УДК 517.956

В.А. ГАЛАКТИОНОВ, член-корреспондент АН СССР С.П. КУРДЮМОВ, академик А.А. САМАРСКИЙ

О СТРУКТУРЕ ПРЕДЕЛЬНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ НЕОГРАНИЧЕННЫХ РЕШЕНИЙ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

В работе излагается один достаточно общий метод вывода асимптотических оценок снизу существенно нестационарных (неограниченных) решений нелинейных краевых задач для уравнений и систем параболического типа. По своему содержанию данный подход тесно связан с методом стационарных состояний (см. [1, 2], а также [3, гл. IV, VII]) и основан на использовании некоторых общих свойств однопараметрического семейства верхних стационарных состояний, отвечающего каждой конкретной задаче. Изложение ведется на примере трех нелинейных параболических задач, подробный анализ которых в принципе позволяет дать формулировку результата применения данного метода к определенным классам нелинейных эволюционных параболических уравнений общего вида. В дальнейшем мы не будем касаться некоторых хорошо известных и традиционных вопросов теории неограниченных решений нелинейных уравнений математической физики, в частности условий возникновения таких решений, существующих на ограниченном интервале изменения времени. Проблематика и приложения этой теории отражены в [3] и сборнике [4], где также приведен довольно полный список литературы.

1. Задача Коши для квазилинейного параболического уравнения. Пусть $u = u(t,x) \geqslant 0$ – решение уравнения

$$(1)\qquad u_t = \mathrm{A}(u) \equiv \nabla\cdot((1+|\nabla u|^{\sigma})\nabla u) + u^{\beta},\qquad t>0,\qquad x\in\mathbf{R}^N,$$

$\sigma>0$, $\beta>1$ – постоянные, $\nabla\equiv\operatorname{grad}_x$, с начальной функцией $u(0,x) = u_0(x) \geqslant 0$ в $\mathbf{R}^N$, $\sup u_0 < +\infty$, $u_0\in C(\mathbf{R}^N)$.

Уравнение (1) – одна из распространенных простейших моделей горения сплошной нелинейной среды. Поскольку (1) – равномерно параболичное уравнение, задача Коши имеет единственное неотрицательное локальное классическое решение [5, гл. V]. Мы будем считать выполненными следующие условия:

(A_1) $u(t,x)$ – неограниченное решение в $(0,T_0)\times\mathbf{R}^N$, $T_0\in R^1_+$ – время существования решения, т.е. u определено и равномерно ограничено в $Q_T = (0,T)\times\mathbf{R}^N$ для любого $T\in(0,T_0)$ и

$$(2)\qquad \overline{\lim_{t\to T_0^-}}\ \sup_{x\in\mathbf{R}^N} u(t,x) = +\infty.$$

(A_2) $x=0$ – "точка сингулярности" решения, т.е.

$$(3)\qquad \overline{\lim_{t\to T_0^-}}\ u(t,0) = +\infty.$$

Одна из главных проблем теории неограниченных решений состоит в исследовании пространственной структуры предельных распределений в $\mathbf{R}^N$:

$$(3')\qquad \underline{u}(T_0^-,x) = \underline{\lim_{t\to T_0^-}}\ u(t,x),\qquad \overline{u}(T_0^-,x) = \overline{\lim_{t\to T_0^-}}\ u(t,x).$$

В частности, принципиальным является вопрос об условиях локализации решения: область $\omega_L = \{x\in\mathbf{R}^N \mid \overline{u}(T_0^-,x) = +\infty\}$ ограничена. В том случае, когда $x=0$ – единственная точка сингулярности (LS-режим с обострением), возникает вопрос о поведении $\underline{u}(T_0^-, x)$ и $\overline{u}(T_0^-, x)$ вблизи $x = 0$. Ниже получена оценка $u(t, x)$ снизу вблизи $t = T_0, x = 0$.

Теорема 1. *Пусть выполняются условия* A_1, A_2 *и* $\beta > \sigma + 1$ *в* (1). *Тогда существует такое* $\epsilon_0 > 0$, *что для всех* $\epsilon \in (0, \epsilon_0]$ *найдется точка* $(t_0, x_0) \in (0, T_0) \times S_\epsilon, S_\epsilon = \{|x| = \epsilon\}$, *в которой*

$$(4)\qquad u(t_0, x_0) > L(x_0) \equiv A_0\,|x_0|^{-(\sigma+2)/(\beta-(\sigma+1))},$$

$$A_0 = [\beta - (\sigma+1)]\,[(\sigma+2)^{\sigma+1}\beta^{-\beta}N]^{1/(\beta-(\sigma+1))}.$$

Если $u(t,x)$ *не убывает по* t *в* $(0, T_0) \times \mathbf{R}^N$ (*см.* [3, *гл.* V]), *то* $\underline{u}(T_0^-, x_0) > L(x_0)$. *Если к тому же* $u_0 = u_0(|x|)$ *и, следовательно,* $u = u(t, |x|)$, *то неравенство* $\underline{u}(T_0^-, x) > L(x)$ *справедливо всюду в* $B_{\epsilon_0} \setminus \{0\}, B_{\epsilon_0} = \{|x| < \epsilon_0\}$.

Доказательство. Рассмотрим следующее однопараметрическое семейство верхних стационарных состояний $\{U_\lambda, \lambda > 0\}$:

$$(5)\qquad U_\lambda(x) = \lambda\,[1 - a_0^{(\sigma+2)/(\sigma+1)}\lambda^{(\beta-(\sigma+1))/(\sigma+1)}|x|^{(\sigma+2)/(\sigma+1)}]_+,$$

$$a_0 = \left(\frac{\sigma+1}{\sigma+2}\right)^{(\sigma+1)/(\sigma+2)} N^{-1/(\sigma+2)}.$$

Здесь $[z]_+ = \max\{0, z\}$. Без труда проверяется, что $A(U_\lambda) \leqslant 0$ всюду, где $U_\lambda > 0$, $x \neq 0$, т.е. U_λ – верхнее решение уравнения (1) в $\{x \in \mathbf{R}^N \mid U_\lambda(x) > 0\} \setminus \{0\}$. Тот факт, что при $x = 0$ функции U_λ не имеют C^2-гладкости, не является существенным для последующего сравнения $u(t,x)$ с U_λ. В дальнейших рассуждениях, так же как в [1, 3, 4, 6], принципиальное значение имеет структура огибающей к семейству (5):

$$(6)\qquad L(x) \equiv \sup_{\lambda>0} U_\lambda(x) = A_0\,|x|^{-(\sigma+2)/(\beta-(\sigma+1))} \text{ в } \mathbf{R}^N \setminus \{0\}.$$

Именно она, как следует из (4), дает оценку снизу. Также принципиальным является тот факт, что при $\beta > \sigma + 1$, $\lambda > 0$ множества $\partial G_\lambda \equiv \{x \in \mathbf{R}^N \mid U_\lambda(x) = L(x)\} = \{|x| = a_1 \cdot \lambda^{-[\beta-(\sigma+1)]/(\sigma+2)}\}$, $a_1 > 0$ – постоянная, плотно заполняют окрестность точки сингулярности $x = 0$, и области G_λ с границей ∂G_λ таковы, что $G_\lambda \to \{0\}$ при $\lambda \to +\infty$. Очевидно, что $L(x) > U_\lambda(x)$ в $G_\lambda \setminus \{0\}$.

Выберем $\epsilon_0 > 0$ из условия $L(x) \geqslant \sup u_0$ на S_{ϵ_0}, фиксируем произвольное $\epsilon \in (0, \epsilon_0]$ и определим $\lambda > 0$ так, чтобы $G_\lambda = B_\epsilon$ (это всегда можно сделать). Сопоставим теперь $u(t,x)$ и $U_\lambda(x)$ в $(0, T_0) \times B_\epsilon$. В силу выбора $\epsilon \in (0, \epsilon_0]$ $u_0 \leqslant U_\lambda$ в $\overline{B}_\epsilon$, и поэтому, как следует из условия A_2, существует точка $(t_0, x_0) \in (0, T_0) \times S_\epsilon$ такая, что

$$(7)\qquad u(t_0, x_0) > U_\lambda(x_0) = L(x_0).$$

В противном случае, если $u \leqslant U_\lambda$ на параболической границе области $(0, T_0) \times B_\epsilon$, то из обычной теоремы сравнения [7, с. 72] получаем, что $u \leqslant U_\lambda$ в $(0, T_0) \times B_\epsilon$, что противоречит (3). Из (6), (7) следует (4). По поводу доказательства двух других утверждений теоремы см. [3, гл. IV].

Замечание. В случае $1 < \beta < \sigma + 1$ тот же анализ семейства (6) приводит к выводу об отсутствии локализации в задаче Коши [8]. Для вывода оценки $\overline{u}(T_0^-, x)$ сверху при $\beta > \sigma + 1$, которая устанавливает локализацию решения, на наш взгляд, может быть применима техника, развитая в [9, 6] для уравнений другого класса.

2. З а д а ч а д л я у р а в н е н и я т е п л о п р о в о д н о с т и с н е л и н е й н ы м к р а е в ы м у с л о в и е м. Краевая задача

(8) $u_t = \Delta u \equiv \frac{1}{r}(ru_r)_r + u_{zz}, \quad t > 0, \quad x = (r, z) \in \Omega = \{r \geqslant 0, z > 0\};$

(9) $-u_z|_{\partial\Omega} = I_* \exp(-r^2/r_*^2) + u^\alpha, \quad t > 0; \ \partial\Omega = \{r \geqslant 0, \quad z = 0\},$

$u(0, x) = 0$ в Ω,

$I_* > 0, r_* > 0, \alpha > 1$ – постоянные, является модельной задачей лазерной термохимии [10, 11]. В [11] указаны условия, при которых $u(t, x) \geqslant 0$ – неограниченное решение в $(0, T_0) \times \Omega$, причем $x = 0$ – заведомо точка сингулярности и $u_t \geqslant 0$ в $(0, T_0) \times \times \bar{\Omega}$ (см. также [12]). Поэтому здесь можно сразу сформулировать основной результат.

Т е о р е м а 2. *Пусть $u(t, x)$ – неограниченное решение задачи* (8), (9) *в* $(0, T_0) \times \Omega$. *Существует такое $\epsilon_0 > 0$, что для любых $\epsilon \in (0, \epsilon_0]$ найдется точка $x_0 = (r_0, z_0) \in \partial D_\epsilon = \{r^2 + z = \epsilon\} \cap \bar{\Omega}$, что*

(10) $u(T_0^-, x_0) \equiv \lim_{t \to T_0^-} u(t, x_0) > L(x_0) =$

$= (\alpha - 1)\alpha^{-\alpha/(\alpha-1)}(r_0^2 + z_0)^{-1/(\alpha-1)} - I_*(r_0^2 + z_0).$

Д о к а з а т е л ь с т в о проводится тем же способом с использованием следующего семейства гладких верхних стационарных состояний:

$$U_\lambda(x) = \lambda\left[1 - \left(\frac{I_* + \lambda^\alpha}{\lambda}\right)(r^2 + z)\right]_+, \quad x \in \bar{\Omega}; \quad \lambda > 0$$

(нетрудно проверить, что $\Delta U_\lambda \leqslant 0$ всюду, где $U_\lambda > 0$, и $-(U_\lambda)_z \geqslant I_* + U_\lambda^\alpha$ на $\partial\Omega \cap \cap \{U_\lambda > 0\}$). Огибающая

$$L(x) \equiv \sup_{\lambda > 0} U_\lambda(x) < +\infty, \quad x \neq 0$$

определена в некоторой окрестности $x = 0$, причем здесь $\{x \in \Omega | \ U_\lambda(x) = L(x)\} = = \{r^2 + z = \alpha^{-1}\lambda^{1-\alpha}\} \cap \Omega$ и $U_\lambda(x) < L(x)$ в $G_\lambda \setminus \{0\}$, $G_\lambda = \{r^2 + z < \alpha^{-1}\lambda^{1-\alpha}\} \cap \Omega$. Для доказательства теоремы при фиксированном достаточно малом $\epsilon > 0$ проводится сравнение $u(t, x)$ и $U_\lambda(x)$ в $(0, T_0) \times G_\lambda$, где величина λ определяется из соотношения $\epsilon = \alpha^{-1}\lambda^{1-\alpha}$.

З а м е ч а н и е. При $r_0 = 0$ оценка (10) имеет вид

$u(T_0^-, x) > (\alpha - 1)\alpha^{-\alpha/(\alpha-1)} z_0^{-1/(\alpha-1)} - I_* z_0$

и является оптимальной по характеру зависимости от z при $z \to 0$, что показывает сравнение с неограниченным автомодельным решением задачи (8), (9) $u_A = = u_A(t, z) \equiv (T_0 - t)^{-1/2(\alpha-1)}\theta_A(z/(T_0 - t)^{1/2})$, которое выписывается в явном виде.

2р

$L(0)$

$+1/(2(\alpha-1))$

3. С и с т е м а к в а з и л и н е й н ы х у р а в н е н и й. Ниже рассматривается задача Коши для параболической системы

(11) $u_t = \mathbf{B}(u, v) \equiv \nabla \cdot ((1 + u)\nabla u) + v^q;$

(12) $v_t = \mathbf{C}(u, v) \equiv \nabla \cdot ((1 + |\nabla v|)\nabla v) + u^p, \quad t > 0, \quad x \in \mathbf{R}^N,$

$p \geqslant 1$, $q \geqslant 1$ постоянные, $pq > 1$ (необходимое условие возникновения неограниченных решений, см. об этом в [3, гл. VII]); с начальными функциями $u = u_0(x) \geqslant 0$,

$v = v_0(x) \geqslant 0$ в $\mathbf{R}^N$ при $t = 0$; $\sup(u_0 + v_0) < +\infty$; $u_0, v_0 \in C(\mathbf{R}^N)$. Систему (11), (12) можно рассматривать как модель горения нелинейной диссипативной двухкомпонентной среды. Задача Коши для равномерно параболичных уравнений имеет единственное локальное классическое решение $u \geqslant 0$, $v \geqslant 0$ [5, гл. VII]. Будем считать выполненным следующие условия:

(H$_1$) $\{u, v\}$ – неограниченное решение в $(0, T_0) \times R^N$:

$$\overline{\lim_{t \to T_0^-}} \sup_{x \in \mathbf{R}^N} [u(t,x) + u(t,x)] = +\infty.$$

(H$_2$) $x = 0$ – точка сингулярности: $\overline{\lim\limits_{t \to T_0^-}} [u(t,0) + v(t,0)] = +\infty$.

Т е о р е м а 3. *Пусть выполняются условия* H$_1$, H$_2$ *и* $pq > 4$ *в* (11), (12). *Тогда существует такое* $\epsilon_0 > 0$, *что для всех* $\epsilon \in (0, \epsilon_0]$ *найдется точка* $(t_0, x_0) \in (0, T_0) \times S_\epsilon$, *в которой выполняется хотя бы одно из двух неравенств:*

$$(13) \quad u(t_0, x_0) > L_1(x_0) \equiv \frac{3^{1/2}}{2} (2a_0 |x_0|)^{-(3q+4)/(pq-4)},$$

$$(14) \quad v(t_0, x_0) > L_2(x_0) \equiv (1 - 2^{-3/2}) b_0 (2a_0 |x_0|)^{-2(p+3)/(q-4)},$$

где $a_0 = [(2/3)^{2q} N^{-(q+2)}]^{1/(3q+4)}$, $b_0 = [(2/3)^4 N]^{1/(3q+4)}$.

Если $u(t,x)$, $v(t,x)$ *не убывают по* t *в* $(0, T_0) \times R^N$, *то либо* $\underline{u}(T_0^-, x_0) > L_1(x_0)$, *либо* $\underline{v}(T_0^-, x_0) > L_2(x_0)$ (*предельные распределения* $\underline{u}$, $\underline{v}$ *определяются в соответствии с* (3')). *Если к тому же* $u = u(t, |x|)$ *и* $v = v(t, |x|)$, *то для любого* $x \in B_{\epsilon_0} \setminus \{0\}$ *либо* $\underline{u}(T_0^-, x) > L_1(x)$, *либо* $\underline{v}(T_0^-, x) > L_2(x)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Здесь используется следующее семейство верхних стационарных состояний $\{U_\lambda, V_\lambda, \lambda > 0\}$:

$$(15) \quad U_\lambda(x) = \lambda[1 - (a_0 \lambda^m |x|)^2]_+^{1/2},$$

$$V_\lambda(x) = b_0 \lambda^{2(p+3)/(3q+4)} [1 - (a_0 \lambda^m |x|)^{3/2}]_+,$$

где $m = (pq - 4)/(3q + 4) > 0$. При $pq > 4$ функции (15) строго положительны в $\{|x| < r_\lambda\}$, $r_\lambda = a_0^{-1} \lambda^{-m} \to 0$ при $\lambda \to +\infty$. Величина $\epsilon_0 > 0$ выбирается из условий $L_1 \geqslant \sup u_0$, $L_2 \geqslant \sup v_0$ на S_{ϵ_0}. Тогда если $\epsilon \in (0, \epsilon_0]$, то $u_0 \leqslant U_\lambda$, $v_0 \leqslant V_\lambda$ в $\bar{B}_\epsilon$, где $\lambda > 0$ таково, что $\epsilon = r_\lambda/2$. Поэтому так же, как при доказательстве теоремы 1, получаем, что хотя бы одно из неравенств $u \leqslant U_\lambda$, $v \leqslant V_\lambda$ должно нарушиться на $(0, T_0) \times S_\epsilon$, иначе это приводит к противоречию с условием H$_2$. Поскольку $U_\lambda = L_1$, $V_\lambda = L_2$ на S_ϵ и $|x_0| = \epsilon$, отсюда получаем (13) или (14). Монотонность решения по t и его симметричность относительно $x = 0$ учитываются так же, как, например, в [3, гл. IV].

З а м е ч а н и е. Как следует из (15), $m < 0$ при $pq < 4$ и неограниченное решение задачи Коши не является локализованным, см. об этом в [3, гл. VII]. Вопрос о доказательстве локализации при $pq > 4$ остается открытым. Результаты работы [13], единственного пока исследования в этом направлении, дают необходимую оценку решения сверху для системы "одинаковых" полулинейных уравнений.

Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша
Академии наук СССР
Москва

Поступило
22 III 1988

ЛИТЕРАТУРА

1. *Галактионов В.А.* – ДАН, 1982, т. 264, № 5, с. 1035–1040. 2. *Галактионов В.А., Курдюмов С.П., Самарский А.А.* – ДАН, 1984, т. 278, № 6, с. 1296–1300. 3. *Самарский А.А., Галактионов В.А., Курдюмов С.П., Михайлов А.П.* Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений. М.: Наука, 1987. 477 с. 4. Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Новейшие достижения. М.: ВИНИТИ, 1986, т. 28. 314 с. 5. *Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967. 736 с. 6. *Галактионов В.А., Посашков С.А.* – Дифференц. уравнения, 1987, т. 23, № 7, с. 1133–1143. 7. *Фридман А.* Уравнения с частными производными параболического типа. М.: Наука, 1968. 427 с. 8. *Галактионов В.А.* – ЖВМиМФ, 1983, т. 23, № 6, с. 1341–1354. 9. *Friedman A., McLeod B.* – Indiana Univ. Math. J., 1985, vol. 34, p. 425–447. 10. *Бункин Ф.В., Кириченко Н.А., Лукьянчук Б.С.* – УФН, 1982, т. 138, вып. 1, с. 45–94. 11. *Бункин Ф.В., Галактионов В.А. и др.* – ЖВМиМФ, 1988, т. 28, № 3. 12. *Бункин Ф.В., Галактионов В.А. и др.* – Дифференц.уравнения, 1985, т. 21, № 11, с. 1947–1958; № 12, с. 2097–2105. 13. *Friedman A., Giga Y.* – J. Faculty Sci. Univ. Tokyo. Sect. IA, 1987, vol. 34, p. 65–79.

УДК 517.933 МАТЕМАТИКА

В.В. КОЗЛОВ

О ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ ИНТЕГРАЛАХ СИСТЕМЫ ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ ЧАСТИЦ

(Представлено академиком С.П. Новиковым 22 I 1987)

1. Динамика взаимодействия трех одинаковых частиц на прямой описывается гамильтоновой системой с функцией Гамильтона

$$H = \frac{1}{2}\left(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2\right) + f(q_1 - q_2) + f(q_2 - q_3) + f(q_3 - q_1). \tag{1}$$

Функция f – потенциал взаимодействия – предполагается четной. Кроме полной энергии H, сохраняется еще суммарный импульс $P = p_1 + p_2 + p_3$. Таким образом, задача о полной интегрируемости системы с гамильтонианом (1) сводится к вопросу о существовании дополнительного интеграла, коммутирующего с функцией P. Мозер и Калоджеро показали, что такой интеграл существует, если потенциал f является $\wp$-функцией Вейерштрасса (либо ее вырожденными случаями x^{-2}, $\sin^{-2}x$, $\operatorname{sh}^{-2}x$) [1, 2]. Более того, дополнительный интеграл можно указать в виде полинома третьей степени по импульсам с однозначными коэффициентами, инвариантного относительно перестановок пар канонических переменных p_s, q_s. В работе [3] доказано, что такой полиномиальный интеграл существует лишь для потенциалов Мозера–Калоджеро.

Мы будем рассматривать потенциалы, которые являются аналитическими периодическими функциями с периодом 2π. Примером может служить система трех точек на окружности, соединенных упругими пружинами. Основной результат заметки составляет

Теорема 1. *Если $f \neq \mathrm{const}$, то уравнения Гамильтона с гамильтонианом* (1) *не имеют интеграла в виде полинома по импульсам с однозначными и аналитическими на трехмерном торе $\mathbf{T}^3 = \{q_1, q_2, q_3, \bmod 2\pi\}$ коэффициентами, который был бы независим от функций H и P.*