где $\omega(z, E, \Omega)$ – гармоническая мера множества $E \subset \partial\Omega$ относительно области $\Omega$ в точке $z \in \Omega$. Из соотношения (9) с помощью условий типа (4), (7), (8) можно получить оценку функции $u(z)$, если суметь выбрать область $\Omega$ так, чтобы ее гармоническая мера, рассматриваемая как мера на отрезке $[a, b]$, каким-либо образом параметризующем $\partial\Omega$, мажорировалась данной мерой $\nu$. Последнюю задачу, представляющую, на наш взгляд, и самостоятельный интерес, мы решаем с помощью методов, разработанных Б.Я. Левиным при изучении мажорант в классах субгармонических функций [8]. При этом получена следующая

Теорема 4. *Для любой функции $\nu \in N(0, 2\pi)$ существует такая положительная непрерывная на $[0, 2\pi]$ функция $r(\theta)$, что $r(0) = r(2\pi)$ и гармоническая мера области $\Omega_\nu = \{re^{i\theta}: r < r(\theta), 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi\}$ для всех множеств $E \subset \partial\Omega_\nu$ и всех точек $z$ из произвольного компакта $K \subset \Omega_\nu$ удовлетворяет условию $\omega(z, E, \Omega_\nu) \leqslant \leqslant C_K \nu(\hat{E})$, где $\hat{E} = \{\theta \in [0, 2\pi]: r(\theta)e^{i\theta} \in E\}$– радиальная проекция множества $E$ на единичную окружность.*

В заключение отмечу, что толчком к написанию данной работы послужило высказанное И.В. Островским в качестве гипотезы утверждение типа следствия 2. Автор благодарит также А.Э. Еременко и Л.И. Ронкина за полезные обсуждения.

Физико-технический институт низких температур
Академии наук УССР
Харьков

Поступило
9 III 1989

ЛИТЕРАТУРА

1. *Carleman T.* – Acta Math., 1926, vol. 48, p. 363–366. 2. *Wolf F.* An extension of the Phragmen – J. London Math. Soc., 1939, vol. 14, p. 208–216. 3. *Levinson N.* Gap and density theorems. Amer. Math. Colloq. Publ. 26. N.Y., 1940. 4. *Sjoberg N.* Sur las minorantes sous harmoniques d'une fonction donnée. Neuvieme Congr. des Math. Scand., 1938. Helsinki, 1939, p. 309 -319. 5. *Wolf F.* – Bull. Amer. Math. Soc., 1942, vol. 49, p. 952. 6. *Domar Y.* – Ark. Mat., 1958, vol. 3, № 5, p. 429–440. 7. *Гурарий В.П.* – Зап. научн. сем. ЛОМИ АН СССР, 1970, т. 19, с. 215–220. 8. *Левин Б.Я.* Мажоранты в классах субгармонических функций и их приложения. I. Препринт ФТИНТ АН УССР, № 18- 84, Харьков, 1984. 52 с.

УДК 518.5 МАТЕМАТИКА

© Академик А.А. САМАРСКИЙ, В.Л. МАКАРОВ

# О РЕАЛИЗАЦИИ ТОЧНЫХ ТРЕХТОЧЕЧНЫХ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ 2-го ПОРЯДКА С КУСОЧНО-ГЛАДКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

1. Точная трехточечная разностная схема (т.т.р.с.) для краевой задачи вида

$$L^{(k,q)}u \equiv \frac{d}{dx}\left[k(x)\frac{du}{dx}\right] - q(x)u = -f(x), \quad x \in (0, 1),$$

$$(1) \qquad u(0) = A, \quad u(1) = B,$$

$$0 < C_1 \leqslant k(x) \leqslant C_2;$$

$$(2) \qquad q(x) \geqslant 0$$

в классе кусочно-гладких $k(x)$, $q(x)$, $f(x)$ построена в [1]. Реализация т.т.р.с. через усеченные разностные схемы $m$-го ранга (у.р.с.$m$.р.) была дана, а затем обобщена в [3] на неравномерную сетку и условия третьего рода. При точном вычислении многократных интегралов, через которые выражаются коэффициенты у р.с.$m$.р., в [2, 3] доказано, что их точность имеет порядок $O(h^{2m+2})$ для $k(x), q(x), f(x) \in Q^{(0)}[0, 1]$. В [4, 5] эти результаты обобщены на случай, когда $k(x) \in L_\infty(0, 1)$, $q(x) \in W_p^\theta(0, 1)$, $f(x) \in W_r^{\lambda-1}(0, 1)$, $p, r \geqslant 2$, $\theta, \lambda \in [0, 1]$.

В [6, 7] указана процедура построения трехточечных разностных схем (т.р.с.) любого порядка точности для достаточно гладких функций $k$, $q$, $f$. Эта процедура в [8] модифицирована для кусочно-гладких $k$, $q$, $f$ с точками разрыва в узлах сетки, условие (2) заменено на

$$|q(x)| \leqslant C_2. \tag{3}$$

Предложенные в [8] схемы неоднородные и требуют для своего построения (как и схемы из [6, 7]) решения линейной алгебраической системы, порядок которой зависит от желаемой точности разностной схемы.

В нашей работе для построения т.р.с. любого порядка точности для задачи (1), (3) в классе кусочно-гладких $k$, $q$, $f$ за основу взята т.т.р.с. Показано, что для ее задания в произвольном узле $x_j$ сетки $\omega_h$ нужно решить четыре вспомогательные задачи Коши: две на отрезке $[x_{j-1}, x_j]$ и две на отрезке $[x_j, x_{j+1}]$, причем оба отрезка не содержат внутри точек разрыва (помещены в узлы сетки). Исходя из этого факта, для реализации т.т.р.с. предложен следующий алгоритм. Каждую из задач Коши решаем за один шаг любым из одношаговых методов (разложения в ряд Тейлора, Рунге–Кутта) [9], порядок точности $2[(n+1)/2]$ которого согласован с гладкостью $k$, $q$, $f$. В результате получена однородная т.р.с. $n$-го порядка точности. Преимущество данной схемы перед ранее применявшимися [8] для кусочно-гладких $k$, $q$, $f$ помимо однородности состоит в том, что практически без увеличения вычислительных затрат построено трехточечное приближение в узлах сетки потока $kdu/dx$, точность которого в чебышевской метрике совпадает с точностью приближения $u(x)$ (в [8] оценивается погрешность приближения $u_{\bar{x}}$). В конце работы приведены результаты численных экспериментов.

2. Для простоты изложения ограничимся равномерной сеткой $\omega_h = \{x_j = jh\colon\ j = 1, \ldots, N-1;\ h = 1/N\}$ и одной точкой разрыва функций $k(x)$, $q(x)$, $f(x)$, совпадающей с $x_i$, причем

$$u(x_i - 0) = u(x_i + 0), \qquad k\frac{du}{dx}\bigg|_{x = x_i - 0} = k\frac{du}{dx}\bigg|_{x = x_i + 0}.$$

Введем шаблонные функции $v_\alpha^j(x)$, $\alpha = 1, 2$, как решения задачи Коши [1–5]

$$\begin{gathered} L^{(k,q)} v_\alpha^j(x) = 0, \qquad x \in (x_{j-2+\alpha}, x_{j-1+\alpha}), \\ v_\alpha^j(x_{j+(-1)^\alpha}) = 0, \qquad \left[k(x)\frac{dv_\alpha^j(x)}{dx}\right]_{x = x_{j+(-1)^\alpha}} = (-1)^{\alpha+1}, \\ \alpha = 1, 2;\ j = 1, \ldots, N-1. \end{gathered} \tag{4}$$

Лемма 1. *Пусть $k(x) \in C^1[0, x_i] \cup C^1[x_i, 1]$, $q(x) \in C[0, x_i] \cup C[x_i, 1]$ и*

$$h \leqslant \frac{1}{2}\sqrt{\frac{C_1}{C_2}}; \tag{5}$$

*тогда будут справедливы утверждения:*

(а) *Шаблонные функции* $v_\alpha^j(x)$, $\alpha = 1, 2$, *обладают свойствами:* $v_1^j(x) > 0$, *монотонно возрастает на* $(x_{j-1}, x_{j+1}]$, $v_2^j(x) > 0$ *и монотонно убывает на* $[x_{j-1}, x_{j+1})$.

(б) *Имеют место оценки*

$$(6)\qquad \frac{2}{3C_2} \leqslant v_\alpha^j(x)\,|\,x - x_{j+(-1)^\alpha}\,|^{-1} \leqslant \frac{2}{C_1} = M_1,\ \alpha = 1, 2;\ j = 1, \ldots, N-1.$$

Лемма 2. *Пусть выполнены условия леммы* 1 *и однородная краевая задача* (1) *имеет только тривиальное решение, тогда для* (1) *существует единственная т.т.р.с.*

$$(7)\qquad \Lambda y \equiv (a y_{\bar{x}})_x - dy = -\varphi(x),\ \ x \in \omega_h,\ y(0) = A,\ \ y(1) = B,$$

*имеющая единственное решение* $y(x) \equiv u(x)$, $\forall x \in \bar{\omega}_h$, *где*

$$(8)\qquad \begin{gathered} a(x_j) = [v_1^j(x_j)h^{-1}]^{-1},\ d(x_j) = T^{x_j}(q),\ \ \varphi(x_j) = T^{x_j}(f),\\ T^{x_j}(w) = [h\, v_1^j(x_j)]^{-1} \int\limits_{x_{j-1}}^{x_j} v_1^j(\xi)\, w(\xi)\, d\xi + [h v_2^j(x_j)]^{-1} \int\limits_{x_j}^{x_{j+1}} v_2^j(\xi)\, w(\xi)\, d\xi, \end{gathered}$$

*причем*

$$(9)\qquad M_1^{-1} \leqslant a(x_j),\ \ |\,d(x_j)| \leqslant 2C_2,\ \ |\,\varphi(x_j)\,| \leqslant 2\,\|f\|_{0,\infty,(0,1)}.$$

Доказательство лемм 1, 2 потребовало модификации соответствующих доказательств из [1–5] с привлечением леммы Гронуолла из-за замены условия (2) на (3).

Для дальнейшего потребуется утверждение, усиливающее лемму о коэффициентной (ко-) устойчивости [2–5]. Рассмотрим возмущенную схему

$$(\tilde{a}\tilde{y}_{\bar{x}})_x - \tilde{d}\,\tilde{y} = -\tilde{\varphi}(x),\quad x \in \omega_h,\quad \tilde{y}(0) = A,\quad \tilde{y}(1) = B.$$

Для погрешности $z(x) = y(x) - \tilde{y}(x)$ приходим к задаче, решение которой с помощью функции Грина можно представить в виде

$$(10)\qquad \begin{aligned} z(x) = &\sum_{\xi \in \omega_h^+} h\, G(x, \xi)_\xi - [\,\tilde{a}(\xi) - a(\xi)]\,\tilde{y}_{\bar{\xi}} + \\ &+ \sum_{\xi \in \omega_h} h\, G(x, \xi)\,\{[\tilde{d}(\xi) - d(\xi)]\,\tilde{y}(\xi) + \varphi(\xi) - \tilde{\varphi}(\xi)\}. \end{aligned}$$

В (10)

$$G(x, \xi) = \frac{1}{V_1(1)} \begin{cases} V_1^h(x)\, V_2^h(\xi), & 0 \leqslant x \leqslant \xi,\\ V_1^h(\xi)\, V_2^h(x), & \xi \leqslant x \leqslant 1, \end{cases}$$

где $V_\alpha^h(x)$ – решения дискретных задач Коши

$$(11)\qquad \begin{gathered} \Lambda V_\alpha^h(x) = 0,\quad x \in \omega_h,\quad V_1^h(0) = V_2^h(1) = 0,\\ a(x_1)\,[V_1^h(x_1)]_{\bar{x}} = -a(1)\,[V_2^h(1)]_{\bar{x}} = 1, \end{gathered}$$

а $V_1(x)$ – решение непрерывной задачи Коши

$$(12)\quad L^{(k,q)} V_1(x)=0,\quad x\in(0,1),\quad V_1(0)=0,\quad \left[k(x)\frac{dV_1(x)}{dx}\right]_{x=0}=1.$$

Из (10) следует справедливость представления

$$(13)\quad [z(x)]_{\bar x} = \sum_{\xi\in\omega_h^+} h\,[G(x,\xi)]_{\bar x\bar\xi}\,[\tilde a(\xi)-a(\xi)]\,\tilde y_{\bar\xi}(\xi) +$$

$$+\sum_{\xi\in\omega_h} h\,[G(x,\xi)]_{\bar x}\,\{[\tilde d(\xi)-d(\xi)]\,\tilde y(\xi)+\varphi(\xi)-\tilde\varphi(\xi)\},$$

причем

$$\{[G(x,\xi)]_{\bar x\bar\xi}\}_{\xi=x} = [V_1(1)]^{-1}\,[V_1^h(x)]_{\bar x}\,[V_2^h(x)]_{\bar x} + [ha(x)]^{-1}.$$

Лемма 3. *Пусть выполнимы условия леммы 2, тогда будут иметь место неравенства*

$$|V_\alpha^h(x)|\leqslant M_2,\quad \forall x\in\bar\omega_h,\quad |[V_\alpha^h(x)]_{\bar x}|\leqslant M_3,\quad \forall x\in\omega_h^+,$$

*где постоянные $M_2$ и $M_3$ зависят только от $C_1$, $C_2$ и не зависят от $h$. Из* (10), (13) *и леммы* 3 *следует усиленный вариант леммы о ко-устойчивости.*

Лемма 4. *Пусть выполнены условия леммы 2, тогда т.т.р.с. является ко-устойчивой, т.е.*

$$\|y-\tilde y\|_{0,\infty,\omega_h}\leqslant |V_1(1)|^{-1} M_2\{M_3\|a-\tilde a\|_{0,1,\omega_h^+}\|\tilde y_{\bar x}\|_{0,\infty,\omega_h^+} +$$

$$+M_2[\|d-\tilde d\|_{0,1,\omega_h}\|\tilde y\|_{0,\infty,\omega_h} + \|\varphi-\tilde\varphi\|_{0,1,\omega_h}\},$$

$$\|y_{\bar x}-\tilde y_{\bar x}\|_{0,\infty,\omega_h^+}\leqslant[M_1+|V_1(1)|^{-1}M_3^2]\|a-\tilde a\|_{0,\infty,\omega_h^+}\|\tilde y_{\bar x}\|_{0,\infty,\omega_h^+} +$$

$$+|V_1(1)|^{-1}M_2M_3\{\|d-\tilde d\|_{0,1,\omega_h}\|\tilde y\|_{0,\infty,\omega_h} + \|\varphi-\tilde\varphi\|_{0,1,\omega_h}\}.$$

3. Перейдем к алгоритмической реализации т.т.р.с. (7). Согласно основной идее необходимо выразить $a$, $d$, $\varphi$ только через решения задач Коши. Как следует из (8), для $a$, $d$ уже имеем необходимое представление

$$(14)\quad a(x_j)=[v_1^j(x_j)/h]^{-1},\quad d(x_j)=h^{-1}\sum_{\alpha=1}^{2}[v_\alpha^j(x_j)]^{-1}\,[(-1)^{\alpha+1}m_\alpha^j(x_j)-1].$$

Для $\varphi$ вводим две вспомогательные функции $w_\alpha^j(x)$, $\alpha=1,2$, как решения следующих задач Коши:

$$(15)\quad L^{(k,q)}w_\alpha^j(x)=-f(x),\quad x\in(x_{j-2+\alpha},x_{j-1+\alpha}),$$

$$w_\alpha^j(x_{j+(-1)^\alpha})=\frac{dw_\alpha^j(x_{j+(-1)^\alpha})}{dx}=0,$$

Таблица 1

| № | ERR | p | ERR | p |
|---|---|---|---|---|
| Пример 1 | | | Пример 2 | |
| 8 | 0,902(−4) | | 0,192(−4) | |
| 16 | 0,586(−5) | 3,9 | 0,128(−5) | 3,9 |
| 32 | 0 372(−6) | 4,0 | 0,833(−7) | 3,9 |
| 64 | 0,234(−7) | 4,0 | 0,530(−8) | 4,0 |
| 188 | 0,146( 8) | 4,0 | 0,334(−9) | 4,0 |
| 256 | 0,909(−10) | 4,0 | 0,207(−10) | 4,0 |

с помощью которых получаем

$$(16)\qquad \varphi(x_j) = h^{-1} \sum_{\alpha=1}^{2} (-1)^{\alpha} \{ l_{\alpha}^{j}(x_j) - m_{\alpha}^{j}(x_j)\, w_{\alpha}^{j}(x_j)/v_{\alpha}^{j}(x_j)\}.$$

Здесь $m_{\alpha}^{j}(x) = k(x)\, dv_{\alpha}^{j}(x)/dx$, $l_{\alpha}^{j}(x) = k(x)\, dw_{\alpha}^{j}(x)/dx$. Нетрудно показать (следует из теории т.т.р.с. 1–5), что и поток $k\, du/dx$ может быть выражен через решения задач Коши (4), (15):

$$(17)\qquad k(x_j)\frac{du(x_j)}{dx} = \sum_{\alpha=1}^{2} \{ m_{\alpha}^{j}(x_j)\, u(x_{j-(-1)^{\alpha}}) + (-1)^{\alpha+1} [m_1^j(x_j)\, m_2^j(x_j)\, w_{\alpha}^{j}(x_j) +$$

$$+ m_{\alpha}^{j}(x_j)\, v_{3-\alpha}^{j}(x_j)\, l_{3-\alpha}^{j}(x_j)]\} \left[\sum_{\alpha=1}^{2} (-1)^{\alpha} v_{\alpha}^{j}(x_j)\, m_{3-\alpha}^{j}(x_j)\right]^{-1}.$$

Каждую из четырех задач Коши (4), (15) решим приближенно за один шаг методом разложения в ряд Тейлора или методом Рунге–Кутта $\bar{n}$-го порядка точности. Подставив найденные приближения в формулы (14), (16), а также в (18), придем к разностной схеме

$$(18)\qquad (a^{(n)} y_{\bar{x}}^{(n)})_x - d^{(n)} y^{(n)} = -\varphi^{(n)}(x), \quad x \in \omega_h, \quad y^{(n)}(0) = A, \quad y^{(n)}(1) = B.$$

После нахождения решения (18) и подстановки в (17) получаем одновременно приближение для потока $k\,du/dx$. Имеет место

Теорема 1. *Пусть* $0 < C_1 \leqslant k(x)$, $k(x) \in W_{\infty}^{n+1}(0, x_i) \cup W_{\infty}^{n+1}(x_i, 1)$, $q(x)$, $f(x) \in W_{\infty}^{n}(0, x_i) \cup W_{\infty}^{n}(x_i, 1)$; *тогда будут справедливы оценки*

$$|a^{(n)}(x) - a(x)| \leqslant Mh^n, \quad x \in \omega_h^+, \quad |d^{(n)}(x) - d(x)| \leqslant Mh^{\bar{n} - \delta(i,j)(n+1-\bar{n})},$$

$$|\varphi^{(n)}(x) - \varphi(x)| \leqslant Mh^{n - \delta(i,j)(n+1-\bar{n})}, \quad x \in \omega_h, \quad \bar{n} = 2\left[\frac{n+1}{2}\right],$$

*где постоянная* $M$ *не зависит от* $h$, $\delta(i,j)$ – *символ Кронекера.*

С помощью леммы 4 и теоремы 1 доказывается

Теорема 2. *Пусть выполнены условия леммы 4 и теоремы 1, тогда будет иметь место оценка*

$$\|z^{(n)}\|_{1,\infty,\omega_h} = \max\{\|u - y^{(n)}\|_{0,\infty,\omega_h},$$

$$\|k\,du/dx - k\,dy^{(n)}/dx\|_{0,\infty,\omega_h}\} \leqslant Mh^n,$$

*т.е. разностная схема* (18) *в сильной норме имеет n-й порядок точности. Здесь постоянная M не зависит от h.*

4. Численные примеры. Пример 1. $k(x) = 1 + H(x - 0{,}75)$, $q(x) = -3 + xH(x - 0{,}75)$, $u(x) = e^x - 1 - H(x - 0{,}75) \cdot 0{,}5(e^x - e^{0{,}75})$.

Пример 2 [8]. $k(x) = \exp\{x - 0{,}5H(0{,}75 - x)\}$, $q(x) = [1 + H(x - 0{,}75)]/(x+1)$, $u(x) = \exp\{x - 0{,}5H(x - 0{,}75)\} + H(x - 0{,}75)(e^{0{,}75} - e^{0{,}25})$.

Для решения задач Коши (4), (15) применялся явный метод Рунге–Кутта 4-го порядка точности. Результаты счета приведены в табл. 1, где

$$ERR = \|z^{(4)}\|_{1,\infty,\,\omega_h}, \qquad p = \log_2 \frac{\|z^{(4)}\|_{1,\infty,\,\omega_h}}{\|z^{(4)}\|_{1,\infty,\,\omega_{h/2}}};$$

вычисления произведены с двойной точностью Л.Д. Грековым, за что авторы выражают ему большую благодарность.

Институт прикладной математики
им. М.В. Келдыша
Академии наук СССР
Москва

Киевский государственный университет
им. Т.Г. Шевченко

Поступило
12 III 1990

ЛИТЕРАТУРА

1. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* – ДАН, 1958, т. 122, № 4, с. 562–565. 2. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* – ЖВМ и МФ, 1961, т. 1, № 1, с. 5–63. 3. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* – Там же, № 3, с. 425–440. 4. *Годев К.Н., Лазаров Р.Д., Макаров В.Л., Самарский А.А.* – Мат. сб., 1986, № 10. 5. *Самарский А.А., Лазаров Р.Д., Макаров В.Л.* Разностные схемы для дифференциальных уравнений с обобщенными решениями. М.: Высш. шк., 1987, 296 с. 6. *Lynch R.E., Rice J.R.* – Math. Comp., 1980, vol. 34, p. 333–372. 7. *Doedel E. J.* – SIAM J. Numer. Anal., 1978, vol. 15, p. 450–465. 8. *Gartland E.C.Jr.* – IMA J. Numer. Anal., 1989, vol. 9, p. 243–260. 9. *Ляшко И.И., Макаров В.Л., Скоробогатько А.А.* Методы вычислений. Киев: Высш. шк., 1977. 408 с.