

М.И. БАКИРОВА, С.Н. ДИМОВА (НРБ), В.А. ДОРОДНИЦЫН,
член-корреспондент АН СССР С.П. КУРДЮМОВ,
академик А.А. САМАРСКИЙ, С.Р. СВИРЩЕВСКИЙ

ИНВАРИАНТНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ, ОПИСЫВАЮЩИЕ НАПРАВЛЕННОЕ РАСПРОСТРАНЕНИЕ ГОРЕНИЯ И СПИРАЛЬНЫЕ ВОЛНЫ В НЕЛИНЕЙНОЙ СРЕДЕ

Известно, что в нелинейной среде, процесс распространения тепла и горения в которой описывается уравнением

$$(1) \quad u_t = \operatorname{div}(u^\sigma \operatorname{grad} u) + u^\beta, \quad \sigma > 0, \quad \beta > 1,$$

горение может происходить в режиме с обострением, когда температура u за конечное время t_0 обращается в бесконечность [1–3]. Асимптотическая стадия ($t \rightarrow t_0$) таких режимов описывается автомодельными решениями вида

$$(2) \quad u(t, r) = (t_0 - t)^{1/(1-\beta)} f(\xi), \quad \xi = r(t_0 - t)^{(\sigma+1-\beta)/(2(\beta-1))},$$

где t_0 — момент обострения, а функция $f(\xi)$ удовлетворяет эллиптическому уравнению, получаемому после подстановки (2) в (1). В зависимости от соотношения между β и σ возможны три типа режимов с обострением:

$\beta = \sigma + 1$ — *S*-режим, горение происходит внутри фиксированной ограниченной области пространства, причем $u \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow t_0$ в каждой точке этой области;

$\beta > \sigma + 1$ — *LS*-режим, происходит эффективная локализация горения: $u \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow t_0$ в одной точке пространства;

$\beta < \sigma + 1$ — *HS*-режим, в каждый момент времени $t < t_0$ область горения ограничена, однако при $t \rightarrow t_0$ фронт волны горения стремится к бесконечности, а u обращается в бесконечность во всем пространстве.

При $\beta \geq \sigma + 1$ говорят о локализации (эффективной локализации) горения и о возникновении диссипативных структур в нелинейной среде.

Как известно, значение автомодельных решений определяется в первую очередь тем, что ими описываются асимптотики (промежуточные асимптотики) процессов для достаточно общих начальных условий [9]. В частности, это справедливо для решений (2) уравнения (1), что доказано как численными расчетами, так и аналитически [1–4]. Поэтому диссипативные структуры, которые могут возникать на развитой стадии горения, определяются только свойствами самой среды и описываются функциями (2). Функции $f(\xi)$, определяющие форму структуры, называют собственными функциями нелинейной среды [2, 3].

Основные закономерности режимов с обострением и образования диссипативных структур выявлены при исследовании одномерных задач [1–3]. Изучению двумерных и трехмерных изотропных сред посвящены работы [5–8]. Широкий спектр новых существенно неоднородных (не обладающих цилиндрической симметрией) структур получен в [7, 8].

В настоящей работе изучаются новые типы решений, описывающих режимы с обострением в нелинейных многомерных средах. Численными методами исследуется процесс направленного распространения тепла и горения в анизотропной среде. Показано, что на асимптотической стадии он описывается инвариантным (автомо-

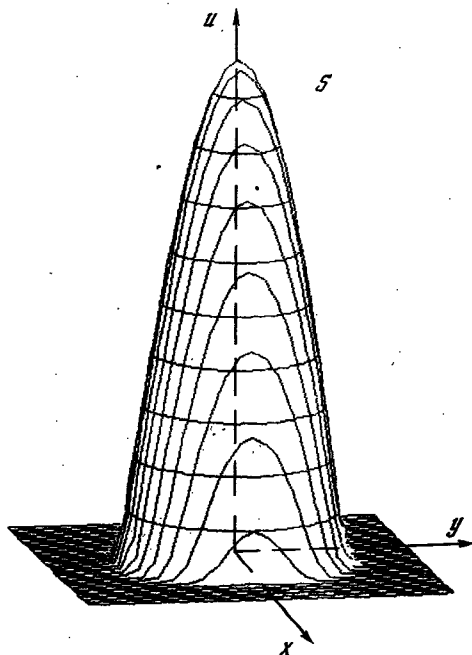


Рис. 1

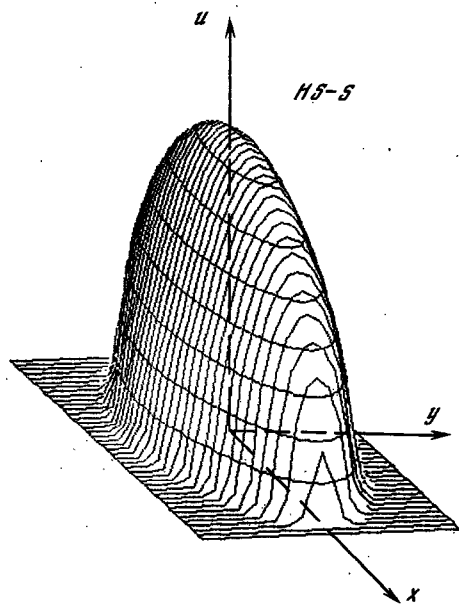


Рис. 2

дельным) решением, найденным ранее в [10]. Для изотропного случая указано инвариантное решение, которым могут описываться круговые и спиральные волны горения. При построении инвариантных решений используются групповые свойства уравнения теплопроводности, исследованные в [10].

1. Рассматривается уравнение

$$(3) \quad u_t = (u^{\sigma_1} u_x)_x + (u^{\sigma_2} u_y)_y + u^\beta, \quad \beta > 1, \quad \sigma_1 > \sigma_2 > 0,$$

описывающее распространение тепла в двумерной анизотропной среде. Численно исследуются автомодельные решения вида

$$(4) \quad u(t, x, y) = (t_0 - t)^{1/(1-\beta)} f(\xi, \eta),$$

где

$$\xi = x(t_0 - t)^{(\sigma_1 + 1 - \beta)/(2(\beta - 1))}, \quad \eta = y(t_0 - t)^{(\sigma_2 + 1 - \beta)/(2(\beta - 1))}$$

Уравнение для $f(\xi, \eta)$ получается подстановкой (4) в (3) и имеет вид

$$(5) \quad (f^{\sigma_1} f_\xi)_\xi + (f^{\sigma_2} f_\eta)_\eta + \frac{\sigma_1 - \beta + 1}{2(\beta - 1)} \xi f_\xi + \frac{\sigma_2 - \beta + 1}{2(\beta - 1)} \eta f_\eta + f^\beta - \frac{f}{\beta - 1} = 0.$$

Расчеты проводили для различных значений параметров $\beta, \sigma_1, \sigma_2$, соотношение между которыми, как видно из (4), существенно влияет на характер решения. В качестве начального условия выбрали кусочно-постоянную функцию

$$u_0(x, y) = \begin{cases} 1, & (x, y) \in \Omega, \\ 0, & (x, y) \notin \Omega, \end{cases}$$

где $\Omega = \{(x, y) \mid |x| \leq a, |y| \leq b, a > 0, b > 0\}$. Ниже приведены три типа решений,

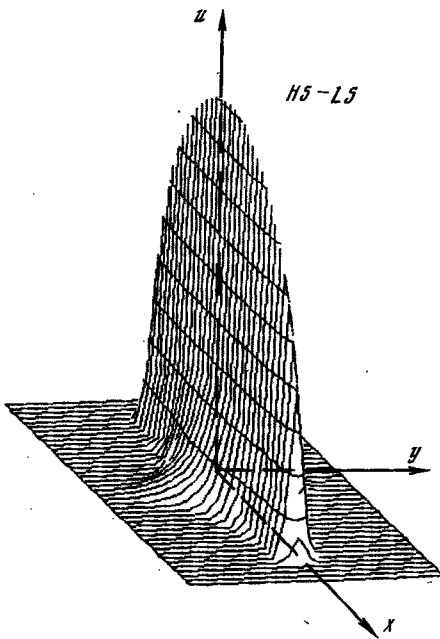


Рис. 3

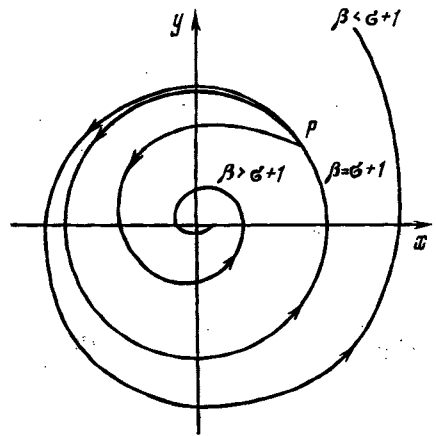


Рис. 4

которые по аналогии с одномерным случаем называются здесь S -, HS - S - и HS - LS -режимами.

1.1. S -режим. Этот режим соответствует изотропной среде с параметрами $\beta = \sigma_1 + 1 = \sigma_2 + 1$ и служил тестом для отладки методик расчета. Впервые S -режимы в двумерной постановке рассматривались в [5].

В расчетах взяты следующие значения параметров $\sigma_1 = \sigma_2 = 2, \beta = 3$. На рис. 1 приведено решение $u(t, x, y)$ на момент времени, близкий к моменту обострения. По любому направлению тепло распространяется лишь до некоторой глубины, после чего происходит остановка фронта распространения тепла и неограниченный рост температуры внутри области. Время обострения t_0 , полученное в расчетах, равно 2,70682.

1.2. HS - S -режим. Реализуется в случае $\sigma_2 + 1 = \beta < \sigma_1 + 1$. Расчеты проводили при следующих параметрах: $\sigma_1 = 3, \sigma_2 = 2, \beta = 3$. В этом случае в направлении x за конечное время происходит распространение тепла до бесконечности (HS -режим), а по оси y тепло не распространяется (S -режим). На рис. 2 представлено численное решение $u(t, x, y)$ на момент времени $t = 2,42365$. Время обострения, полученное в расчетах, равно 2,42389.

Заметим, что поскольку численное решение $u(t, x, y)$ стремится к автомодельному, то, производя "автомодельную обработку" решения, т.е. в данном случае полагая

$$f(\xi, \eta) = (t_0 - t)^{1/2} u(t, x, y), \quad \xi = x(t_0 - t)^{1/4}, \quad \eta = y,$$

получим при $t \rightarrow t_0$ решение $f(\xi, \eta)$ эллиптического уравнения (5).

1.3. HS - LS -режим. Имеет место при $\sigma_2 + 1 < \beta < \sigma_1 + 1$. Расчеты проводили для $\sigma_1 = 3, \sigma_2 = 1, \beta = 3$. В этом случае решение (4) описывает такое распространение тепла, при котором по направлению x тепловой фронт за конечное время t_0 достигает бесконечности (HS -режим), а в направлении y происходит сокращение эффективной

глубины прогрева (рис. 3). На финальной стадии решение представляет собой бесконечно прогретую линию, вне которой температура конечна. Время обострения, полученное в расчетах, равно 3,07660.

Производя авто модельную обработку решения

$$f(\xi, \eta) = (t_0 - t)^{1/2} u(t, x, y), \quad \xi = x(t_0 - t)^{1/4}, \quad \eta = y(t_0 - t)^{-1/4}$$

и устремляя t к t_0 , получим в пределе решение $f(\xi, \eta)$ эллиптического уравнения (5).

Заметим, что распространение тепла, подобное описанному выше, будет при любых σ_1, σ_2 и β таких, $\sigma_2 + 1 < \beta < \sigma_1 + 1$. При этом анизотропия $\sigma_2 < \sigma_1$ может быть сколь угодно мало выражена. Это приведет лишь к изменению скорости роста амплитуды и распространения фронта, качественные стороны процесса останутся те же.

Приведенные результаты позволяют судить о качественных особенностях авто модельных режимов распространения тепла и при других параметрах среды, в частности, в $LS-S$ -режиме, который поэтому здесь не рассмотрен. Заметим также, что рассматриваемые постановки задач легко могут быть перенесены и на трехмерную анизотропную среду.

Расчеты проводили по двум методикам с помощью пакетов прикладных программ [14, 15].

В заключение п. 1 отметим, что, с одной стороны, в нем проведено численное исследование эволюционной (структурной) устойчивости авто модельного решения (4) уравнения анизотропной нелинейной теплопроводности с источником (3). С другой стороны, указан способ построения численного решения $f(\xi, \eta)$ нелинейного эллиптического уравнения (5), которое в принципе нельзя получить путем прямого решения уравнения (5) методом установления, поскольку решение $f(\xi, \eta)$ в такой постановке неустойчиво [11, 12]. Графики решения $f(\xi, \eta)$ при различных параметрах см. в [13].

2. Рассматриваемые выше авто модельные решения (2) и (4) очевидным образом можно трактовать как решения, инвариантные относительно однопараметрической группы Ли растяжений [10]. Приведем пример инвариантного решения иного вида для изотропного случая. Рассмотрение удобно вести в цилиндрических координатах (r, φ, z) . Уравнение (1) тогда принимает вид

$$(6) \quad u_t = \frac{1}{\sigma + 1} \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u^{\sigma+1}}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u^{\sigma+1}}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u^{\sigma+1}}{\partial z^2} \right\} + u^\beta.$$

Нетрудно проверить, что это уравнение допускает однопараметрическую группу Ли преобразований с инфинитезимальным оператором

$$(1 - \beta)(t - t_0) \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\sigma + 1 - \beta}{2} \left(r \frac{\partial}{\partial r} + z \frac{\partial}{\partial z} \right) + u \frac{\partial}{\partial u} + (1 - \beta) C \frac{\partial}{\partial \varphi},$$

где C и t_0 — произвольные постоянные. В дальнейшем предполагается $t_0 > 0$. Соответствующее инвариантное решение имеет вид

$$(7) \quad u = (t_0 - t)^{1/(1-\beta)} f(R, \Phi, Z),$$

где $R = r(t_0 - t)^{(\beta - \sigma - 1)/(2(1 - \beta))}$, $\Phi = \varphi - C \ln(t_0 - t)$, $Z = z(t_0 - t)^{(\beta - \sigma - 1)/(2(1 - \beta))}$, а $f(R, \Phi, Z)$ — решение уравнения

$$(8) \quad \frac{1}{\sigma + 1} \left\{ \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(R \frac{\partial f^{\sigma+1}}{\partial R} \right) + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 f^{\sigma+1}}{\partial \Phi^2} + \frac{\partial^2 f^{\sigma+1}}{\partial Z^2} \right\} = \\ = \frac{\beta - \sigma - 1}{2} \left(R \frac{\partial f}{\partial R} + Z \frac{\partial f}{\partial Z} \right) - C \frac{\partial f}{\partial \Phi} + f - f^\beta.$$

Рассмотрим процесс горения среды, происходящий в соответствии с решением (7). Пусть в начальный момент времени распределение температуры было неоднородным. Тогда, как следует из (7), траекториями неоднородностей поля температуры (например, локальных максимумов) в пространстве (x, y, z) будут спирали, расположенные на поверхности конуса с вершиной в начале координат (сходящиеся или расходящиеся спиральные волны). При $\beta = \sigma + 1$ спирали вырождаются в окружности (круговые волны). Проекция этих траекторий на плоскость (x, y) представляют собой логарифмические спирали (при $\beta = \sigma + 1$ — окружности). На рис. 4 схематично показаны такие траектории, выходящие из некоторой точки P плоскости (x, y) , в зависимости от соотношения β и σ . Предполагается, что $\beta > 1$, $C < 0$. Стрелки указывают направление движения вдоль траектории. В случае $\beta > 1$ решение (7) описывает режим с обострением, причем в зависимости от соотношения между β и σ имеется аналогия с HS -, LS - и S -режимами (рис. 4). Отметим, что при $C = 0$ решение (7) принимает вид (2).

Авторы благодарны В.А. Галактионову и А.Б. Потапову за полезные обсуждения.

Институт прикладной математики
им. М.В. Келдыша
Академии наук СССР
Москва

Институт математики
Болгарской Академии наук
София

Поступило
19 I 1987

ЛИТЕРАТУРА

1. Самарский А.А., Змитренко Н.В. и др. — ДАН, 1976, т. 227, № 2, с. 321–324.
2. Курдюмов С.П. В кн.: Современные проблемы математической физики и вычислительной математики. М.: Наука, 1982, с. 217–243.
3. Еленин Г.Г., Курдюмов С.П., Самарский А.А. — ЖВМиМФ, 1983, т. 23, № 2, с. 380–390.
4. Галактионов В.А., Курдюмов С.П., Самарский А.А. — Дифференц. уравнения, 1984, т. 20, № 4, с. 614–632.
5. Плохотников К.Э. Тр. МФТИ. Аэрофиз. и прикл. матем., 1977, с. 204–208.
6. Курдюмов С.П., Малинецкий Г.Г. и др. — ДАН, 1980, т. 251, № 4, с. 836–839.
7. Курдюмов С.П., Куркина Е.С. и др. — ДАН, 1984, т. 274, № 5, с. 1071–1075.
8. Потапов А.Б. Препринт ИПМ АН СССР, 1986, № 8.
9. Баренблатт Г.И. Подобию, автомодельность, промежуточная асимптотика. Л.: Гидрометеиздат, 1982.
10. Дородницын В.А., Князева И.В., Свищевский С.Р. — Дифференц. уравнения, 1983, т. 19, № 7, с. 1215–1223.
11. Галактионов В.А., Курдюмов С.П., Самарский А.А. — Матем. сб., 1984, т. 124 (166), № 2(6), с. 163–188.
12. Галактионов В.А. — Дифференц. уравнения, 1985, т. 21, № 7, с. 1126–1134.
13. Бакирова М.И., Боршукова С.Н. и др. Препринт ИПМ АН СССР, 1985, № 182, 24 с.
14. Боршукова С.Н., Йотова А.И., Лазаров Р.Д. В сб.: Численные методы и пакеты программ для решения задач математической физики. Новосибирск, 1985, с. 31–41.
15. Горбунов-Посадов М.М., Картов В.Я. и др. В кн.: Пакеты прикладных программ: Вычислительный эксперимент. М.: Наука, 1983, с. 12–50.