптического уравнения второго порядка. Пусть $u(x,t)$ определяется из уравнения (1.2), дополненного условиями (1.3)-(1.5). Свою задачу мы видим в построении ρ-устойчивых разностных схем на основе принципа регуляризации, в перенесении результатов по корректной задаче для эволюционных уравнений второго порядка на некорректные задачи.

Рассмотрим вначале явную симметричную разностную схему:

$$\frac{y_{n+1} - 2\,y_n + y_{n-1}}{\tau^2} - \mathcal{A}\,y_n = 0, \quad n = 0,1,\ \dots\ . \tag{4.1}$$

Схема (4.1) записывается в каноническом виде (2.1) с

$$B = 0, \quad R = \frac{1}{\tau^2}\,E, \quad A = -\mathcal{A}, \tag{4.2}$$

т.е. $A = A^* < 0$.

Теорема 4. *Явная схема* (4.1) *ρ-устойчива с*

$$\rho = \exp\,(\|\mathcal{A}\|^{1/2}\,\tau). \tag{4.3}$$

Доказательство основано на проверке условий ρ-устойчивости для схемы (4.1). Для трехслойной разностной схемы (2.1) они имеют вид (2.8)-(2.11). При $B \geqslant 0$, $A \leqslant 0$, $R \geqslant 0$ и $\rho > 1$ неравенства (2.8), (2.10), (2.11) при всех $\tau > 0$ с очевидностью выполняются. Неравенство (2.9) при учете (4.2) преобразуется следующим образом:

$$(\rho - 1)^2\,E - \tau^2\,\rho\,\mathcal{A} \geqslant ((\rho - 1)^2\,\|\mathcal{A}\|^{-1} - \tau^2\,\rho)\,\mathcal{A} \geqslant 0.$$

Докажем следующий вспомогательный результат.

Лемма. *Неравенство*

$$(\rho - 1)^2\,\chi - \tau^2\,\rho \geqslant 0$$

для положительных χ, τ и $\rho > 1$ выполнено при

$$\rho \geqslant \exp\,(\chi^{-1/2}\,\tau).$$

Это неравенство будет выполнено при $\rho \geqslant \rho_2$, где

$$\rho_2 = 1 + \frac{1}{2}\,\tau^2\,\chi^{-1} + \tau\,(\chi^{-1})^{1/2}\,(1 + \frac{1}{4}\,\tau^2\,\chi^{-1})^{1/2}.$$

В силу

$$(1 + \frac{1}{4}\tau^2 \chi^{-1})^{1/2} < 1 + \frac{1}{8}\tau^2 \chi^{-1}$$

имеем

$$\rho_2 < 1 + \tau(\chi^{-1})^{1/2} + \tau^2 \frac{1}{2}\chi^{-1} + \tau^3 \frac{1}{8}\chi^{-3/2} <$$

$$< 1 + \tau\chi^{-1/2} + \frac{1}{2}(\tau\chi^{-1/2})^2 + \frac{1}{6}(\tau\chi^{-1/2})^3 <$$

$$< \exp(\chi^{-1/2}\tau).$$

Тем самым лемма доказана.

В нашем случае $\chi = \|\mathcal{A}\|^{-1}$ и поэтому для ρ получим доказываемую оценку (4.3) для явной схемы (4.1).

С учетом ограниченности оператора $\mathcal{A}$ (имеет место обычная оценка $\|\mathcal{A}\| = O(h^{-2})$ [18,24]) можно заключить, что шаг сетки по пространству ограничивает рост решения, т.е. выступает в качестве параметра регуляризации. Переход от непрерывной задачи к дискретной в принципиальном плане может рассматриваться как способ борьбы с неустойчивостью и порождаемый регуляризирующий алгоритм является одним из возможных подходов для приближенного решения неустойчивых эволюционных задач.

Большие возможности предоставляет явное введение регуляризирующих добавок в сеточные операторы разностной схемы. Аналогично случаю прямой задачи (см. (3.8)) запишем регуляризованную схему в каноническом виде (2.1) с

$$B = 0, \quad R = \frac{1}{\tau^2}(E + \alpha \mathcal{R}), \quad A = -\mathcal{A}. \qquad (4.4)$$

Теорема 5. *Регуляризованная схема* (2.1), (4.4) *устойчива при* $\mathcal{R} = \mathcal{A}$ *с*

$$\rho = \exp(\alpha^{-1/2}\tau), \qquad (4.5)$$

а при $\mathcal{R} = \mathcal{A}^2$ *с*

$$\rho = \exp\,(2^{-1/2}\,\alpha^{-1/4}\,\tau). \qquad (4.6)$$

Доказательство снова основано на проверке выполнения неравенства (2.9), которое для (4.4) принимает вид

$$(\rho - 1)^2\,(E + \alpha\,\mathcal{R}) - \tau^2\,\rho\,\mathcal{A} \geqslant 0. \qquad (4.7)$$

При $\mathcal{R} = \mathcal{A}$ аналогично доказательству теоремы 4 ($\chi = \alpha + \|\mathcal{A}\|^{-1}$) получим для ρ выражение

$$\rho = \exp\,((\alpha + \|\mathcal{A}\|^{-1})^{-1/2}\tau).$$

Загрубляя эту величину ρ, мы и приходим к оценке (4.5).

При $\mathcal{R} = \mathcal{A}^2$ неравенство (4.7) преобразуется следующим образом:

$$E + \alpha\,\mathcal{A}^2 - \frac{\tau^2\,\rho}{(\rho - 1)^2}\,\mathcal{A} = (\alpha^{1/2}\,\mathcal{A} - \frac{\tau^2\,\rho}{2(\rho - 1)^2}\,\alpha^{-1/2}\,E)^2 +$$

$$(1 - \frac{\tau^4\,\rho^2}{4(\rho - 1)^4}\,\alpha^{-1})\,E \geqslant 0.$$

Это неравенство будет выполнено при заданном ρ, если параметр регуляризации

$$\alpha \geqslant \frac{\tau^4\,\rho^2}{4(\rho - 1)^4}. \qquad (4.8)$$

Оценим теперь величину ρ при заданном α из неравенства (4.8). Это неравенство перепишем в виде

$$(\rho - 1)^2\,2\,\alpha^{1/2} - \tau^2\,\rho \geqslant 0.$$

В силу леммы ($\chi = 2\,\alpha^{1/2}$) неравенство будет выполнено при ρ, определяемых согласно (4.6).

Отмеченные два возможных способа выбора регуляризатора, наряду с отмеченной выше явной регуляризацией за счет выбора сетки по пространству, позволяют строить определенный набор регуляризирующих алгоритмов. Выбор того или иного алгоритма из этого спектра осуществляется на основе дополнительных соображений, связанных со спецификой прикладной задачи, возможностями вычислительной реализации.

4.2. Факторизованные схемы. Рассмотрим теперь аналогично случаю прямой задачи регуляризованные факторизованные схемы. Зададим операторы разностной схемы (2.1) в виде

$$B = 0, \quad R = \prod_{k=1}^{p} (E + \alpha \mathcal{R}_k), \quad A = -\mathcal{A}, \tag{4.9}$$

Теорема 6. *Факторизованная схема* (2.1),(3.9),(4.9) *ρ-устойчива при* $\mathcal{R}_k = \mathcal{A}_k$ *с*

$$\rho = \exp (\alpha^{-1/2} \tau),$$

а при $\mathcal{R}_k = \mathcal{A}_k^2$ *с*

$$\rho = \exp (p^{1/4} 2^{-1/2} \alpha^{-1/4} \tau).$$

Доказательство этого утверждения проводится совершенно аналогично теореме 5 с учетом (3.11). Необходимо только заметить, что мы снова ограничились простейшими факторизованными схемами с самосопряженными и попарно перестановочными операторами $\mathcal{A}_k$, $k = 1, 2, \ldots, p$.

4.3. Возмущение других операторов. Теория регуляризации разностных схем основана на возмущении сеточных операторов A, B, R. Эффект регуляризации может достигаться не только при возмущении сеточного оператора R. Рассмотрим, например, вместо явной схемы (4.1) регуляризованную схему, в которой возмущается оператор A. Пусть

$$\frac{y_{n+1} - 2 y_n + y_{n-1}}{\tau^2} - \mathcal{A} y_n + \alpha \mathcal{R} y_n = 0 \tag{4.10}$$

и $\mathcal{R} = \mathcal{A}^2$.

Теорема 7. *Регуляризованная схема* (4.10) при $\mathcal{R} = \mathcal{A}^2$ *ρ-устойчива с*

$$\rho = \exp\,(2^{-1}\alpha^{-1/2}\,\tau), \tag{4.11}$$

при любых τ, *если* $\alpha|\mathcal{A}| \leqslant 1$, *и при* $\tau \leqslant (2\,/\,(|\mathcal{A}|\,(\alpha|\mathcal{A}| - 1))^{1/2}$, *если* $\alpha|\mathcal{A}| > 1$.

В явной схеме (4.10) ограничение на шаг по времени вытекает из необходимости выполнения неравенства (2.10). Имеем для схемы (4.10)

$$B = 0,\ R = \frac{1}{\tau^2}\,E, \quad A = -\,\mathcal{A} + \alpha\,\mathcal{A}^2. \tag{4.12}$$

Оценку (4.11) для ρ получим из неравенства (2.9). Из (2.9) с учетом (4.12) имеем

$$\frac{(\rho - 1)^2}{\tau^2}\,E - \rho\,\mathcal{A} + \rho\,\alpha\,\mathcal{A}^2 =$$

$$= \rho\,(\alpha^{1/2}\,\mathcal{A} - 2^{-1}\alpha^{-1/2}\,E)^2 + (\frac{(\rho - 1)^2}{\tau^2} - \frac{\rho}{4\,\alpha})\,E \geqslant 0.$$

Это неравенство будет выполнено при

$$(\rho - 1)^2\,4\,\alpha - \tau^2\,\rho \geqslant 0.$$

Отсюда в силу леммы и вытекает оценка (4.11) для ρ.

Принимая во внимание (2.9), имеем

$$\frac{(\rho + 1)^2}{\tau^2}\,E = \frac{(\rho - 1)^2}{\tau^2}\,E + \frac{4}{\tau^2}\,\rho\,E \geqslant$$

$$\geqslant \frac{4}{\tau^2}\,\rho\,E + \rho\,\mathcal{A} - \rho\,\alpha\,\mathcal{A}^2.$$

С учетом этого и неравенств $E \geqslant |\mathcal{A}|^{-1}\mathcal{A}$, $\mathcal{A}^2 \leqslant |\mathcal{A}|\,\mathcal{A}$ неравенство (2.10) преобразуется следующим образом:

$$\frac{(\rho + 1)^2}{\tau^2}\,E + \rho\,\mathcal{A} - \rho\,\alpha\,\mathcal{A}^2 \geqslant$$

$$\geqslant 2\rho\left(\frac{2}{\tau^2}E + \mathcal{A} - \alpha\mathcal{A}^2\right) \geqslant$$

$$\geqslant 2\rho\left(\frac{2}{\tau^2}|\mathcal{A}|^{-1} + 1 - \alpha|\mathcal{A}|\right)\mathcal{A} \geqslant 0.$$

Последнее неравенство будет выполнено при всех τ, если $\alpha|\mathcal{A}| \leqslant 1$, а в случае $\alpha|\mathcal{A}| > 1$ вытекают отмеченные выше ограничения на временной шаг.

Приведем результат об абсолютной ρ-устойчивости комбинированной регуляризованной разностной схемы:

$$(E + \alpha_1 R_1)\frac{y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1}}{\tau^2} - \mathcal{A}y_n + \alpha_2 R_2 y_n = 0,$$

$$n = 1, 2, \ldots, \tag{4.13}$$

которая получена возмущением оператора R и оператора A. Ограничимся одним частным случаем с жесткой связью параметров возмущения α_1 и α_2.

Теорема 8. *Регуляризованная схема* (4.13) *при* $\alpha_1 = \alpha_2\tau^2/4$ *и* $R_1 = R_2 = \mathcal{A}^2$ *ρ-устойчива при любых* $\tau > 0$ *с*

$$\rho = \exp(\beta\, 2^{-1}\alpha_2^{-1/2}\tau). \tag{4.14}$$

В случае схемы (4.13) при $R_1 = R_2 = \mathcal{A}^2$ имеем

$$B = 0, \quad R = \frac{1}{\tau^2}(E + \alpha_1\mathcal{A}^2), \quad A = -\mathcal{A} + \alpha_2\mathcal{A}^2. \tag{4.15}$$

Проверем сначала выполнение неравенства (2.10) при любых ρ и $\alpha_1 = \alpha_2\tau^2/4$. С учетом (4.15) и положительности оператора A непосредственно получаем

$$\frac{(\rho+1)^2}{\tau^2}(E + \alpha_1\mathcal{A}^2) + \rho\mathcal{A} - \rho\alpha_2\mathcal{A}^2 >$$

$$> \rho\left(\frac{(\rho^{1/2} + \rho^{-1/2})^2}{\tau^2}\alpha_1 - \alpha_2\right)\mathcal{A}^2 \geqslant 0.$$

При выбранных α_1 и α_2 это неравенство выполнено.

Для оценки ρ подставим (4.15) в (2.9):

$$\frac{(\rho - 1)^2}{\tau^2}(E + \alpha_1 \mathcal{A}^2) - \rho \mathcal{A} + \rho \alpha_2 \mathcal{A}^2 =$$

$$= \alpha_2 \frac{(\rho + 1)^2}{4} \mathcal{A}^2 - \rho \mathcal{A} + \frac{(\rho - 1)^2}{\tau^2} E =$$

$$= (\alpha_2^{1/2} \frac{\rho + 1}{2} \mathcal{A} - \alpha_2^{-1/2} \frac{\rho}{\rho + 1} E)^2 +$$

$$+ (\frac{(\rho - 1)^2}{\tau^2} - \frac{\rho^2}{\alpha_2 (\rho + 1)^2}) E \geqslant 0.$$

Это будет выполнено при

$$\frac{\rho - 1}{\tau} \geqslant \alpha_2^{-1/2} \frac{\rho}{\rho + 1}. \qquad (4.16)$$

Неравенство (4.16) позволяет получить

$$\rho \geqslant 1 + \frac{1}{2} \alpha_2^{-1/2} \tau.$$

Отсюда и получаем оценку (4.14) для ρ.

Отметим также возможность построения регуляризованных разностных схем на основе возмущения оператора B разностной схемы (2.1) при решении некорректной задачи на основе явной схемы (4.1). Соответствующую разностную схему запишем в каноническом виде (2.1) с операторами

$$B = \alpha \mathcal{R}, \ R = \frac{1}{\tau^2} E, \quad A = - \mathcal{A}. \qquad (4.17)$$

Докажем, например, следующее утверждение.

Теорема 9. *Разностная схема* (4.17) *ρ-устойчива при* $\mathcal{R} = \mathcal{A}$ *с*

$$\rho = \exp (\alpha^{-1} \tau). \qquad (4.18)$$

Действительно, при таком выборе операторов A, B, и R неравенства (2.8),(2.10),(2.11) с очевидностью выполнены, а неравенство (2.9) с учетом (4.17) преобразуется следующим образом:

$$\frac{\rho^2 - 1}{2\tau} B + (\rho - 1)^2 R + \rho A =$$
$$= \frac{\rho^2 - 1}{2\tau} \alpha \mathcal{A} + (\rho - 1)^2 \frac{E}{\tau^2} - \rho \mathcal{A} >$$
$$> (\frac{\rho^2 - 1}{2\tau} \alpha - \rho) \mathcal{A} \geqslant 0.$$

Последнее неравенство будет выполнено при $\rho \geqslant \rho_2$, где

$$\rho_2 = \frac{\tau}{\alpha} + (1 + \frac{\tau^2}{\alpha^2})^{1/2} <$$

$$1 + \frac{\tau}{\alpha} + \frac{1}{2}\frac{\tau^2}{\alpha^2} < \exp (\alpha^{-1}\tau).$$

Отсюда и следует оценка (4.18) для ρ.

Теоремы 7-9 демонстрируют возможности получения ρ-устойчивых разностных схем при возмущении различных сеточных операторов канонической формы разностных схем (2.1).

5. Регуляризованные трехслойные схемы и метод квазиобращения

5.I. **Основной вариант метода квазиобращения.** Рассмотренные выше регуляризованные разностные схемы получены на основе принципа регуляризации разностных схем, который формулируется безотносительно к тому, какая непрерывная задача рассматривается. Регуляризация разностных схем основана на возмущении сеточных операторов. При приближенном решении некорректных задач принцип регуляризации разностных схем может рассматриваться как метод квазиобращения для дискретной задачи. Возмущение операторов разностной схемы на непрерывном уровне соответствует некоторому возмущению исходного дифференциального уравнения. Поэтому такие регуляризованные разностные схемы для некорректной задачи Коши могут в некоторых случаях интерпретироваться как разностные схемы метода квазиобращения.

Выпишем для каждого варианта регуляризации неустойчивых схем соответствующий вариант метода квазиобращения. В этом контексте регуляризованные схемы могут рассматриваться как разностные схемы метода квазиобращения.

Для задачи Коши (1.1)-(1.5) будем использовать вариант метода квазиобращения, который основан на решении уравнения

$$\frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial t^2} - \mathcal{L}\, u_\alpha + \alpha\, \mathcal{L}^2\, u_\alpha = 0, \quad (x,t) \in Q(0,T) \qquad (5.1)$$

для нахождения $u_\alpha(x,t)$. Такой вариант соответствует варианту метода квазиобращения для ретроспективной обратной задачи для параболического уравнения, рассмотренному в книге [8].

Для решения задачи (5.1),(1.3)-(1.5) имеет место оценка

$$\|u_\alpha(x,t)\| \leqslant \exp\left(\frac{1}{2}\, \alpha^{-1/2}\, t\right) \|u_\alpha(x,0)\|, \qquad (5.2)$$

которая обеспечивает устойчивость решения по начальным данным.

Для численного решения задачи (3.1),(1.4),(1.5) используем разностную схему с весами:

$$\frac{y_{n+1} - 2\, y_n + y_{n-1}}{\tau^2} -$$

$$- \Lambda\, (\sigma_1 y_{n+1} + (1 - \sigma_1 - \sigma_2)\, y_n + \sigma_2\, y_{n-1}) + \qquad (5.3)$$

$$+ \alpha\, \Lambda^2\, (\sigma_3 y_{n+1} + (1 - \sigma_3 - \sigma_4) y_n + \sigma_4 y_{n-1}) = 0.$$

Схема (5.3) совпадает с регуляризованной схемой (4.13) при $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$, $\sigma_3 = \sigma_4$, $\alpha_1 = \sigma_3\, \tau^2\, \alpha$, $\alpha_2 = \alpha$ и $R_1 = R_2 = \Lambda^2$. Величина ρ (см. (4.14)) точно соответствует оценке устойчивости решения непрерывной задачи (5.2).

5.2. Другие варианты метода квазиобращения. Второй вариант метода квазиобращения [27] основан на решении уравнения

$$\frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial t^2} - L\, u_\alpha + \alpha\, L\, \frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial t^2} = 0, \qquad (x,t) \in Q(0,T). \tag{5.4}$$

Соответствующая оценка устойчивости для задачи (5.4),(1.4),(1.5) имеет вид

$$\|u_\alpha(x,t)\| \leqslant \exp(\alpha^{-1/2}\, t)\, \|u_\alpha(x,0)\|. \tag{5.5}$$

Трехслойная разностная схема с весами для уравнения (5.4) имеет вид

$$(E + \alpha\cdot A)\, \frac{y_{n+1} - 2\, y_n + y_{n-1}}{\tau^2} -$$

$$- A\, (\sigma_1 y_{n+1} + (1 - \sigma_1 - \sigma_2)\, y_n + \sigma_2\, y_{n-1}) = 0. \tag{5.6}$$

Схема (5.6) совпадает с регуляризованной схемой (2.1),(4.4) при $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$ и выборе $R = A$, а величина ρ (см. (4.5)) согласуется с оценкой (5.5).

Вариант метода квазиобращения, который соответствует регуляризованной схеме (2.1),(4.4) при выборе $R = A^2$ основан на решении уравнения

$$\frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial t^2} - L\, u_\alpha + \alpha\, L^2\, \frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial t^2} = 0, \qquad (x,t) \in Q(0,T). \tag{5.7}$$

Для решения задачи (5.7),(1.4),(1.5) имеет место оценка

$$\|u_\alpha(x,t)\| \leqslant \exp(2^{-1/2}\, \alpha^{-1/4}\, t)\, \|u_\alpha(x,0)\|.$$

Аналогичная оценка имеет место и для решения сеточной задачи (см. (4.6)).

Литература

1. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. - М.: Наука, 1986. - 288с.
2. Алифанов О.М. Обратные задачи теплообмена. - М.: Машиностроение, 1988. - 280с.
3. Бек Дж., Блакуэлл Б., Сент-Клэр Ч., мл. Некорректные обратные задачи теплопроводности. - М.: Мир, 1989. - 312с.
4. Гравиразведка. Справочник геофизика/ Под ред. Е.А.Мудрецовой. - М.: Недра, 1981. - 398с.
5. Магниторазведка. Справочник геофизика/ Под ред. В.Е.Никитского и Ю.С.глебовского. - М.: Недра, 1980. - 368с.
6. Электроразведка. Справочник геофизика/ Под ред. А.Г.Тархова. - М.: Недра, 1980. - 518с.
7. Адамар Ж. Задача Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа. - М.: Наука, 1978. - 352с.
8. Латтес Р., Лионс Ж.-Л. Метод квазиобращения и его приложения. - М.: Мир, 1970. - 336с.
9. Алифанов О.М., Артюхин Е.А., Румянцев С.В. Экстремальные методы решения некорректных задач. - М.: Наука, 1988. - 288с.
10. Лионс Ж.-Л. Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. - М.: Мир, 1972. - 414с.
11. Васильев Ф.П. Методы решения экстремальных задач. - М: Наука, 1981. - 400с.
12. Абдулкеримов Л.Ш. Регуляризация некорректной задачи Коши для эволюционных уравнений в банаховых пространствах// Учен. зап. Азерб. ун-та. Сер. физ.- мат. наук. - 1974, № 1. С.32-36.
13. Вабищевич П.Н., Пулатов П.А. Об одном методе численного решения задачи Коши для эллиптических уравнений// Вестн. Моск. ун-та. Вычисл. матем. и киберн. - 1984, № 2. С.3-8.
14. Вычислительные методы в математической физике/ П.Н.Вабищевич, В.М.Головизнин, Г.Г.Еленин и др. - М.: Изд-во Моск. ун-та, 1986. - 150с.
15. Showalter R.E. Final value problem for evolution equations// J. Math. Anal. Appl. - 1974. - V.47. - P.563-572.

16. Ewing R. The approximation of certain parabolic equations backward in time by Sobolev equations// SIAM J. Math. Anal. - 1975. - V.6, № 2. - P.283-294.
17. Вабищевич П.Н. О решении задачи Коши для уравнения Лапласа в двухсвязной области// Докл. АН СССР. - 1978. - Т.241, № 6. - С.1257-1260.
18. Самарский А.А. Теория разностных схем. - М.: Наука, 1983.-616с.
19. Самарский А.А., Гулин А.В. Устойчивость разностных схем. - М.: Наука, 1975. - 416с.
20. Самарский А.А. О регуляризации разностных схем// ЖВМ и МФ. - 1967. - Т. 7, № 1. - С.62-93.
21. Самарский А.А., Вабищевич П.Н. Разностные схемы для неустойчивых задач: Препр. ИПМ АН СССР им.М.В.Келдыша № 111. М., 1990. - 23с.
22. Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики. - М.: Наука, 1973. - 408с.
23. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. - М.: Наука, 1984. - 832с.
24. Сьярле Ф. Метод конечных элементов для эллиптических задач. - М.: Мир, 1980. - 512с.
25. Самарский А.А. Об устойчивости трехслойных разностных схем// Докл. АН СССР. - 1970. - Т.192, № 5. - С.998-1001.
26. Марчук Г.И. Методы расщепления. - М.: Наука, 1988. - 264с.
27. Вабищевич П.Н. Разностные методы решения некоторых некорректных задач// Изв. Вузов. Матем. - 1984, № 8. - С.3-9.