Доклады Академии наук СССР
1988. Том 302, № 1

УДК 517.956 МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Член-корреспондент АН СССР Ф.В. БУНКИН, В.А. ГАЛАКТИОНОВ,
Н.А. КИРИЧЕНКО, член-корреспондент АН СССР С.П. КУРДЮМОВ,
академик А.А. САМАРСКИЙ

ЛОКАЛИЗАЦИЯ В ОДНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧЕ ЗАЖИГАНИЯ ИЗЛУЧЕНИЕМ

1. В данной работе изучаются свойства существенно нестационарного решения краевой задачи для уравнения теплопроводности с нелинейным граничным условием второго рода:

$$T_t = \Delta T \equiv \frac{1}{r}(rT_r)_r + T_{zz}, \quad t > 0, \quad x = (r, z) \in \Omega; \tag{1}$$

$$-T_z|_{\partial\Omega} = I(r) + T^\alpha, \quad t > 0; \quad I(r) = I_0 \exp(-r^2/r_0^2); \tag{2}$$

$$T(0, x) = 0, \quad x \in \Omega. \tag{3}$$

Здесь $\Omega = \{r \geqslant 0, z > 0\}$, $\partial\Omega = \{r \geqslant 0, z = 0\}$ – граница области Ω, постоянная $\alpha > 1$, а $I_0 > 0$ и $r_0 > 0$ – заданные параметры.

Краевая задача (1)–(3) представляет собой математическую модель (в обезразмеренных переменных) лазерного нагрева металлического образца, занимающего полупространство [1, 2]. Предполагается, что на поверхности образца протекает экзотермическая реакция, энерговыделение которой аппроксимируется степенной зависимостью $g(T) = T^\alpha$ (второе слагаемое в правой части (2)). Функция $I(r)$ описывает распределение интенсивности излучения по поверхности вещества; I_0; r_0 – соответственно амплитуда и полуширина профиля интенсивности.

В работах [1–4] изучалась нелинейная задача, в которой энерговыделение реакции задавалось в виде $g(T) = \exp(-1/T)$. Было установлено, что в зависимости от значений параметров I_0, r_0 возможны два типа эволюции температурного поля: либо стабилизация (решение соответствующей краевой задачи ограничено равномерно по времени и при $t \to +\infty$ выходит на устойчивое стационарное решение), либо воспламенение образца (фронт горения неограниченно распространяется по всей поверхности вещества).

Краевая задача (1)–(3) (со степенной нелинейностью) ранее изучалась в [4], где показано, в частности, что задача может не иметь глобального по времени решения. Например, при любом $\alpha \in (1, 2]$ решение существует в течение конечного времени и

$$\sup_{x \in \Omega} T(t, x) \equiv T(t, 0) \to +\infty \quad \text{при} \quad t \to t_0^- \tag{4}$$

($t = t_0 > 0$ – момент обострения неограниченного решения). При $\alpha \gg 2$ в зависимости от соотношения между параметрами пучка I_0, r_0 возможно появление глобального ограниченного решения.

Основной результат данной работы состоит в следующем: показано, что неограниченное в смысле (4) решение задачи (1)–(3) **локализовано** и развивается в LS-режиме (по терминологии [5, 6]), т.е. неограниченный рост при $t \to t_0^-$ решения может иметь место только на $\partial\Omega$, и $T(t, x)$ ограничено равномерно по $t \in (0, t_0)$ для любого $x \in \Omega$. Следует отметить, что эффект локализации является одним из интереснейших и универсальных свойств режимов с обострением и имеет ряд важных физических приложений (см., например, [5]). Исследование этого эффекта представляет собой сложную теоретическую проблему. Нам известно лишь два достаточно общих подхода к доказательству этого "сингулярного" свойства, развитых в самое последнее время: 1) "сравнение по пересечениям" с локализованными автомодельными решениями (квазилинейные уравнения вида $u_t = \nabla \cdot (u^\sigma \nabla u) + u^\beta$, $\sigma \geqslant 0$, $\beta > 1$; см. об этом в [6, гл. IV]); 2) метод [7] (полулинейные уравнения $u_t = \Delta u + q(u)$; обобщение на квазилинейные уравнения $u_t = \Delta\varphi(u) + q(u)$ дано в [8]). Ниже для доказательства локализации в задаче (1)–(3) используется подход, близкий по идее к [7], однако в силу иного характера нелинейности (содержащейся не в уравнении, а в краевом условии второго рода) техническая реализация здесь иная.

Т е о р е м а 1 (*о локализации*). *Пусть* $T(t, x)$ – *неограниченное решение задачи* (1)–(3) *в* $Q_0 = (0, t_0) \times \Omega$. *Тогда оно локализовано по* z *и справедлива следующая оценка предельного профиля температурного поля*:

$$T(t_0^-, x) \equiv \lim_{t \to t_0^-} T(t, x) \leqslant (\alpha - 1)^{-1/(\alpha-1)} z^{-1/(\alpha-1)} \ \text{в} \quad \Omega. \tag{5}$$

Прежде всего отметим, что локальное по t непрерывное ограниченное неотрицательное решение задачи существует, единственно и является классическим при $t > 0$ (например, в $Q_\tau = [\tau, t_0) \times \Omega$ для любого $\tau \in (0, t_0)$) [9, гл. VII; 10, гл. V]. Будем считать, что $T(t, x)$ определено в Q_0, является неограниченным и $T \in C^{1,3}(Q_0) \cap C(\bar{Q}_0)$, $\bar{Q}_0 = [0, t_0) \times \bar{\Omega}$, $\bar{\Omega} = \{r \geqslant 0, z \geqslant 0\}$ (указанная гладкость решения при $t = 0$ связана с отсутствием согласования краевого и начального условий на $\partial\Omega$).

Для д о к а з а т е л ь с т в а теоремы понадобятся следующие элементарные свойства $T(t, x)$.

Л е м м а 1 [3]. *Справедливы неравенства*

$$T_t \geqslant 0, \tag{6}$$

$$T_r \leqslant 0, \quad T_z \leqslant 0 \ \text{в} \ Q_0. \tag{7}$$

Неравенство (6) означает, что предел в (5), конечный или бесконечный, существует всюду в $\bar{\Omega}$.

Легко устанавливается справедливость следующего утверждения.

Л е м м а 2. *Для любого* $t \in (0, t_0)$

$$T(t, x) \to 0 \ \text{при} \ |x| = (r^2 + z^2)^{1/2} \to +\infty. \tag{8}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 1. Нетрудно проверить, что функция $w(t, x) \equiv T_z + T^\alpha$ является решением следующей задачи:

$$w_t = \Delta w - \alpha(\alpha - 1)T^{\alpha-2}|\nabla T|^2 \ \text{в} \ Q_\tau; \quad |\nabla T|^2 \equiv T_r^2 + T_z^2; \tag{9}$$

$$w|_{\partial\Omega} \equiv (T_z + T^\alpha)|_{\partial\Omega} = -I(r) \leqslant 0, \quad t \in [\tau, t_0). \tag{10}$$

Покажем, что всюду в Q_0 справедливо неравенство $w \leqslant 0$. Действительно, согласно (9) $w_t \leqslant \Delta w$ в Q_τ. Оценим w на параболической границе Q_τ. Во-первых, $w \leqslant 0$ на $\partial\Omega$ (см. (10)). Во-вторых, $w(\tau, x) \equiv (T_z + T^\alpha)(\tau, x) \leqslant T^\alpha(\tau, x) \leqslant M_\tau^\alpha$, где $M_\tau = \sup\limits_{x \in \Omega} T(\tau, x)$ (см. (7)). В-третьих, в силу (7), (8) для любого $t \in [\tau, t_0)$ $\overline{\lim\limits_{|x| \to \infty}} w(t, x) \leqslant 0$. Поэтому в соответствии с принципом максимума $w \leqslant M_\tau^\alpha$ всюду в Q_τ $\tau \in (0, t_0)$. Поскольку $M_\tau \to 0$ при $\tau \to 0$ в силу (3) и условия $T \in C(\bar{Q}_0)$, то $w \leqslant 0$ в Q_0.

Интегрируя последнее неравенство при фиксированных $t \in (0, t_0)$, $r \in$

$\in (0, +\infty)$ по интервалу (δ, z), после предельного перехода $\delta \to 0$ получаем $T(t, r, z) \leqslant [T^{1-\alpha}(t, r, 0) + (\alpha - 1)z]^{-1/(\alpha-1)}$. Отсюда прямо следует оценка (5).

2. Аналогичным способом нетрудно доказать локализацию неограниченного в Q_0 решения краевой задачи для уравнения (1) с условиями

(11) $\quad -T_z|_{\partial\Omega} = T^\alpha, \quad t > 0;$

(12) $\quad T(0, x) = T_0(x) > 0, \quad x \in \Omega.$

Такая постановка задачи отвечает ситуации, когда экзотермическая реакция инициируется не излучением, а за счет наличия нетривиального начального возмущения $T_0 \not\equiv 0$. На функцию T_0 накладываются следующие ограничения: $T_0(r, z)$ не возрастает по r, z; $T_0 \in C^2(\bar{\Omega})$; $T_0(x) \to 0$ при $|x| \to +\infty$. Тогда решение задачи $T(t, x)$ удовлетворяет (7) и (8). Мы будем для простоты считать, что $T \in C^{2,4}(Q_0) \cap C^{1,2}(\bar{Q}_0)$ (хотя это требование гладкости существенно завышено).

Теорема 2 (*о локализации*). *Пусть* $T(t, x)$ – *неограниченное решение задачи* (1), (11), (12) *в* $Q_0 = (0, t_0) \times \Omega$, *причем*

$$\lambda = \inf_{x \in \Omega} \{-(T_0(x))_z / T_0^\alpha(x)\} \in (0, 1].$$

Тогда решение локализовано и

(13) $$T(t_0^-, x) \equiv \varlimsup_{t \to t_0^-} T(t, x) \leqslant [\lambda(\alpha - 1)]^{-1/(\alpha-1)} z^{-1/(\alpha-1)} \text{ в } \Omega.$$

По доказательству эта теорема полностью аналогична предыдущей. Оценка (13) вытекает из того, что в сделанных предположениях $w \equiv T_z + \lambda T^\alpha \leqslant 0$ в Q_0.

Применительно к задаче (1), (11), (12) можно получить условие неограниченности решения и найти оценку сверху амплитуды решения при $t \to t_0^-$. Отметим, что оценки сверху играют важную роль в исследовании асимптотической пространственно-временной структуры решения вблизи $t = t_0$ (см. библиографию в [6, гл. IV]).

Теорема 3 (*оценка амплитуды сверху*). *Пусть*

(14) $$\mu = \inf_{x \in \Omega} \{\Delta T_0(x) / T_0^\alpha(x)\} \in (0, +\infty).$$

Тогда решение задачи (1), (11), (12) *является неограниченным в* Q_0, *где*

(15) $$t_0 \leqslant t_* = (\sup_{x \in \Omega} T_0(x))^{1-\alpha} / \mu(\alpha - 1),$$

и справедлива оценка амплитуды

(16) $$\sup_{x \in \Omega} T(t, x) \leqslant [\mu(\alpha - 1)]^{-1/(\alpha-1)} (t_0 - t)^{-1/(\alpha-1)} \text{ в } (0, t_0).$$

Доказательство. Воспользуемся методом [11] (см. также [6, гл. IV]); аналогичная техника применялась в [7]. Функция $w = T_t - \mu T^\alpha$, как легко проверить, удовлетворяет в Q_0 уравнению $w_t = \Delta w + \mu\alpha(\alpha - 1)T^{\alpha-2}|\nabla T|^2 \geqslant \Delta w$, краевому условию $w_z = -\alpha T^{\alpha-1} w$ на $\partial\Omega$ и начальному условию $w(0, x) = \Delta T_0 - \mu T_0^\alpha \geqslant 0$ в Ω в силу (14). Поскольку в сделанных предположениях $\varliminf_{|x| \to +\infty} w(t, x) \geqslant 0$ для всех $t \in [0, t_0)$, из принципа максимума [9, гл. II] заключаем, что $w \geqslant 0$ в Q_0, т.е.

(17) $\quad T_t - \mu T^\alpha \geqslant 0$ в Q_0.

Интегрируя (17) по (t, t_0) для любого фиксированного $x \in \Omega$, получаем $T^{1-\alpha}(t, x) \geqslant \mu(\alpha - 1)(t_0 - t) + T^{1-\alpha}(t_0^-, x)$ в Q_0 (здесь $T(t_0^-, x) = \lim_{t \to t_0^-} T(t, x)$;

этот предел существует в силу неравенства (6), которое, в свою очередь, следует из (14)). Отсюда $T^{1-\alpha}(t, x) \geqslant \mu(\alpha-1)(t_0 - t)$ в Q_0 (что при $t = 0$ дает (15)), и, следовательно, справедливо (16).

3. Покажем, что оценка предельного распределения (13) является в определенном смысле неулучшаемой.

Задача (1), (11), (12) при специальном выборе начальной функции $T_0 = T_0(z)$ допускает построение неограниченного автомодельного решения следующего вида:

(18) $T_A(t, z) = (t_0 - t)^{-1/2(\alpha-1)}\theta_A(\xi), \qquad \xi = z/(t_0 - t)^{1/2}$,

где функция $\theta_A(\xi) > 0$ при $\xi > 0$ удовлетворяет краевой задаче $\theta_A'' - \theta_A'\xi/2 - \theta_A/2(\alpha-1) = 0$ при $\xi > 0$, $-\theta_A'(0) = \theta_A^{\alpha}(0)$. Нетрудно найти асимптотику функции θ_A: $\theta_A(\xi) = C_0\xi^{-1/(\alpha-1)} + o(\xi^{-1/(\alpha-1)}), \xi \to +\infty$, где $C_0 = C_0(\alpha) > 0$. Поэтому, переходя в (18) к пределу при $t \to t_0^-$ и учитывая при этом, что $(T_A)_t > 0$ в Q_0 (это легко установить из уравнения для θ_A), получаем следующее выражение для предельного распределения автомодельного решения:

(19) $T_A(t, z) < T_A(t_0^-, z) \equiv C_0 z^{-1/(\alpha-1)}$ в Q_0.

По характеру зависимости от z оценки (13) и (19) совпадают и отличаются только величиной постоянных множителей.

Институт общей физики
Академии наук СССР
Институт прикладной математики
им. М.В. Келдыша
Академии наук СССР
Москва

Поступило
18 IV 1988

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бункин Ф.В., Кириченко Н.А., Лукьянчук Б.С.* – УФН, 1982, т. 138, вып. 1, с. 45–94. 2. *Бункин Ф.В., Кириченко Н.А., Лукьянчук Б.С.* – Квант. электрон., 1982, т. 9, № 10, с. 1959–1967. 3. *Бункин Ф.В., Галактионов В.А. и др.* – Дифференц. уравнения, 1985, т. 21, № 11, с. 1947–1958; № 12, с. 2097–2105. 4. *Бункин Ф.В., Галактионов В.А. и др.* – ЖВМиМФ, 1988, т. 28, № 4, с. 549–559. 5. *Курдюмов С.П.* Современные проблемы математической физики и вычислительной математики. М.: Наука, 1982, с. 1826–1841. 6. *Самарский А.А., Галактионов В.А., Курдюмов С.П., Михайлов А.П.* Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений. М.: Наука, 1987. 7. *Friedman A., McLeod B.* – Indiana Univ. Math. J., 1985, vol. 34, p. 425–447. 8. *Галактионов В.А., Посашков С.А.* – Дифференц. уравнения, 1987, т. 23, № 7, с. 1133–1143. 9. *Фридман А.* Уравнения с частными производными параболического типа. М.: Мир, 1968. 10. *Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967. 11. *Галактионов В.А.* – ДАН, 1980, т. 251, № 4, с. 832–835.