

Н.А. ДАРЬИН, В.И. МАЖУКИН, академик А.А. САМАРСКИЙ

**КОНЕЧНО-РАЗНОСТНЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ОДНОМЕРНЫХ УРАВНЕНИЙ
ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ НА АДАПТИВНЫХ СЕТКАХ**

1°. Разработка методов построения адаптивных сеток в настоящее время находится в стадии интенсивного развития. Ключевой проблемой всех методов построения адаптивных сеток является выбор характеристики численного решения, используемой в качестве параметра, управляющего перемещением узлов сетки. Точность расчетов зависит также от того, как взаимосвязаны разностная схема и способ построения расчетной сетки. С учетом этих требований различными авторами предложен ряд эмпирических подходов к построению расчетных сеток с управляемым распределением узлов (см. обзор [1]).

К недостаткам указанных подходов следует отнести то, что процессы определения решения и движения узлов в них как бы разделены и реализуются автономно. Как нам представляется, именно в силу этого при решении задач нередко возникают осцилляции сетки либо связанные колебания решения и сетки, неоднократно отмечавшиеся в различных работах.

В настоящей работе предлагается метод решения нестационарных одномерных задач газовой динамики на адаптивной сетке, динамически связанной с решением. Излагаемый подход представляет собой распространение на газодинамические задачи метода решения краевых нестационарных задач [2] и задач типа Стефана [3] на адаптивных сетках.

2°. Нахождение численного решения уравнений газовой динамики с помощью разностного метода, использующего адаптивные сетки, динамически связанные с решением, будем рассматривать как следствие конечно-разностной аппроксимации системы уравнений газовой динамики, записанной в произвольной системе координат q, t , причем закон преобразования пространственных координат

$$(1) \quad x = f(q, t)$$

должен определяться самим решением.

Система нестационарных уравнений газовой динамики в одномерном приближении в эйлеровых переменных имеет вид

$$(2) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} = -\rho \frac{\partial u}{\partial x},$$

$$(3) \quad \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x},$$

$$(4) \quad \frac{\partial}{\partial t} \left(\epsilon + \frac{u^2}{2} \right) + u \frac{\partial}{\partial x} \left(\epsilon + \frac{u^2}{2} \right) = -\frac{\partial}{\partial x} (pu).$$

В переменных q, t система уравнений (2)–(4) запишется в виде

$$(5) \quad \frac{\partial \psi}{\partial t} = - \frac{\partial Q}{\partial q},$$

$$(6) \quad \frac{\partial}{\partial t} (\psi u) = - \frac{\partial p}{\partial q} - \frac{\partial}{\partial q} (Qu),$$

$$(7) \quad \frac{\partial}{\partial t} \left[\psi \left(\epsilon + \frac{u^2}{2} \right) \right] = - \frac{\partial}{\partial q} (pu) - \frac{\partial}{\partial q} \left[Q \left(\epsilon + \frac{u^2}{2} \right) \right].$$

Здесь использованы обозначения

$$(8) \quad \psi = \rho \frac{\partial f}{\partial q},$$

$$(9) \quad Q = \left(u - \frac{\partial f}{\partial t} \right) \rho.$$

Конкретный вид функций ψ и Q определяется выбранным законом преобразования координат, т.е. видом функции $f(q, t)$. Отметим, что в лагранжевом [4], квазилагранжевом [5] и смешанном эйлерово-лагранжевом подходах [6] функция $f(q, t)$ в (1) считается известной. Для построения адаптивной сетки, динамически связанной с решением, необходимо формулу (9) рассматривать как дифференциальное уравнение для нахождения функции $f(q, t)$:

$$(10) \quad \frac{\partial f}{\partial t} = u - \frac{Q}{\rho}.$$

С использованием (8) это уравнение можно записать в виде

$$(11) \quad \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\psi}{\rho} \right) = \frac{\partial u}{\partial q} - \frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{Q}{\rho} \right).$$

По известным значениям $\psi(q, t)$ и $\rho(q, t)$ значения эйлеровой координаты $x(q, t)$ определяются из уравнения (см. (8))

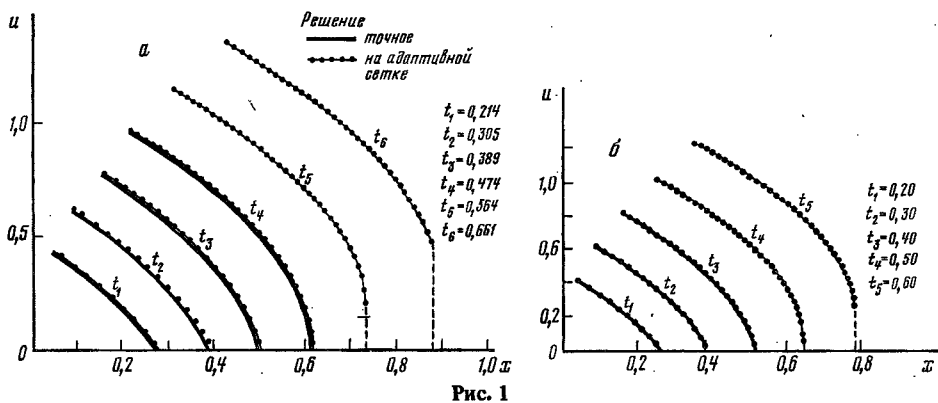
$$(12) \quad \frac{\partial x}{\partial q} = \frac{\psi}{\rho}.$$

Итак, система уравнений газовой динамики в произвольной системе координат записывается в виде системы уравнений (5)–(7), (11), (12). Для полного определения этой системы необходимо задать функцию Q . Например, близкое к равномерному по массовой лагранжевой переменной распределение узлов достигается при помощи задания функции Q в виде

$$(13) \quad Q = -D \frac{\partial \psi}{\partial q},$$

где D – коэффициент, величина которого определяет скорость перестройки сетки в численных расчетах. Некоторые способы задания функции Q в задачах газовой динамики рассмотрены ниже на примере решения ряда конкретных задач.

3°. Рассмотрим задачу о зарождении и распространении ударной волны на примере движения ускоряющегося поршня. В момент времени $t = 0$ поршень занимает



положение $x = 0$, а затем вдвигается в трубу, заполненную покоящимся политропным газом, по закону $x = at^2$.

Известно, что определить момент образования ударной волны из численных расчетов на фиксированной сетке в лагранжевых массовых переменных ($Q \equiv 0$) практически невозможно. Решения, полученные по схеме первого порядка, не передают крутых фронтов из-за большой аппроксимационной вязкости схемы. Схема со вторым порядком дает колебания в области больших градиентов.

Нами в данной задаче функция Q выбиралась в виде $Q = -\rho u_c$, где u_c — адiabатическая скорость звука. Легко видеть, что тогда каждый узел сетки будет двигаться вдоль C_+ -характеристики, а положение и момент образования разрыва будет определяться обращением в нуль величины ψ в соответствующей ячейке. Численные результаты, подтверждающие высказанные предположения, представлены на рис. 1. Расчеты по схеме первого порядка и схемам второго порядка показали, что в обоих случаях практически исчезают эффекты размазывания и осцилляции.

На границах $q = q_0$ и $q = q_R$ расчетной области должны выполняться граничные условия $Q(q_0, t) = Q(q_R, t) = 0$. Поэтому при выборе перетока массы в виде $Q = -\rho u_c$ крайняя левая ячейка будет неограниченно расти, а крайняя правая за конечное время схлопнется в точку. Для предотвращения указанных явлений в численном алгоритме был предусмотрен механизм генерации новых ячеек вблизи поршня и уничтожения мелких ячеек на правом конце области.

После того как сильный разрыв сформировался, возникает вопрос о способе расчета распространения нестационарной волны. С достаточной степенью точности пространственно-временной профиль разрыва можно передать, концентрируя в этой области большое число узлов. Более перспективным представляется другой путь, когда особенность решения выделяется в явном виде по типу решения задачи Стефана [3], в которой разрыв помещается в узел сетки. На разрыве выписываются граничные условия в виде законов сохранения, один из которых позволяет установить поток массы через разрыв. После образования ударной волны, положению фронта которой соответствует фиксированный узел расчетной сетки, справа и слева от него происходило уничтожение ячеек по методике, описанной выше. Максимальное отличие численных решений от точных не превышало 1–2%. Общее число узлов в адаптивных сетках, использовавшихся в расчетах, не превышало 40, что в 1,5–2 раза меньше, чем требуется для расчетов с той же точностью на фиксированных сетках.

4°. Дополнительное экспериментальное исследование точности численных решений, получаемых на сетках, построенных с помощью механизмов генерации и адаптации узлов, было проведено на примере двух задач, имеющих автомодельное решение.

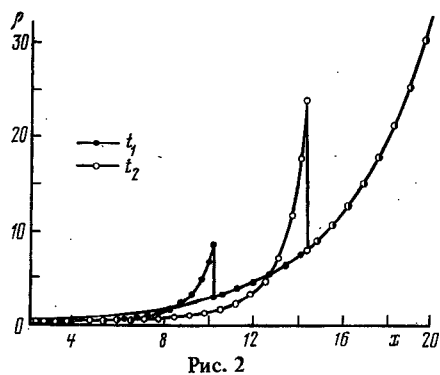


Рис. 2

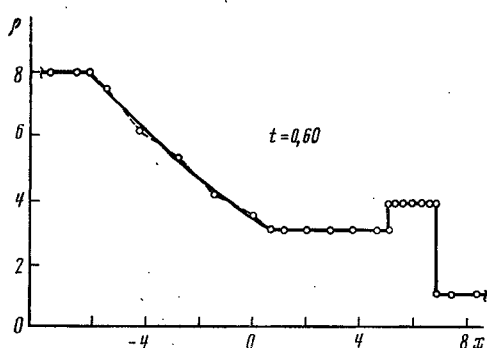


Рис. 3

Задача о распространении ударной волны по фону с экспоненциально возрастающей плотностью имеет точное решение, описанное, например, в [7]. На рис. 2 представлены результаты расчетов по указанной выше методике с рождением и уничтожением ячеек как вблизи границ области, так и в окрестности фронта ударной волны. Здесь исследовался вопрос о точности на минимальной по числу узлов допустимой сетке. Сплошными линиями показано точное решение. В начальный момент сетка состояла из 31 узла, причем в области, охваченной движением, — 11 узлов. Ошибка в определении плотности не превышала 6%.

Задача о распаде сильного разрыва широко использовалась различными авторами для анализа качества разностных схем [7, 8]. Область определения решения разбивается на 5 подобластей. В численных расчетах в каждой подобласти выбиралось по 5 ячеек. В областях кусочно-постоянных решений функция Q выбиралась в виде (13). На рис. 3 представлены профили плотности на момент времени $t = 0,60$. Максимальная погрешность наблюдалась в области волны разрежения и составила 0,5%.

В заключение отметим, что предложенный конечно-разностный метод экономичен, снижает требования к качеству разностных схем, позволяет получать решения с высокой точностью при наличии фронтов сильных, слабых и контактных разрывов.

Институт прикладной математики
им. М.В. Келдыша
Академии наук СССР, Москва

Поступило
17 IV 1987

ЛИТЕРАТУРА

1. Thompson J.F. — AIAA J., 1984, vol. 22, № 11, p. 1505–1523.
2. Дарьин Н.А., Мажукин В.И. Препр. ИПМ им. М.В. Келдыша АН СССР, 1987, № 33. 26 с.
3. Дарьин Н.А., Мажукин В.И. Препр. ИПМ им. М.В. Келдыша АН СССР, 1987, № 51. 17 с.
4. Самарский А.А., Попов Ю.П. Разностные методы решения задач газовой динамики. М.: Наука, 1980.
5. Повещенко Ю.А., Попов Ю.П. — ЖВМиМФ, 1978, т. 18, № 4, с. 1048–1056.
6. Головизнин В.М., Самарский А.А., Фаворский А.П. — ЖВМиМФ, 1981, т. 21, № 2, с. 409–422.
7. Головизнин В.М., Рязанов М.А., Самарский А.А. и др. В кн.: Вычислительные методы в математической физике. М.: Изд-во МГУ, 1986, с. 5–41.
8. Boris J.P., Book D.L., Hain K. — J. Comp. Phys., 1975, vol. 18, p. 248–283.
9. Жмакин А.И., Фурсенко А.А. — ЖВМиМФ, 1980, т. 20, № 4, с. 1021–1031.