Математическое моделирование

том **2** номер **11/1990**

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ АЛГОРИТМЫ И МЕТОДЫ

УДК 519.6

РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ ДЛЯ НЕУСТОЙЧИВЫХ ЗАДАЧ

© *А.А. Самарский, П.Н. Вабищевич*

Всесоюзный центр математического моделирования АН СССР, Москва

На примере модельной краевой задачи для параболического уравнения второго порядка рассматриваются основные подходы к приближенному решению неустойчивых задач математической физики разностными методами. Исследование устойчивости соответствующих разностных схем проводится на основе общих результатов теории ρ-устойчивости разностных схем. Регуляризация разностных схем соответствует на дифференциальном уровне использованию некоторых (известных и неизвестных) вариантов метода квазиобращения.

DIFFERENCE SCHEMES FOR NON-STABLE PROBLEMS

A.A. Samarskii, P.N. Vabishchevich

The paper deals with some basic methods for non-stable mathematical physics problems. The example of ill-posed model problem for parabolic equation of second order is considered. Stability of this schemes is studied by usage of general results of ρ-stability theory. The regularisation of finite-difference schemes is similar to some modification of the quasy-inversion method for differential problems.

Многие прикладные проблемы приводят к необходимости приближенного решения обратных задач для уравнений математической физики, которые некорректны в классическом смысле [1]. Наиболее значительно продвинуты исследования по решению обратных задач теплообмена [2, 3]. Среди обратных задач для параболических уравнений можно выделить задачу с обратным временем (ретроспективная обратная задача). В этом случае по заданному в некоторый момент времени решению необходимо найти решение в предшествующие моменты времени. Другим примером некорректной эволюционной задачи может служить задача Коши для эллиптических уравнений [4].

Для приближенного решения некорректных задач применяются методы регуляризации [1]. Они основаны на сужении класса допустимых решений, выделении класса корректности, в котором уже имеет место непрерывная зависимость решения от входных данных. Поэтому здесь говорят об условной корректности задачи.

Для устойчивого решения некорректных задач математической физики в [5] развивается метод квазиобращения, основанный на переходе к задаче для возмущенного уравнения, для которого задача корректна. Параметр возмущения выступает в качестве параметра регуляризации. Новые варианты метода квазиобращения предложены в работах [6, 7].

Вычислительная реализация метода квазиобращения связана с необходимостью исследования решения соответствующей сеточной задачи. В частности, необходимо

установить устойчивость разностного решения по начальным данным и правой части [8, 9]. Для неустойчивых эволюционных задач наиболее естественно использовать теорию ρ-устойчивости разностных схем [8–11]. Специфика неустойчивых задач передается выбором $\rho > 1$ – допускается ограниченный рост решения. С позиций общей теории ρ-устойчивости разностных схем в работах [12, 13] рассмотрены схемы метода квазиобращения. Отметим в этой связи и более раннюю работу [14].

К построению устойчивых разностных схем для некорректных эволюционных задач можно подойти и с несколько других позиций, а именно, с позиций теории регуляризации разностных схем [15]. Сначала для исходной задачи строится какая-то простейшая разностная схема, не обладающая необходимыми свойствами. Затем эта разностная схема улучшается в необходимую сторону. Теория регуляризации разностных схем здесь рассматривается как принцип улучшения качества разностной схемы за счет введения новых слагаемых. В рассматриваемом случае неустойчивых задач дополнительное слагаемое (регуляризатор) вводится так, чтобы обеспечить ρ-устойчивость разностной схемы.

В данной работе схема построения устойчивых разностных методов на основе принципа регуляризации разностных схем проводится на примере задачи с обратным временем для параболического уравнения второго порядка. Показано, что использование естественных регуляризаторов приводит к тем же разностным схемам, которые получаются при использовании различных вариантов метода квазиобращения. На этом пути удается получить и ранее неизвестные варианты метода квазиобращения.

§ 1. Ретроспективная обратная задача для параболического уравнения

Обозначим через D ограниченную область m-мерного пространства $\mathbf{R}^m$ с достаточно гладкой границей ∂D. В $\mathbf{R}^m \times \{-\infty < t < \infty\}$ рассмотрим ограниченный цилиндр

$$Q = \{(x, t) |\ x \in D,\quad 0 < t < T\},\quad T > 0,$$

где $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$, с боковой поверхностью

$$\Gamma = \{(x, t) |\ x \in \partial D,\ 0 < t < T\}.$$

Определим для $x \in D$ равномерно эллиптический, самосопряженный оператор

$$\mathcal{A}u \equiv -\sum_{i,j=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) \tag{1.1}$$

с достаточно гладкими коэффициентами $a_{ij}(x)$, $x \in D$.

Ищется решение $u(x, t)$, удовлетворяющее уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \mathcal{A}u = 0,\quad (x, t) \in Q, \tag{1.2}$$

граничным условиям

$$u(x, t) = 0,\quad (x, t) \in \Gamma \tag{1.3}$$

при заданном начальном условии

$$u(x, 0) = \Phi(x),\quad x \in D. \tag{1.4}$$

Задача (1.1)–(1.4) есть задача с обратным временем для параболического уравнения (ретроспективная обратная задача). Некорректность этой задачи обусловлена неустойчивостью решения относительно малых изменений начального условия (функции $\Phi(x)$).

Необходимость решения неустойчивых задач, подобных приведенной выше, требует более точного определения решения задачи. В условно корректных задачах, задачах, корректных по А.Н. Тихонову, речь идет уже не просто о решении, а о решении, принадлежащем некоторому классу. Сужение класса допустимых решений позволяет в некоторых случаях перейти к корректной задаче.

Класс априорных ограничений может быть разный. Для ретроспективной обратной задачи (1.1)–(1.4) корректность имеет место для положительных решений [16]. Такое ограничение в задачах теплофизики не вызывает никаких возражений.

Для приближенного решения неустойчивой задачи (1.1)–(1.4) будем использовать разностные методы. В области D введем сетку ω_h. Не ограничивая общности, будем считать, что сетка ω_h равномерна по каждому направлению. Шаг сетки по переменной x_i обозначим h_i, где $i = 1, 2, \ldots, m$.

Аппроксимируем оператор $\mathcal{A}$, определенный по (1.1) с учетом (1.3), соответствующим сеточным оператором $\mathcal{A}_h$. Конкретный выбор оператора $\mathcal{A}_h$ проводится на основе теории разностных схем [8]. Отметим лишь наиболее важные свойства оператора $\mathcal{A}_h$. На сетке ω_h определим пространство сеточных функций $H = L_2(\omega_h)$ со скалярным произведением

$$(y, z) = \sum_{x \in \omega_h} y(x) z(x) h_1 h_2 \ldots h_m .$$

В H оператор $\mathcal{A}_h$ самосопряжен и положительно определен. Справедлива следующая оценка

$$\delta E \leqslant \mathcal{A}_h \leqslant \Delta E, \tag{1.5}$$

причем $\delta = O(1) > 0$, $\Delta = O(h^{-2})$, где h – характерный размер сетки ω_h.

От задачи (1.1)–(1.4) придем к следующей дифференциально-разностной задаче. Решение определяется из уравнения

$$\frac{dy}{dt} - \mathcal{A}_h y = 0, \tag{1.6}$$

дополненного начальным условием

$$y(x, 0) = \Phi(x), \quad x \in \omega_h . \tag{1.7}$$

По переменной t вводим сетку

$$\omega_\tau = \{ t \mid t = n\tau, \ n = 0, 1, \ldots, N, \ N\tau = T \}$$

с шагом $\tau > 0$.

§ 2. ρ-устойчивость разностных схем

Теория устойчивости разностных схем базируется на записи разностной схемы в канонической форме. Для двухслойных разностных схем она имеет вид [8, 9]:

$$B \frac{y_{n+1} - y_n}{\tau} + A y_n = 0, \quad n = 0, 1, \ldots \tag{2.1}$$

при заданном $y_0(x) = \Phi(x)$, $x \in \omega_h$.

Для корректных эволюционных задач обычное условие устойчивости по начальным данным в H_D имеет вид

$$\| y_{n+1} \|_D \leqslant \| y_n \|_D , \tag{2.2}$$

где $\| y \|_D^2 = (Dy, y)$, а $D = D^* > 0$.

Приведем следующий основной результат теории устойчивости разностных схем [8–10].

Теорема 0 (основная). *Пусть в* (2.1) *операторы A и B постоянные (не зависят от n), самосопряженные и положительны операторы* $(A = A^* > 0,\ B = B^* > 0)$. *Тогда условие*

$$B \geqslant (\tau/2)A \tag{2.3}$$

является необходимым и достаточным условием устойчивости схемы (2.1) *в H_A и H_B.*

Подчеркнем, что речь идет о необходимых и достаточных условиях устойчивости разностных схем, и поэтому приведенный результат носит окончательный и неулучшаемый характер.

Приведем также необходимые и достаточные условия устойчивости в условиях, когда один из операторов A или B несамосопряжен. При $A = A^* > 0$ устойчивость в H_A имеет место при выполнении того же условия (2.3), что и в случае самосопряженного оператора B. Для устойчивости в H_B при $B = B^* > 0$ необходимо и достаточно выполнения неравенства для обратных операторов $A^{-1} \geqslant (\tau/2)B^{-1}$.

При рассмотрении разностных схем для некорректных задач типа (1.1)–(1.4) условие устойчивости (2.2) не подходит. Это связано с тем, что само решение (его норма) обратной задачи для уравнения теплопроводности в отличие от решения прямой задачи не затухает, а растет. На сеточном уровне это проявляется тем, что в дифференциально-разностной задаче (1.6), (1.7) оператор $\mathcal{A}_h$ положительно определен.

Некорректность рассматриваемой задачи связана с тем, что наиболее быстро растут паразитные высокочастотные гармоники. Требуется каким-либо образом допустить рост низких гармоник и ограничить рост высоких. Если мы допускаем рост решения, что, еще раз подчеркнем, характерно для обратной ретроспективной задачи (1.1)–(1.4), то необходимо уточнить условие устойчивости разностных схем (2.2). Таким естественным образом мы приходим к понятию ρ-устойчивости разностных схем.

Назовем разностную схему (2.1) ρ-устойчивой [10], если выполнено условие

$$\| y_{n+1} \|_D \leqslant \rho \| y_n \|_D, \tag{2.4}$$

где $\rho > 0$. Специфика некорректных задач (рост нормы решения по времени) проявляется в том, что выбирается $\rho > 1$.

Для конкретизации выбора ρ используют два представления:

$$\rho = \exp(c\tau), \quad \rho = 1 + c\tau,$$

где постоянная c не зависит от сетки (от τ и h). При таких ρ из (2.4) следует оценка устойчивости разностного решения по начальным данным вида:

$$\| y_{n+1} \|_D \leqslant \exp(ct_{n+1}) \| y_0 \|_D. \tag{2.5}$$

Общие условия ρ-устойчивости двухслойных разностных схем сформулированы в работе [10], аналогичные результаты для трехслойных схем приведены в [11]. Наиболее полное изложение общей теории разностных схем имеется в книге [9].

Специфика разностных схем для некорректных задач проявляется в том, что условие положительности оператора A не выполняется. Поэтому разностные схемы исследуются в H_B.

Теорема 1. *Пусть в* (2.1) *операторы A и B постоянные (не зависят от n), самосопряженные и B – положительный оператор. Тогда выполнение операторных неравенств*

$$\frac{1-\rho}{\tau} B \leqslant A \leqslant \frac{1+\rho}{\tau} B \tag{2.6}$$

необходимо и достаточно для устойчивости разностной схемы (2.1) *в H_B.*

Так как $B = B^* > 0$, то существуют $B^{1/2}$ и $B^{-1/2}$. Пусть $x = B^{1/2}y$, тогда, домно-

жая (2.1) слева на $B^{-1/2}$, получим

$$\frac{x_{n+1}-x_n}{\tau}+Cx_n=0, \tag{2.7}$$

где $C=B^{-1/2}AB^{-1/2}$. Из (2.7) следует

$$x_{n+1}=Sx_n, \quad S=E-\tau C, \tag{2.8}$$

где E – единичный оператор. Условие ρ-устойчивости в H_B имеет вид $\|x_{n+1}\| \leqslant \leqslant \rho\|x_n\|$. Это неравенство эквивалентно следующей оценке для оператора перехода S: $\|S\| \leqslant \rho$. Самосопряженность оператора S позволяет перейти к эквивалентному неравенству $-\rho E \leqslant S \leqslant \rho E$, которое с учетом (2.8) принимает вид

$$\frac{1-\rho}{\tau}E \leqslant C \leqslant \frac{1+\rho}{\tau}E. \tag{2.9}$$

Умножая каждое из неравенств (2.9) с обеих сторон на $B^{1/2}$, придем к доказываемому неравенству (2.6).

Еще раз подчеркнем, что теорема 1 доказана без условия $A>0$. Для устойчивости разностной схемы (2.1) с $\rho=1$ необходимо выполнение условия $A \geqslant 0$, а при $\rho<1-$ $A>0$. Эти условия содержатся в левом неравенстве (2.6). Для ρ-устойчивости разностной схемы (2.1) с $\rho>1$ (см. (2.6)) условие положительности оператора A, вообще говоря, не требуется.

§ 3. Регуляризация разностных схем

В работе [15] предложен и проиллюстрирован на многих примерах принцип регуляризации разностных схем. Для общих двух- и трехслойных схем формулируются рецепты улучшения качества (устойчивости) разностных схем. Принцип регуляризации предложен и применялся для разностных схем для прямых эволюционных задач математической физики. Этот подход тем более оправдан для построения разностных схем для некорректных задач.

Идеи регуляризации проиллюстрируем на примере обычной начально-краевой задачи для параболического уравнения. Дифференциально-разностная задача (см. (1.6), (1.7)) имеет вид:

$$\frac{dy}{dt}+\mathcal{A}_h y=0, \tag{3.1}$$

$$y(x,0)=\Phi(x), \quad x\in\omega_h. \tag{3.2}$$

Запишем для задачи (3.1), (3.2) простейшую явную разностную схему:

$$\frac{y_{n+1}-y_n}{\tau}+\mathcal{A}_h y_n=0, \quad n=0,1,\ldots \tag{3.3}$$

Хорошо известно [8, 9], что эта схема устойчива при достаточно малых шагах по времени ($\tau \leqslant O(h^2)$). Используем принцип регуляризации для того, чтобы на основе явной схемы (3.3) построить абсолютно устойчивые разностные схемы.

Схема (3.3) записывается в каноническом виде (2.1) с $B=E$, $A=\mathcal{A}_h$. Регуляризация основана на переходе от исходной разностной схемы к некоторой другой (возмущенной) схеме. Пусть $R=R^*>0$ – регуляризирующий сеточный оператор, через α обозначим параметр регуляризации (возмущения). Аналогично [15] регуляризованную схему для (3.3) запишем в виде

$$(E+\alpha R)\frac{y_{n+1}-y_n}{\tau}+\mathcal{A}_h y_n=0, \quad n=0,1,\ldots \tag{3.4}$$

Ориентируясь только на корректные задачи в [15], параметр возмущения α выбирался равным τ. Для регуляризованной схемы (3.4) справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. *Разностная схема* (3.4) *с* $\mathcal{A}_h = \mathcal{A}_h^* > 0$ *безусловно устойчива в* H_A *при выборе регуляризатора* $R = \mathcal{A}_h$, *если* $\alpha \geqslant \tau/2 - \|\mathcal{A}_h\|^{-1}$, *для регуляризатора* $R = \mathcal{A}_h^2$, *если параметр регуляризации* $\alpha \geqslant \tau^2/16$.

Выбор регуляризатора в виде $R = \mathcal{A}_h^2$ обычно не рассматривается, но, как нам кажется, представляет несомненный интерес. Доказательство теоремы базируется на проверке необходимого и достаточного условия устойчивости (2.3). В случае схемы (3.4) имеем

$$B = E + \alpha R, \quad A = \mathcal{A}_h. \tag{3.5}$$

С учетом $\mathcal{A}_h \leqslant \|\mathcal{A}_h\| E$ при $R = \mathcal{A}_h$ подстановка (3.5) в (2.3) дает $(\|\mathcal{A}_h\|^{-1} + \alpha - \tau/2)\mathcal{A}_h \geqslant 0$. Отсюда и следует доказываемое утверждение. Заметим, что (см. (1.5)) $\|\mathcal{A}_h\| \leqslant \Delta$.

Для регуляризатора $R = \mathcal{A}_h^2$ и (3.5) неравенство (2.3) преобразуется следующим образом:

$$B - \tau/2A = E + \alpha\mathcal{A}_h^2 - \tau/2\mathcal{A}_h =$$
$$= (\alpha^{1/2}\mathcal{A}_h - \tau/(4\alpha^{1/2})E)^2 + (1 - \tau^2/(16\alpha))E \geqslant 0.$$

Отсюда и следует, что при $R = \mathcal{A}_h^2$ и $\alpha \geqslant \tau^2/16$ регуляризованная разностная схема (3.4) абсолютно устойчива.

Отметим, что выбор $\alpha = \sigma\tau$ при $R = \mathcal{A}_h$ соответствует обычной схеме с весами. Исследование таких схем регуляризации для уравнений параболического типа проводится в работе [15].

В плане вычислительной реализации выбор регуляризатора $B = \mathcal{A}_h^2$ связан с необходимостью обращения сеточного эллиптического оператора четвертого порядка $B = E + \alpha\mathcal{A}_h^2$, что может оказаться не совсем удобным. Поэтому можно использовать факторизованный оператор типа $B = (E + \alpha R)^2$, $R = \mathcal{A}_h$. В этом случае условие устойчивости имеет вид $\alpha \geqslant \tau/8$.

При приближенном решении многомерных задач большое внимание уделяется построению экономичных схем [8]. Факторизованные разностные схемы могут быть построены на основе принципа регуляризации. Приведем лишь некоторые результаты в этом направлении, развивающие результаты, сформулированные в теореме 2.

Ограничимся, для простоты, случаем, когда сеточный оператор $\mathcal{A}_h$ представим в виде:

$$\begin{gathered}\mathcal{A}_h = \sum_{k=1}^{p} \mathcal{A}_h^k, \quad \mathcal{A}_h^k = (\mathcal{A}_h^k)^* > 0, \\ \mathcal{A}_h^k \mathcal{A}_h^s = \mathcal{A}_h^s \mathcal{A}_h^k, \quad k, s = 1, 2, \ldots, p.\end{gathered} \tag{3.6}$$

Представление (3.6) соответствует обычному расщеплению по пространственным переменным.

Теорема 3. *Факторизованная разностная схема* (2.1) *с*

$$B = \prod_{k=1}^{p} (E + \alpha R_k), \quad A = \mathcal{A}_h, \tag{3.7}$$

где $\mathcal{A}_h$ *удовлетворяет условиям* (3.6), *устойчива при* $R_k = \mathcal{A}_h^k$, *если* $\alpha \geqslant \tau/2 - \|\mathcal{A}_h\|^{-1}$, *а при* $R_k = (\mathcal{A}_h^k)^2$, *если* $\alpha \geqslant p\tau^2/16$.

Доказательство этого утверждения базируется на доказательстве теоремы 2. При выборе оператора B согласно (3.6), (3.7) в случае $R_k = \mathcal{A}_h^k$ имеем

$$\prod_{k=1}^{p} (E + \alpha\mathcal{A}_h^k) \geqslant E + \alpha\mathcal{A}_h.$$

Поэтому, как и в теореме 2, при $\alpha \geqslant \tau/2 - \|\mathcal{A}_h\|^{-1}$ факторизованная схема (2.1), (3.6), (3.7) будет устойчива.

Рассмотрим теперь случай $R_k = (\mathcal{A}_h^k)^2$. Для доказательства теоремы используется следующее неравенство:

$$\prod_{k=1}^{p} (E + \alpha(\mathcal{A}_h^k)^2) \geqslant E + \frac{\alpha}{p} (\mathcal{A}_h)^2.$$

Принимая во внимание теорему 2, получим, что при $\alpha \geqslant p\tau^2/16$ факторизованная схема (2.1), (3.6), (3.7) устойчива.

§ 4. Регуляризация разностных схем для неустойчивых задач

Используем принцип регуляризации разностных схем, проиллюстрированный выше для корректной задачи (3.1), (3.2), для построения разностных схем для некорректной задачи (1.6), (1.7). Рассмотрим вначале явную разностную схему для (1.6), (1.7):

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{\tau} - \mathcal{A}_h y_n = 0, \quad n = 0, 1, \ldots \tag{4.1}$$

Для получения устойчивых разностных схем на основе явной разностной схемы (4.1) используем принцип регуляризации. Схема (4.1) записывается в каноническом виде (2.1) с $B = E$, $A = -\mathcal{A}_h$, т.е. $A = A^* < 0$.

Теорема 4. *Явная схема* (4.1) *ρ-устойчива в H с*

$$\rho = 1 + \Delta\tau, \tag{4.2}$$

где Δ – постоянная из оценки (1.5).

Теорема 4 отмечает регуляризирующий эффект при использовании обычных разностных схем для приближенного решения неустойчивых задач. Это непосредственно связано с ограниченностью сеточного эллиптического оператора $\mathcal{A}_h$. С учетом $\Delta = O(h^{-2})$ можно заключить, что шаг сетки по пространству ограничивает рост решения, т.е. выступает в качестве параметра регуляризации.

Доказательство основано на проверке условий ρ-устойчивости (2.6) для схемы (4.1). При $B > 0$, $A < 0$ и $\rho > 1$ правая часть двустороннего операторного неравенства (2.6), очевидно, выполнена при всех $\tau > 0$. Левая часть (2.6) принимает вид $(\rho - 1)/\tau E \geqslant \mathcal{A}_h$, которое будет выполнено при выборе ρ согласно (4.2).

Прежде чем строить регуляризованные схемы для задачи (1.6), (1.7) на основе явной схемы (4.1) сделаем следующее замечание. При приближенном решении некорректных задач важнейшее значение [1] имеет выбор параметра регуляризации, который, в частности, должен быть согласован с уровнем погрешности во входных данных. Этот вопрос при построении разностных схем для задачи (1.1), (1.4) нами в данной работе не рассматривается. Мы сосредоточили свое внимание на построении устойчивых вычислительных алгоритмов для некорректных эволюционных задач и исследуем влияние параметра регуляризации только на устойчивость соответствующей разностной схемы. В более узком смысле, изучается зависимость ρ от параметра α при использовании различных способов регуляризации разностных схем. При заданном параметре регуляризации α мы указываем минимальное значение ρ, которое обеспечивается теорией устойчивости.

Как и в случае прямой задачи (см. (3.5), запишем регуляризованную схему в каноническом виде (2.1) с

$$B = E + \alpha R, \quad A = -\mathcal{A}_h. \tag{4.3}$$

Теорема 5. *Регуляризованная схема* (2.1), (4.3) *ρ-устойчива в* H_B *с*

$$\rho = 1 + \tau/\alpha \quad \textit{при} \quad R = \mathcal{A}_h, \tag{4.4}$$

$$\rho = 1 + 2^{-1}\alpha^{-1/2}\tau \quad \textit{при} \quad R = \mathcal{A}_h^2. \tag{4.5}$$

Доказательство снова основано на проверке выполнения левой части двустороннего неравенства (2.6), которое для (4.3) принимает вид

$$(\rho - 1)/\tau(E + \alpha R) \geqslant \mathcal{A}_h. \tag{4.6}$$

При $R = \mathcal{A}_h$ и выборе ρ в виде (4.4) неравенство (4.6) выполнено.

При $R = \mathcal{A}_h^2$ неравенство (4.6) преобразуется следующим образом:

$$E + \alpha\mathcal{A}_h^2 - \frac{\tau}{\rho - 1}\mathcal{A}_h = (\alpha^{1/2}\mathcal{A}_h - \frac{\tau}{2(\rho - 1)}\alpha^{-1/2}E)^2 +$$

$$+ (1 - \frac{\tau^2}{4(\rho - 1)^2}\alpha^{-1})E \geqslant 0.$$

Это неравенство будет выполнено при выборе ρ в виде (4.5). Тем самым теорема доказана.

Можно несколько уточнить оценку (4.4) для ρ. При $R = \mathcal{A}_h$ неравенство (4.6) принимает вид $(\rho - 1)/\tau(\|\mathcal{A}_h\|^{-1} + \alpha)\mathcal{A}_h \geqslant \mathcal{A}_h$. Отсюда следует, что ρ-устойчивость имеет место с $\rho = 1 + (\alpha + \|\mathcal{A}_h\|^{-1})^{-1}\tau$. Эта оценка при $\alpha = 0$ переходит в оценку (4.2) для ρ явной схемы (4.1).

Аналогично теореме 3 рассматривается случай использования факторизованных схем. Сформулируем соответствующий результат. Пусть теперь

$$B = \prod_{k=1}^{p} (E + \alpha R_k), \quad A = -\mathcal{A}_h. \tag{4.7}$$

Теорема 6. *Факторизованная схема* (2.1), (3.6), (4.7) *ρ-устойчива в* H_B *при* $R_k = \mathcal{A}_h^k$ *с* $\rho = 1 + \tau/\alpha$, *а при* $R_k = (\mathcal{A}_h^k)^2$ *с* $\rho = 1 + 2^{-1}(\alpha/p)^{-1/2}\tau$.

Как и в случае прямой задачи (см. теоремы 2 и 3) переход к факторизованным схемам в первом варианте возмущения дает те же результаты, а во втором — соответствует замене α на α/p.

В рассматриваемых задачах некорректность проявляется в том, что оператор A отрицательно определен. Поэтому правомерна в таких задачах попытка возмущения (регуляризации) оператора A. Будем вместо явной схемы (4.1) рассматривать регуляризованную схему вида:

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{\tau} - \mathcal{A}_h y_n + \alpha R y_n = 0, \quad n = 0, 1, \ldots \tag{4.8}$$

Для схемы (4.8) нет смысла в выборе регуляризатора $R = \mathcal{A}_h$. В случае $R = \mathcal{A}_h^2$ ситуация более благоприятна.

Теорема 7. *Регуляризованная схема* (4.8) *ρ-устойчива в* H *с*

$$\rho = 1 + \tau/(4\alpha) \tag{4.9}$$

при $R = \mathcal{A}_h^2$ *и* $\tau \leqslant 2/(\alpha\Delta^2)$, *где* Δ *— постоянная в оценке* (1.5).

Отметим, что схема (4.8) явная. Ограничения на шаг по времени вытекают из необходимости выполнения правой части (2.6). Имеем для схемы (4.9) $\alpha\mathcal{A}_h^2 > \alpha\mathcal{A}_h^2 - \mathcal{A}_h = A \leqslant (1 + \rho)/\tau E$. Поэтому при $\rho > 1$ и сформулированных ограничениях на шаг по времени правое неравенство (2.6) будет заведомо выполнено.

Как обычно, выберем ρ из условия выполнения левого неравенства (2.6). Имеем

$$(\rho - 1)/\tau E \leqslant A = \alpha\mathcal{A}_h^2 - \mathcal{A}_h = (\alpha^{1/2}\mathcal{A}_h - 2^{-1}\alpha^{-1/2}E)^2 - (4\alpha)^{-1}E.$$

Это неравенство будет выполнено при выборе ρ в виде (4.9).

При регуляризации типа (4.8) (возмущении оператора A) имеет место лишь условная ρ-устойчивость, в то время как при возмущении оператора B (см. теорему 5) регуляризованные схемы абсолютно ρ-устойчивые. Поэтому представляется естественным "поправить" схему типа (4.8) дополнительным возмущением оператора B. Такая комбинированная регуляризованная схема имеет вид:

$$(E+\alpha_1 R_1)\,\frac{y_{n+1}-y_n}{\tau} - \mathcal{A}_h y_n + \alpha_2 R_2 y_n = 0, \quad n = 0, 1, \ldots \tag{4.10}$$

Приведем характерный результат для схемы (4.10).

Теорема 8. *Регуляризованная схема* (4.10) *при* $\alpha_1 = \alpha_2\tau/2$ *и* $R_1 = R_2 = \mathcal{A}_h^2$ *ρ-устойчива в* H_B *при любых* $\tau > 0$ *с*

$$\rho = 1 + (4\alpha_2)^{-1}\tau. \tag{4.11}$$

Таким образом, возмущая оператор B в (4.8), удается избавиться от ограничений на шаг по времени. Для регуляризованных схем (4.8), (4.10) можно выписать и исследовать факторизованные схемы, аналогичные (2.1), (4.7).

§ 5. Регуляризованные схемы и метод квазиобращения

Основным подходом к приближенному решению неустойчивых задач для уравнений математической физики является метод квазиобращения [5]. Он основан на некотором возмущении исходного дифференциального уравнения так, чтобы для него задача была корректной. Предложенные выше разностные схемы, построенные на основе принципа регуляризации, могут быть проинтерпретированы с точки зрения метода квазиобращения. Для этого формулируется дифференциальная задача, которой соответствует регуляризованная разностная схема. И эта задача для дифференциального уравнения интерпретируется как тот или иной, известный или новый вариант метода квазиобращения.

Стандартный вариант метода квазиобращения (см. [5]) для задачи (1.1), (1.4) основан на переходе от уравнения (1.2) для точного решения $u(x, t)$ к уравнению

$$\frac{\partial u_\alpha}{\partial t} - \mathcal{A} u_\alpha + \alpha \mathcal{A}^2 u_\alpha = 0, \quad (x, t) \in Q \tag{5.1}$$

для приближенного решения $u_\alpha(x, t)$.

Для решения задачи (5.1), (1.3) справедлива оценка

$$\| u_\alpha(x, t) \| \leqslant \exp((4\alpha)^{-1} t)\, \| u_\alpha(x, 0) \|, \tag{5.2}$$

из которой вытекает устойчивость решения по начальным данным.

Используем для приближенного решения задачи (5.1), (1.3) разностную схему с весами:

$$\begin{aligned} &\frac{y_{n+1}-y_n}{\tau} - \mathcal{A}_h(\sigma_1 y_{n+1} + (1-\sigma_1) y_n + \\ &+ \alpha \mathcal{A}_h^2(\sigma_2 y_{n+1} + (1-\sigma_2) y_n) = 0, \; n = 0, 1, \ldots \end{aligned} \tag{5.3}$$

Сравнивая схему (5.3) с регуляризованной схемой (4.10), мы видим, что они совпадают при $\sigma_1 = 0$, $\alpha_1 = \sigma_2\tau\alpha$, $\alpha_2 = \alpha$ и $R_1 = R_2 = \mathcal{A}_h^2$. Заметим, что в оценке ρ-устойчивости регуляризованной схемы величина ρ (см. (4.11)) полностью соответствует оценке устойчивости решения непрерывной задачи (5.2).

Одним из наиболее интересных вариантов метода квазиобращения (см., напри-

мер, [6, 7]) является вариант, основанный на решении псевдопараболического уравнения

$$\frac{\partial u_\alpha}{\partial t} - \mathcal{A} u_\alpha + \alpha \mathcal{A} \frac{\partial u_\alpha}{\partial t} = 0, \quad (x, t) \in Q. \tag{5.4}$$

Оценка для решения задачи (5.4), (2.3) имеет вид

$$\| u_\alpha(x, t) \| \leqslant \exp(\alpha^{-1} t) \| u_\alpha(x, 0) \|. \tag{5.5}$$

Аналогично (5.3) запишем двухслойную разностную схему с весом для (5.4):

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{\tau} - \mathcal{A}_h(\sigma y_{n+1} + (1-\sigma) y_n) + \alpha \mathcal{A}_h \frac{y_{n+1} - y_n}{\tau} = 0, \quad n = 0, 1, \ldots \tag{5.6}$$

Схему (5.6) сопоставим с регуляризованной схемой (2.1), (4.3). При $\sigma = 0$ и выборе $R = \mathcal{A}_h$ они совпадают, а величина ρ (см. (4.4)) согласуется с оценкой (5.5).

Регуляризованная схема (2.1), (4.3) при выборе $R = \mathcal{A}_h^2$ среди известных вариантов метода квазиобращения аналогов не имеет. Этот новый вариант метода квазиобращения основан на решении уравнения

$$\frac{\partial u_\alpha}{\partial t} - \mathcal{A} u_\alpha + \alpha \mathcal{A}^2 \frac{\partial u_\alpha}{\partial t} = 0, \quad (x, t) \in Q. \tag{5.7}$$

Для решения задачи (5.7), (2.3) имеет место оценка

$$\| u_\alpha(x, t) \| \leqslant \exp(2^{-1} \alpha^{-1/2} t) \| u_\alpha(x, 0) \|,$$

аналогичная оценке для решения сеточной задачи (см. (4.5)).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.* Методы решения некорректных задач. – М.: Наука, 1986. – 288 с.
2. *Алифанов О.М.* Обратные задачи теплообмена. – М.: Машиностроение, 1988. – 280 с.
3. *Бек Дж., Блакуэлл Б., Сент–Клэр Ч.*, мл. Некорректные обратные задачи теплопроводности. – М.: Мир, 1989. – 312 с.
4. *Адамар Ж.* Задача Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа. – М.: Наука, 1978. – 352 с.
5. *Латтес Р., Лионс Ж.-Л.* Метод квазиобращения и его приложения. – М.: Мир, 1970. – 336 с.
6. *Showalter R.E.* Final value problem for evolution equations // J. Math. Anal. Appl. – 1974. – V. 47. – P. 563–572.
7. *Ewing R.* The approximation of certain parabolic equations backward in time by Sobolev equations // SIAM J. Math. Anal. – 1975. – V. 6, № 2. – P. 283–294.
8. *Самарский А.А.* Теория разностных схем. – М.: Наука, 1983. – 616 с.
9. *Самарский А.А., Гулин А.В.* Устойчивость разностных схем. – М.: Наука, 1975. – 416 с.
10. *Самарский А.А.* Необходимые и достаточные условия устойчивости двухслойных разностных схем // ДАН СССР. – 1968. – Т. 181, № 4. – С. 808–811.
11. *Самарский А.А.* Об устойчивости трехслойных разностных схем // ДАН СССР. – 1970. – Т. 192, № 5. – С. 998–1001.
12. *Вабищевич П.Н.* Разностные методы решения некоторых некорректных задач // Изв. ВУЗов. Матем. – 1984. – № 8. – С. 3–9.
13. *Вабищевич П.Н.* Численное решение обратной задачи теплопроводности с использованием регуляризованных разностных схем // ИФЖ. – 1985. – Т. 49, № 6. – С. 963–965.
14. *Тамме Э.Э.* Об устойчивости разностных схем при решении некорректных задач методом квазиобращения // ЖВМ и МФ. – 1972. – Т. 12, № 5. – С. 1319–1325.
15. *Самарский А.А.* О регуляризации разностных схем // ЖВМ и МФ. – 1967. – Т. 7, № 1. – С. 62–93.
16. *Григорьев Е.А.* Об устойчивости положительных решений обратной задачи теплопроводности // ЖВМ и МФ. – 1982. – Т. 22, № 6. – С. 1508–1513.

Поступила в редакцию
10.10.90