



Ордена Ленина  
 ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ  
 имени М.В. Келдыша  
 Академии наук СССР

ПРЕПР.  
 0-11

В.В. Беликов, В.М. Головинин, М.Ф. Каневский,  
 А.А. Самарский, С.Ю. Чернов

О РАСЧЁТАХ ОДНОМЕРНЫХ  
 СВЕТОДЕТОНАЦИОННЫХ ВОЛН НА  
 АДАПТИРУЮЩИХСЯ СЕТКАХ

КОНТРОЛЬНЫЙ ЭКЗЕМПЛАР

Препринт № 139 за 1988г.

Москва

УДК: 517;949:536.12

### АННОТАЦИЯ.

Предложена разностная схема уравнений газовой динамики в смешанных эйлерово-лагранжевых переменных, обладающая свойством транспортности при скоростях движения узлов сетки, превышающих локальную скорость среды.

Для построения подвижных адаптирующихся сеток использовался простой и эффективный алгоритм, позволяющий сгущать узлы в области больших градиентов какой-либо из рассчитываемых функции и контролировать экстремальные размеры ячеек.

На примере практической задачи о распространении СДВ, продемонстрированы возможности и показаны преимущества использования подвижных адаптирующихся сеток.

## ВВЕДЕНИЕ.

Принцип полной консервативности [1] нашел широкое применение в построении эффективных разностных схем газовой динамики в лагранжевых переменных. Результаты многих практических расчетов подтвердили эффективность таких схем.

Для случая эйлеровых переменных одномерные явные трехслойные полностью консервативные разностные схемы (ПКРС) газовой динамики были впервые построены в [2], неявные двухслойные ПКРС предложены в работе [3].

Более общий и гибкий метод, основанный на так называемой "каскадной" форме аппроксимации временных и конвективных производных, предложен в работе [4].

Практика расчетов показала, что как эйлеровы, так и лагранжевы методики обладают определенными недостатками, избавиться, или хотя бы частично компенсировать которые позволяет использование смешанных эйлерово- лагранжевых (СЭЛ) переменных, т.е. подвижных сеток, отличных от лагранжевых.

Явная, частично трехслойная, полностью консервативная разностная схема (ПКРС) газовой динамики в смешанных эйлерово- лагранжевых (СЭЛ) переменных, обобщающая на случай подвижных сеток аппроксимации конвективных потоков из [4], построена в работе [5].

Предложенная схема хорошо зарекомендовала себя при расчетах различных ГД задач: на неподвижной эйлеровой сетке, при лагранжевом и некоторых промежуточных движениях сетки. Однако при расширении класса задач стали проявляться и некоторые ее недостатки. В частности, при движении узлов сетки со скоростями, превышающими скорость среды (а такие движения являются типичными при использовании адаптирующихся сеток), при расчете ударных волн происходит нефизическое проникновение возмущений в область фона. Такие эффекты являются нежелательными в расчетах, где вместе с движением среды исследуются другие эффекты с сильной зависимостью от плотности или температуры.

В настоящей работе предложена модификация схемы [5], устраняющая такого рода недостатки и приведено описание

расчетов одномерных задач о распространении светодетонационных волн, выполненных по модифицированной схеме с использованием подвижных, адаптирующихся сеток.

Предложенный в работе алгоритм построения адаптирующихся сеток позволяет сгущать узлы равносторонней сетки в области больших градиентов какой-либо из рассчитываемых функций и контролировать экстремальные размеры ячеек.

## I. РАЗНОСТНАЯ СХЕМА УРАВНЕНИЙ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ ДЛЯ РАСЧЕТА НА ПОДВИЖНЫХ АДАПТИРУЮЩИХСЯ СЕТКАХ.

I. Одномерную систему уравнений газовой динамики (ГД) в смешанных эйлерово-лагранжевых (СЭЛ) переменных можно записать в виде:

$$\frac{\mathcal{D}\rho}{\mathcal{D}t} \Delta + \frac{\partial}{\partial \alpha} (x^{i-1} \rho W) = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\mathcal{D}\rho \Delta u}{\mathcal{D}t} + \frac{\partial}{\partial \alpha} (x^{i-1} \rho u W) = -x^{i-1} \frac{\partial \mathcal{P}^*}{\partial \alpha} \quad (2)$$

$$\frac{\mathcal{D}\rho \Delta \varepsilon}{\mathcal{D}t} + \frac{\partial}{\partial \alpha} (x^{i-1} \rho \varepsilon W) = -\mathcal{P}^* \frac{\partial (x^{i-1} u)}{\partial \alpha} + \Delta Q_{\text{вс}} \quad (3)$$

$$\mathcal{P}^* = \mathcal{P} - \frac{\xi}{\Delta} \frac{\partial (x^{i-1} u)}{\partial \alpha} \quad (4)$$

$$W = u - \dot{x}; \quad \dot{x} = \mathcal{D}x/\mathcal{D}t = \varphi(x, t) \quad (5)$$

$$\Delta = x^{i-1} \frac{\partial x}{\partial \alpha} \quad (6)$$

здесь  $\rho$  - плотность газа,  $x$  - эйлерова координата,

$u$  - скорость газа,

$\varepsilon$  - удельная внутренняя энергия,

$\mathcal{P}$  - давление,

$\xi$  - коэффициент вязкости,

$\alpha$  - смешанная эйлерово-лагранжевая (СЭЛ) координата,

$W$  - скорость движения газа относительно СЭЛ - координат,  
 $Q_{\text{вост}}$  - объемный вклад энергии от внешних источников,  
 $l=1$  в плоском и  $l=2$  в цилиндрическом случае,  
 $\varphi$  - заданная скорость движения СЭЛ-координат относительно лабораторной системы.

Производные по времени  $\partial / \partial t$  берутся в СЭЛ-системе координат ( $\alpha$  - фиксированы). При  $\dot{x} = 0$ ,  $W = u$  и уравнения (I)-(6) описывают движение газа на неподвижной сетке (эйлеров вариант). В случае  $\dot{x} = u$ , относительная скорость  $W = 0$  и уравнения (I)-(6) описывают движение газа в лагранжевых переменных.

Уравнения (I)-(4) представляют собой законы сохранения массы, импульса и внутренней энергии, записанные в подвижной системе координат.

Система (I)-(6) замыкается уравнением состояния:

$$P = P(\rho, \varepsilon) \quad (7)$$

В [5] предложена полностью консервативная разностная схема (ПКРС) решения уравнений ГД в СЭЛ переменных. Эта схема алгоритмически состоит из двух этапов.

Первый этап - лагранжев, описывается следующей системой разностных уравнений:

$$M_i \frac{\bar{u}_i - u_i}{2\tau_n} = x_i^{l-1} (P_{i-1}^* - P_i^*) \quad (8)$$

$$m_i \frac{\bar{\varepsilon}_i - \varepsilon_i}{\tau_n} = -P_i^* [u_{i+1}^* x_{i+1}^{l-1} - u_i^* x_i^{l-1}] + q_i V_i \quad (9)$$

$$P_i^* = P_i - \frac{\xi_i}{V_i} [u_{i+1}^* x_{i+1}^{l-1} - u_i^* x_i^{l-1}] \quad (10)$$

$$\xi_i = 0.5 \alpha_{\text{с.л.}} P_i (x_{i+1} - x_i) [1 - \alpha_{\text{л.л.}} (u_{i+1}^* x_{i+1}^{l-1} - u_i^* x_i^{l-1})]$$

$$P_i = P(\rho_i, \varepsilon_i) \quad (11)$$

$$m_i = \rho_i V_i; \quad M_i = (m_i + m_{i-1})/2 \quad (12)$$

$$\frac{\bar{x}_i - x_i}{\tau_n} = \frac{\bar{u}_i + u_i}{2} \quad (13)$$

здесь приняты обозначения :

$f = f(t_0)$  - величина  $f$  на шаге  $t = t_0$ ,

$\bar{f}$  - значение  $f$  после выполнения лагранжевого шага по времени  $t = t_0 + \tau_n$ ,

$f = f(t_0 - \tau_{n-1})$  - значение  $f$  на предыдущем шаге по времени,

$x_i$  - координаты разностной сетки,

$u_i, \varepsilon_i$  - скорость и внутренняя энергия,

$p_i$  - давление,

$M_i, m_i$  - массы узла и ячейки,

$V_i = (x_{i+1}^e - x_i^e)/\ell$  - объем ячейки,

$\ell = 1$  соответствует плоскому,  $\ell = 2$  - цилиндрическому случаям

$\rho$  - плотность газа,

$q_i$  - объемный вклад энергии от внешних источников,

$c_i = \sqrt{\gamma(\gamma - 1)\varepsilon_i}$  - адиабатическая скорость звука,

$\gamma$  - показатель адиабаты.

Координаты  $x$ , скорости  $u$ , массы  $M$  относятся к узлам разностной сетки, а термодинамические функции  $\rho, p, \varepsilon$ , массы  $m$ , объем  $V$ , внешний вклад энергии -  $q$  относятся к ячейкам (индекс ячейки соответствует индексу ее левого узла).

Если задан такой закон движения разностной сетки, что координаты ее узлов на следующем временном слое  $\hat{x}_i$  отличны

от вычисленных на лагранжевом этапе  $\bar{x}_i$  (см. формула (13)), то необходим второй этап - переинтерполяции величин с сетки  $\bar{x}_i$  на сетку  $\hat{x}_i$ .

Разностные уравнения второго этапа - переинтерполяции на новую сетку - удобно записать в потоковой форме:

$$\frac{m_i - \bar{m}_i}{\tau_n} + F_{i+1}^* - F_i^* = 0 \quad (14)$$

$$\frac{\hat{\hat{m}} \varepsilon_i - \overline{m} \varepsilon_i}{\tau_n} + F_{i+1}^e - F_i^e = 0 \quad (15)$$

$$\frac{\hat{\hat{p}}_i - \overline{p}_i}{\tau_n} + F_i^u - F_{i-1}^u = 0 \quad (16)$$

$$\hat{\hat{p}}_i = \frac{\hat{\hat{M}}_i(u_i + u_{i+1})}{2} ; \quad \overline{p}_i = \frac{M_i(\bar{u}_i + u_i)}{2} \quad (17)$$

$$W_i = \frac{\hat{\hat{x}}_i - \bar{x}_i}{\tau_n} \quad (18)$$

Поток массы в (14) определяется по формулам

$$F_i^r = \rho_i^* W_i \quad (19)$$

$$\rho_i^* = \begin{cases} \rho_i, & W_i > 0 \\ \rho_{i+1}, & W_i < 0 \end{cases}$$

Такая аппроксимация соответствует монотонному алгоритму "донорных ячеек" [6].

Аналогично определяются потоки внутренней энергии:

$$F_i^e = (\rho \varepsilon)_i^* W_i \quad (20)$$

$$(\rho \varepsilon)_i^* = \begin{cases} \rho_i \varepsilon_i, & W_i > 0 \\ \rho_{i+1} \varepsilon_{i+1}, & W_i < 0 \end{cases}$$

Для того, чтобы схема (8)-(20) была полностью консервативной, потоки импульса в (16) необходимо вычислять по формуле [5]:

$$F_i^u = (F_i^r + F_{i+1}^r) \frac{u_i + u_{i+1}}{4} \quad (21)$$

2. При перемещении узлов расчетной сетки со скоростями среды (лагранжев случай), свойства схемы (8)-(21) мало отличаются от свойств полностью консервативных разностных схем

в лагранжевых переменных, достаточно полно исследованных [7]. Результаты многих практических расчетов подтвердили эффективность таких схем.

В случае расчетов на неподвижных сетках (эйлеров вариант) описанная схема совпадает с предложенной в [4] схемой "со сбалансированными аппроксимациями конвективных потоков", которая обладает следующими достоинствами:

- отсутствием заметных нефизических осцилляций вычисляемых величин,
- в окрестностях ударных волн схема практически не уступает по качеству известным схемам с коррекцией потоков [8,9] и с большей точностью передает веер волн разрежения,
- существенно лучше других схем (см. например [10,11]) воспроизводит решение задачи о распространении ударной волны по холодному фону с экспоненциально нарастающей плотностью [12].

Эти качественные особенности сохраняются и при некоторых промежуточных движениях сетки (например, [5] X-координаты - фиксированы (эйлеровы), а Y-координаты движутся вместе с газом (лагранжевы) ).

При использовании подвижных, адаптирующихся сеток возникает ситуация, когда скорости отдельных узлов сетки могут превышать локальную скорость среды. Как показали расчеты, в этом случае начинают проявляться некоторые негативные свойства предложенной выше схемы. Для иллюстрации этого, рассмотрим задачу о распаде сильного разрыва [9], часто используемую для проверки качества схем ГД.

Начальные условия:

$$x = [0, 100]$$

$$P(x) = \begin{cases} 8, & x < 50 \\ 1, & x > 50 \end{cases}$$

(22)

$$P(x) = \begin{cases} 480, & x < 50 \\ 1, & x > 50 \end{cases}$$

$$u(x) = 0$$

На рис. I(a), для примера приведен профиль скорости на момент времени  $t = 3$  при использовании неподвижной сетки  $X_i = i-1$ ,  $i = 1, \dots, 101$  и шага по времени  $\tau = 0.02$

Рис. I(б) демонстрирует заметное ухудшение качества решения при простейшем движении сетки:

$$x_i(t) = \begin{cases} (i-1), & i = 1, \dots, 101, t < t_0 = 1 \\ (100 + u_0 t) \frac{(i-1)}{100}, & t > t_0 \end{cases}$$

(скорость  $u_0$  подобрана так, что скорость узлов сетки в месте расположения ударной волны равна скорости самой ударной волны,  $u_0 = 20$  ).

Как видно из рис. I(б), довольно значительные осцилляции в скорости (до 5-8%) проявляются в месте расположения контактного разрыва, фронта ударной волны и даже на фоне невозмущенного газа. В случае, когда необходимо рассчитывать течения газа в комплексе с другими процессами, в которых возможна резкая зависимость от плотности или температуры, такие осцилляции могут привести к значительным ошибкам в расчетах.

Причина появления возмущений на фоне заключается в том, что полностью консервативная аппроксимация потока импульса (2I) не обладает свойством транспортности [6], т.е. допускает проникновение возмущений "вверх по потоку".

Для устранения указанного явления осуществим коррекцию потока импульса, т.е. поступим следующим образом. Кроме "полностью консервативной" аппроксимации потоков импульса (2I)

$F_i^{n,k}$ , будем вычислять и "транспортную" аппроксимацию -  $F_i^{tr}$ . При этом можно использовать алгоритм, аналогичный используемому при определении монотонных потоков массы и энергии, с учетом направления относительной скорости:

$$F_i^{tr} = \begin{cases} \rho_i \frac{u_i + u_{i+1}}{4} (W_i + W_{i+1}), & W_i + W_{i+1} > 0 \\ \rho_i \frac{u_{i+1} + u_{i+2}}{4} (W_i + W_{i+1}), & W_i + W_{i+1} < 0 \end{cases} \quad (23)$$

Скорректированный поток импульса для уравнения (16) определим, анализируя в каждой ячейке знаки и абсолютные величины "полностью консервативного" и "транспортного" потоков по следующему алгоритму:

$$F_i^u = \begin{cases} 0, & \text{если } F_i^{n \cdot k} \cdot F_i^{tr} < 0 \\ F_i^{n \cdot k}, & \text{если } F_i^{n \cdot k} \cdot \operatorname{sign}(F_i^{tr}) < (1+q) |F_i^{tr}| \\ (1+q)F_i^{tr}, & \text{если } F_i^{n \cdot k} \cdot \operatorname{sign}(F_i^{tr}) > (1+q) |F_i^{tr}| \end{cases} \quad (24)$$

При этом полная консервативность в соответствующем узле может нарушиться и для соблюдения закона сохранения полной энергии в уравнение для внутренней энергии второго этапа (15) необходимо добавить компенсационный член:

$$\frac{(\overline{m\varepsilon})_i - (\overline{m\varepsilon})_i}{\tau_n} + F_{i+1} - F_i = (F_i^u - F_i^{n \cdot k})(u_{i+1} - u_i) \quad (25)$$

Параметр  $q$  в (24) определяет относительную важность при расчетах свойств "транспортности" или "полной консервативности". Так, при уменьшении  $q$ , во все меньшем числе ячеек допускается нарушение свойства полной консервативности.

В случае, когда коррекция потоков импульса нигде не требуется ( $F_i^u = F_i^{n \cdot k}$ ) схема остается полностью консервативной.

Результаты расчета теста о распаде сильного разрыва с использованием модифицированной схемы приведены на рис. 1(в). Осцилляции на графике скорости отсутствуют, фон остается невозмущенным, размытие фронта ударной волны не увеличивается. Параметр  $q$  в (24) в этом расчете выбирался равным 1.

## 2. АЛГОРИТМ ПОСТРОЕНИЯ АДАПТИРУЮЩИХСЯ СЕТОК.

1. Пусть задана некоторая функция  $U(x) \rightarrow \delta > 0 \quad x \in [p, q]$  (будем называть ее управляющей функцией) и требуется построить неравномерную сетку  $\{x_i, i=1, \dots, N\}$  на  $[p, q]$  такую, что длины ячеек обратно пропорциональны величине функции  $U(x)$ , т.е. сетка должна быть сгущена там, где  $U$  велика, и разрежена, где  $U$  мала. Выбор управляющей функции

должен осуществляться в зависимости от конкретной проблемы. В частности, при решении нестационарных задач функция  $U$  может зависеть от решения, и тем самым сетка, как и в работе [13], будет также нестационарной и адаптированной.

Для решения поставленной задачи отображим отрезок  $[p, q]$  на отрезок  $[0, 1]$  изменения параметра  $\alpha$  и значения функции  $x(\alpha)$  в регулярных узлах сетки по  $\alpha$ :  $\alpha_i = (i-1)/(N-1); i=1, \dots, N$  будут задавать искомую неравномерную сетку на отрезке  $[p, q]$ . Функция  $x(\alpha)$  является решением уравнения:

$$\frac{dx}{d\alpha} = \frac{U_0}{U(x)} \quad (26)$$

с граничными условиями

$$x(0) = p; \quad x(1) = q \quad (27)$$

Второе граничное условие для уравнения первого порядка (26) необходимо для определения незаданной константы  $U_0$  в этом уравнении.

Решение уравнения (26) можно записать в виде:

$$\int_p^{x(\alpha)} U(\xi) d\xi = c\alpha, \quad \text{где } c = \int_p^q U(\xi) d\xi \quad (28)$$

При выполнении численных расчетов с адаптирующимися сетками управляющая функция  $U$  обычно задана на некоторой дискретной неравномерной сетке  $\{x_i, i=1, \dots, N\}$ . Для простоты выкладок предположим, что функция  $U$  кусочно-постоянная, т.е.

$$U(x) = \{ U_i, x \in [x_i, x_{i+1}], i=1, \dots, N-1 \}$$

В этом случае интеграл от нее (в левой части (28)) будет монотонной, кусочно-линейной функцией  $J(x)$ :

$$J(x) = A_k + U_k(x - x_k); \quad x \in [x_k, x_{k+1}]$$

$$A_k = \sum_{i=1}^{k-1} U_i(x_{i+1} - x_i) \quad (29)$$

Адаптированная неравномерная сетка  $\hat{x}_i = x(\alpha_i)$  при  $\alpha_i = (i-1)/(N-1); i=1, \dots, N$  определяется следующим образом: Пусть  $K$  - номер такой, что

$$A_K < A_N \alpha_i < A_{K-1}$$

тогда  $\hat{x}_i$  определяется как:

$$\begin{aligned} \hat{x}_i &= (1 - \alpha^*)x_K + \alpha^*x_{K+1} \\ \alpha^* &= (A_N \alpha_i - A_K)/(A_{K+1} - A_K) \end{aligned} \quad (30)$$

Может возникнуть ситуация (особенно при начале расчетов), что сетка  $\hat{x}_i$  очень сильно отличается от сетки  $x_i$ . Чтобы избежать этого, вводятся следующие ограничения: продвижение узла сетки при адаптации не должно превышать половины длины правой или левой ячеек исходной сетки  $x_i$  в зависимости от направления движения узла.

Отметим, что из уравнения (26) следует:

$$\frac{\max_i (x_{i+1} - x_i)}{\min_i (x_{i+1} - x_i)} = \frac{\min_x U(x)}{\max_x U(x)}$$

При практических расчетах часто полезно зафиксировать отношение максимальной длины ячейки к минимальной, т.е.:

$$\frac{\max_i (x_{i+1} - x_i)}{\min_i (x_{i+1} - x_i)} = M = \text{const} \quad (31)$$

Для осуществления этого достаточно перенормировать управляющую функцию:

$$\bar{U}(x) = 1 + \frac{(M-1)[U(x) - U_{\min}]}{U_{\max} - U_{\min}}$$

где

$$U_{\min} = \min_x U(x)$$

$$U_{\max} = \max_x U(x)$$

т.е.

$$\frac{\max_x \bar{U}(x)}{\min_x \bar{U}(x)} = M$$

Таким образом введение параметра  $M$  позволяет управлять экстремальными свойствами ячеек разностных сеток.

2. В качестве простейшего примера применения движущейся адаптированной сетки рассмотрим одномерное уравнение переноса:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + c_0 \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0; \quad x \in [0, 100]; \quad t > 0 \quad (32)$$

с начальными условиями:

$$\rho(x, 0) = \rho_0(x) = \begin{cases} 2, & x < 10 \\ 1, & x > 10 \end{cases} \quad (33)$$

Точное решение этой задачи следующее:

$$\rho_{\text{точ.}}(x, t) = \rho_0(x - c_0 t, 0) \quad (34)$$

Пусть  $x(\alpha, t)$  - подвижная система координат,  $\alpha \in [0, 1]$ ,  $t > 0$ . Уравнение (32) в этой системе запишется в виде:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho x_\alpha) + \frac{\partial}{\partial \alpha}[\rho(c_0 - x_\alpha)] = 0 \quad (35)$$

При разностной аппроксимации уравнения (35) на временном слое  $t = t_0$  будем считать заданными:  $\{x_i, i=1, \dots, N\}$  - узлы разностной сетки и  $\{\rho_i, i=1, \dots, N-1\}$  - значения функции  $\rho$  в ячейках разностной сетки. Будем также предполагать, что задана адаптированная разностная сетка  $\{\hat{x}_i, i=1, \dots, N\}$  на следующем временном слое  $t = t_0 + \tau_n$ . Для осуществления следующего временного шага остается определить  $\rho_i$  - значение  $\rho$  на временном слое  $t = t_0 + \tau_n$ .

Для определения  $\{\hat{p}_i, i=1, \dots, N-1\}$  уравнение (35) аппроксимируем следующей монотонной разностной схемой:

$$\begin{aligned} \hat{p}_i(\hat{x}_{i+1} - \hat{x}_i) - \hat{p}_{i+1}(\hat{x}_{i+1} - \hat{x}_i) &= \\ &= \hat{p}_i^*[\hat{x}_i - \hat{x}_i - c_0\tau] - \hat{p}_{i+1}^*[\hat{x}_{i+1} - \hat{x}_{i+1} - c_0\tau] \end{aligned} \quad (36)$$

где

$$\hat{p}_i^* = \begin{cases} \hat{p}_i, & \hat{x}_i - \hat{x}_i - c_0\tau > 0 \\ \hat{p}_{i+1}, & \hat{x}_i - \hat{x}_i - c_0\tau < 0 \end{cases}$$

Приведенная схема переходит в монотонную схему Куранта [6] при условии неподвижности сетки  $\hat{x}_i = x_i; i=1, \dots, N$  т.е.

$$\hat{p}_i = -c_0\tau(\hat{p}_i^* - \hat{p}_{i+1}^*)/(\hat{x}_{i+1} - \hat{x}_i)$$

$$\hat{p}_i^* = \begin{cases} \hat{p}_i, & -c_0 > 0 \\ \hat{p}_{i+1}, & -c_0 < 0 \end{cases}$$

Для определения зависимости точности расчетов от степени сгущения сетки, задача (32)-(33) численно решалась по схеме (36) при различных значениях  $M$  - отношения максимального шага сетки к минимальному в алгоритме адаптации сетки. Точность расчетов определялась по степени размазывания фронта к определенному моменту времени.

Для построения адаптирующейся сетки использовалась управляющая функция:

$$U_i = 1 + |\hat{p}_{i+1} - \hat{p}_i|/(\hat{x}_{i+1} - \hat{x}_i)$$

Начальная сетка:  $\hat{x}_i = i - 1$ , шаг по времени:  $\tau = 0.05$ , время расчета  $t \in [0, 50]$ ,  $c_0 = 1$ .

При расчете варианта с заданным значением  $M$  сетка двигалась следующим образом. В течении нескольких временных шагов она "подстраивалась" под начальный профиль  $\hat{p}$ , т.е. постепенно сгущалась в области разрыва  $\hat{p}$ . Такое, постепенное

сгущение, обусловленное ограничениями на продвижение узлов сетки в алгоритме адаптации, позволяет избежать предварительной подстройки сетки в начале расчета, адаптация к начальным данным происходит параллельно с расчетом.

В последующие моменты времени сетка изменялась таким образом, что ячейка минимальной длины всегда располагалась в области максимального градиента  $\rho$ , вправо и влево от этой области длины ячеек постепенно увеличивались так, что отношение длины максимальной ячейки к длине минимальной сохранялось приблизительно равным  $M$ .

Результаты расчетов при различных значениях  $M$  (см. (31)) приведены на рис. 2, 3.

Точность определялась на момент времени  $t = 50$  как:

$$\varepsilon = \sum_{i=1}^{N-1} |\rho_{\text{точ}} - \rho_i| (x_{i+1} - x_i) \quad (37)$$

На рис. 2 (I-4) приведены профили  $\rho$  на момент времени  $t = 50$  при различных значениях  $M$ . Зависимость точности  $\varepsilon$  от  $M$  представлена на рис. 3. Из рисунка видно, что без заметного увеличения времени расчета и памяти можно существенно увеличить точность.

Улучшение точности расчета можно проиллюстрировать на примере более простого алгоритма движения сетки. Будем считать, что в окрестности разрыва сетка движется со скоростью  $U_0 < C_0$ , за этой окрестностью узлы неподвижны. В этом случае в окрестности разрыва сетка будет сгущена и отношение шага сетки  $h$  к шагу вне окрестности  $H$  определяется:

$$h / H = 1 - \frac{U_0}{C_0} = \frac{1}{M} \quad (38)$$

$$M = \frac{1}{1 - \frac{U_0}{C_0}}$$

При таком движении сетки, вблизи разрыва разностная схема (36) приобретает вид:

$$\frac{\hat{p}_i - p_i}{\tau} = \frac{c_0(p_{i-1} - p_i)}{H}$$

Построим П-форму первого дифференциального приближения этой схемы [14]:

$$\frac{p(x+u_0\tau, t+\tau) - p(x, t)}{\tau} = \frac{c_0}{H} [p(x-h, t) - p(x, t)]$$

т.е.

$$\frac{\partial p}{\partial t} + c_0 \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{c_0}{2} (H - c_0\tau) \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \left[1 - \frac{u_0}{c_0}\right]^2$$

В системе координат, движущейся со скоростью  $c_0$  относительно неподвижной системы, последнее уравнение переписется в виде:

$$\frac{1}{c} \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{1}{M^2} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}, \quad c = \frac{c_0}{2} (H - c_0\tau).$$

Это уравнение при начальном профиле ударной волны в виде ступеньки (33) описывает размазывание этого профиля со временем. Если  $\Delta x_1$  - эффективная ширина фронта волны в некоторый момент времени  $t_0$  при  $M = 1$ , то при произвольном  $M$  и в тот же момент времени  $t_0$  эффективная ширина определяется (например из соображений размерности) как

$$\Delta x_M = \frac{\Delta x_1}{M}$$

Отсюда, приблизительно заменяя профиль ударной волны в зоне размазывания прямой линией, получим оценку для повышения точности при увеличении  $M$ :

$$\varepsilon(M) = \frac{\varepsilon(1)}{M} \quad (39)$$

Решение уравнения переноса (32) по схеме (36) с вышеописанным алгоритмом движения сетки реализовано на ЭВМ.

Результаты расчетов приведены в таблице:

$M$	$\varepsilon$	$\varepsilon_m$	$C_m$	$\tau$
1	3.98	1.0	0.5	0.5
5	0.889	1.12	2.5	0.625
10	0.453	1.14	5.0	0.645
50	0.092	1.15	25.0	0.662
100	0.046	1.16	50.0	0.664
500	0.009	1.16	250.0	0.666

где

$M = H/h$  - отношение шага вне окрестности к шагу в окрестности разрыва (см. (38)).

$\varepsilon$  - точность расчетов по формуле (37)

$$\varepsilon_m = \frac{M\varepsilon(M)}{\varepsilon(1)}$$

$C_m$  - число Куранта, вычисленное по малому шагу  $h$ .

$\tau$  - шаг по времени.

Из приведенной таблицы результатов расчетов можно сделать следующие выводы:

1. Точность расчетов хорошо описывается формулой (39).
2. Несмотря на сгущение сетки, допустимый шаг по времени в расчетах не уменьшается. Этот шаг определяется величиной числа Куранта  $C = C_0\tau/H$ , определяемого по шагу  $H$  вне окрестности разрыва.

Приведенные расчеты показывают, что без заметного увеличения времени расчета и памяти, путем надлежащего выбора подвижной сетки можно существенно увеличить точность. Несмотря на сильное сгущение сетки, допустимый шаг по времени не требуется уменьшать, как это пришлось бы делать на неподвижной сетке.

### 3. РАСЧЕТЫ ОДНОМЕРНОЙ СВЕТОДЕТОНАЦИОННОЙ ВОЛНЫ (СДВ).

1. Для исследования возможностей использования адаптирующихся сеток (с целью сокращения времени расчета или увеличения точности) выполнена серия одномерных расчетов СДВ. Проведено сравнение с имеющимися аналитическими результатами.

Одномерные расчеты позволили также ответить на ряд вопросов, касающихся динамики (распространения и развала) СДВ и их зависимости от параметров плазмы.

Пусть в области  $x \in [0, L]$  находится газ аргон с параметрами  $P = P_{\text{о.н.}}$ ,  $T = T_{\text{о.н.}}$ ,  $\rho = \rho_{\text{о.н.}}$ . Справа в направлении к началу координат  $x = 0$ , распространяется свет интенсивности  $I_{\text{вх}}$ . В некоторый момент времени  $t = t_0$  вблизи начала координат ( $x \in [0, x_0]$ ,  $x_0 \ll L$ ) моделируется инициация пробоя газа - задаются  $P = P_{\text{пр}}$ ,  $T = T_{\text{пр}}$ ,  $\rho = \rho_{\text{о.н.}}$ .

Можно подобрать такие параметры плазмы и интенсивности светового пучка [15], что навстречу лучу от поверхности будет распространяться СДВ, т.е. за счет поглощения световой энергии в узкой пространственной зоне по газу будет распространяться ударная волна.

Для моделирования СДВ необходимо решать совместно уравнения ГД и уравнения поглощения света: коэффициент поглощения световой энергии определяется через характеристики среды, а динамика газа определяется вкладом энергии через механизм поглощения света.

Уравнение распространения света в одномерном случае (в приближении геометрической оптики) записывается в виде:

$$\frac{dI}{dx} = \mu I ; x \in [0, L] \quad (40)$$

$$I \Big|_{x=L} = I_{\text{вх}}$$

где  $I(x)$  - интенсивность света,

$I_{\text{вх}}$  - интенсивность на правой границе области,

$\mu$  - коэффициент поглощения света.

Для описания среды используются уравнения ГД (1)-(6) с

объемным вкладом в уравнении (3) вида:

$$Q_{vol} = \frac{dI}{dx} = \mu I \quad (41)$$

Ионизационный состав, уравнение состояния, коэффициент поглощения лазерного излучения и другие характеристики аргоновой плазмы рассчитывались в приближении локального термодинамического равновесия. Эти расчеты хорошо совпадают с опубликованными таблицами [16] для приведенных в них диапазонов давления и температуры.

2. Для численного решения уравнений ГД реального газа и распространения света в области  $x \in [0, L]$  вводится разностная сетка  $\{x_i, i = 1, \dots, N\}$ . Разностные уравнения для определения характеристик среды приведены в §1. Коэффициент поглощения среды будем считать заданным в центрах ячеек, интенсивности - в узлах. Уравнение для интенсивности (40) аппроксимируем следующим образом:

$$I_i = I_{i+1} \exp[-\mu_i(x_{i+1} - x_i)] ; I_N = I_{ex} \quad (42)$$

Такая аппроксимация позволяет правильно рассчитывать интенсивность даже при больших коэффициентах поглощения  $\mu_i$ .

Объемный вклад энергии определяется как:

$$q_i = \frac{I_{i+1} - I_i}{x_{i+1} - x_i} \quad (43)$$

При этом вклад энергии в ячейках имеет дивергентный вид и для системы выполняются разностные аналоги законов сохранения с учетом энергии света. При недивергентной аппроксимации вклада энергии, например, при разностной аппроксимации уравнения (41) в виде:

$$q_i = 0.5\mu_i (I_i + I_{i+1})$$

при больших  $\mu_i$  вклад энергии может превышать реальный в несколько раз. Аппроксимации (42), (43) уравнения поглощения света и объемного вклада позволяют корректно рассчитывать

-интенсивность и поглощаемую газом энергию при любых коэффициентах поглощения и на произвольной неравномерной сетке

3. В рассматриваемой области параметров [15],  $T = 20000^\circ\text{K}$  длина поглощения  $1/\mu = 10^{-3}$  см, скорость распространения СДВ  $U_0 \gg 10^5$  см/сек,  $\Delta t = 10$  мксек - для корректного расчета на равномерной сетке требуется около  $10^3$  ячеек разностной сетки в направлении распространения СДВ. При использовании неравномерных адаптирующихся сеток можно существенно ослабить это требование, уменьшить затраты расчетного времени и памяти ЭВМ.

На рис. 4(а) приведены графики плотности аргона на различные моменты времени при расчете на эйлеровой, фиксированной сетке. Хотя на выбранной сетке совсем не разрешается узкая зона поглощения света, используемая консервативная аппроксимация (независимо от величины коэффициента поглощения) хорошо передает такие важные характеристики, как например, скорость распространения СДВ - рассчитанные скорости совпадают с теоретическими с точностью не хуже 1%.

Результат применения алгоритма адаптации сетки приведен на рис. 4(б) (нижний график - профиль плотности, верхний - длины ячеек). При этом расчете использовалась полностью консервативная (не модифицированная) разностная схема (8)-(21) решения уравнений ГД. Рисунок демонстрирует сгущение сетки в месте расположения СДВ, существенно улучшилось разрешение профиля плотности (отчетливо различаются зона поглощения и волна разрежения), однако вследствие нетранспортной аппроксимации потоков импульса на невозмущенном фоне появляются нефизические осцилляции.

Результаты расчета с использованием адаптирующихся сеток по модифицированной схеме (с коррекцией потоков импульсов) представлены на рис. 5(а) и 5(б).

На рис. 5(а) приведены профили плотности и графики длин ячеек как функции  $X$  на три различных момента времени. Правая граница расчетной области и число ячеек разностной сетки - фиксированы, т.е. средняя длина ячеек неравномерной сетки

равна длине ячейки равномерной сетки.

Область сгущения сетки, подстраиваясь, движется вместе с СДВ. Наряду с улучшением разрешения профиля плотности по сравнению со случаем равномерных сеток, рисунок демонстрирует и влияние коррекций потоков импульса - подавление нефизических осцилляций, имеющих место при расчете по немодифицированной схеме.

Данный пример демонстрирует увеличение точности расчета без дополнительных затрат оперативной памяти ЭВМ и расчетного времени.

Рис. 5(6) показывает еще одну возможность использования подвижных адаптирующихся сеток. Правая граница в этом расчете начиная с некоторого момента времени движется со скоростью ударной волны, средняя длина ячеек увеличивается, но вблизи ударной волны, благодаря сгущению сетки, длины ячеек сохраняются приблизительно равными начальной длине ячейки на равномерной сетке. Общее число ячеек (и однородность алгоритма) сохраняются, однако задача здесь просчитана до времени  $T_1 = 10 T_0$  на порядок большее, чем удалось бы просчитать на неподвижной сетке (до времени  $T_0$  распространения СДВ до правой границы области). С другой стороны, расчет на неподвижной сетке до времени  $T_1$  требовал бы десятикратных затрат емкости оперативной памяти и десятикратных затрат расчетного времени при той же точности расчетов. Таким образом, использование адаптирующихся сеток позволяет существенно сэкономить вычислительные ресурсы без заметного уменьшения точности расчетов или увеличить точность без дополнительных затрат памяти и времени ЭВМ.

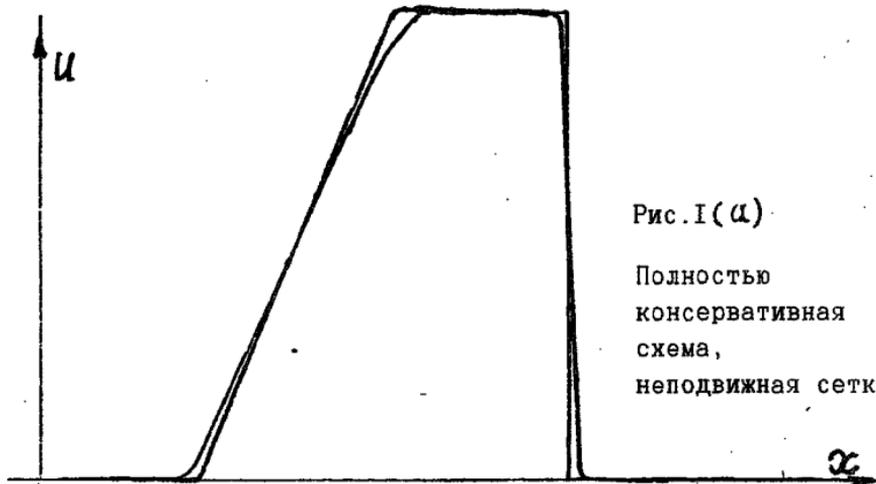


Рис. I (а)

Полностью  
консервативная  
схема,  
неподвижная сетка

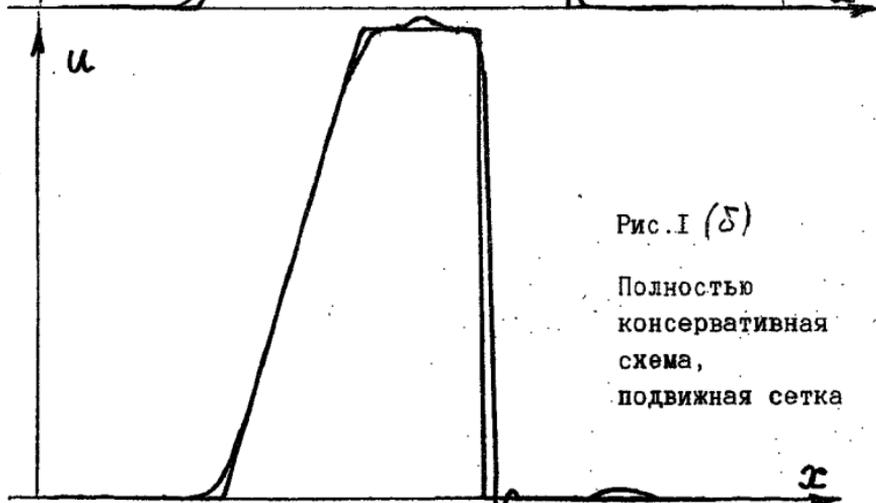


Рис. I (δ)

Полностью  
консервативная  
схема,  
подвижная сетка

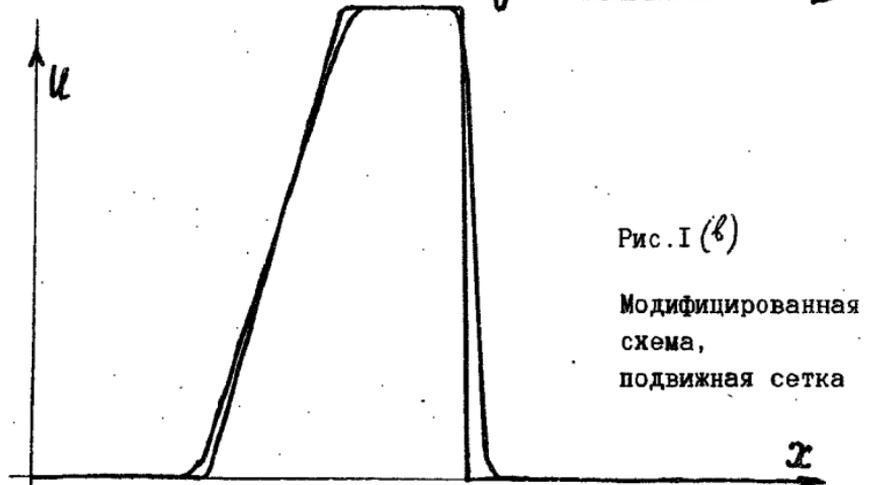


Рис. I (ε)

Модифицированная  
схема,  
подвижная сетка

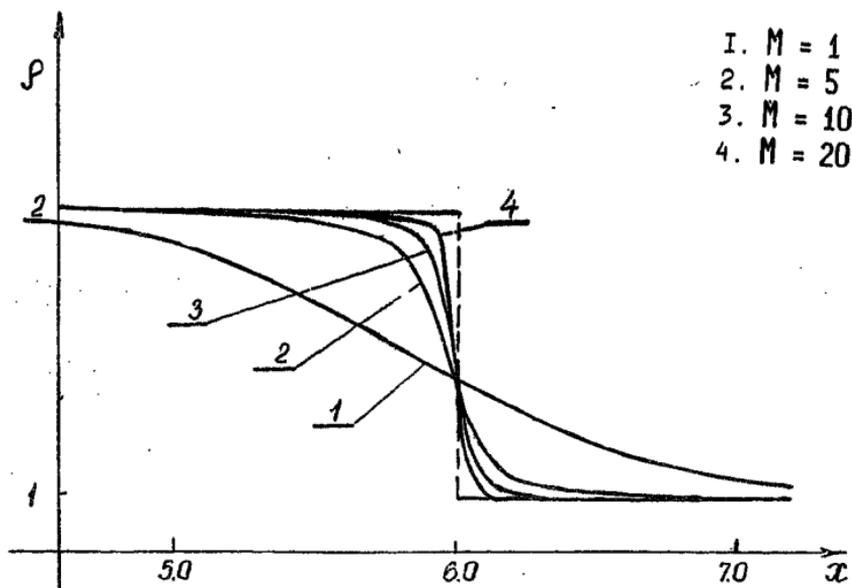


Рис. 2

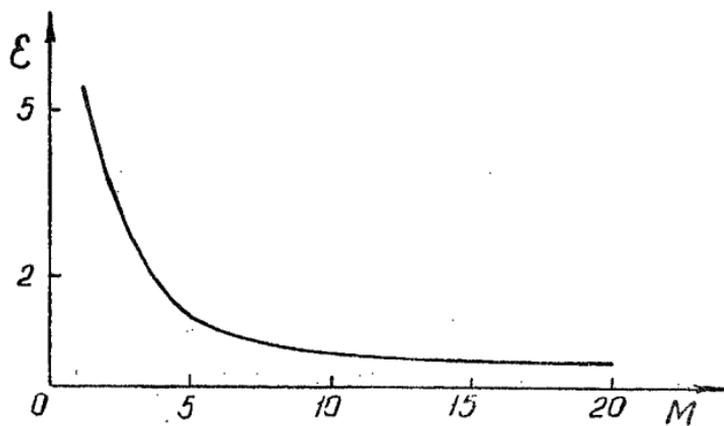
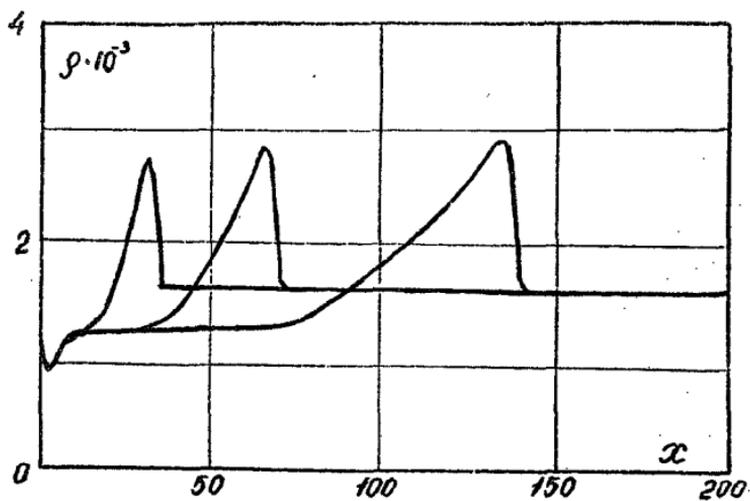


Рис. 3

a)



б)

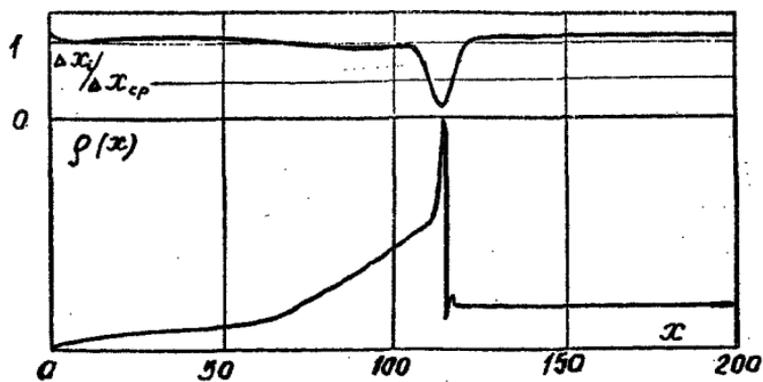


Рис. 4

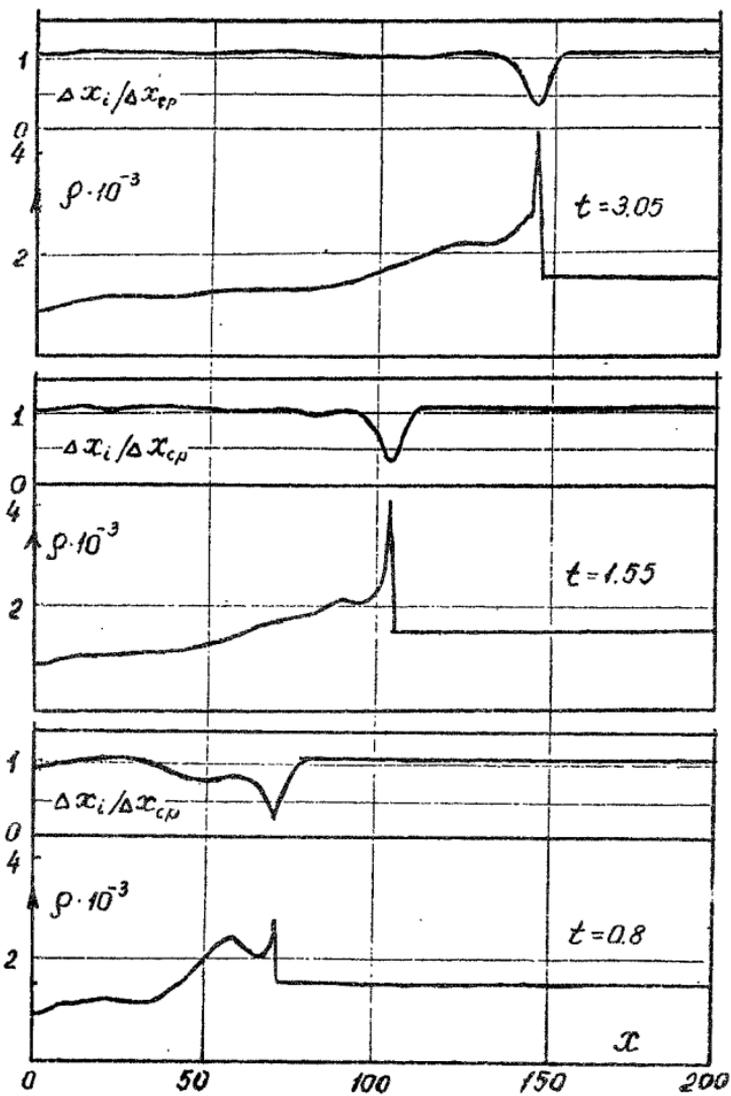


Рис. 5(а)

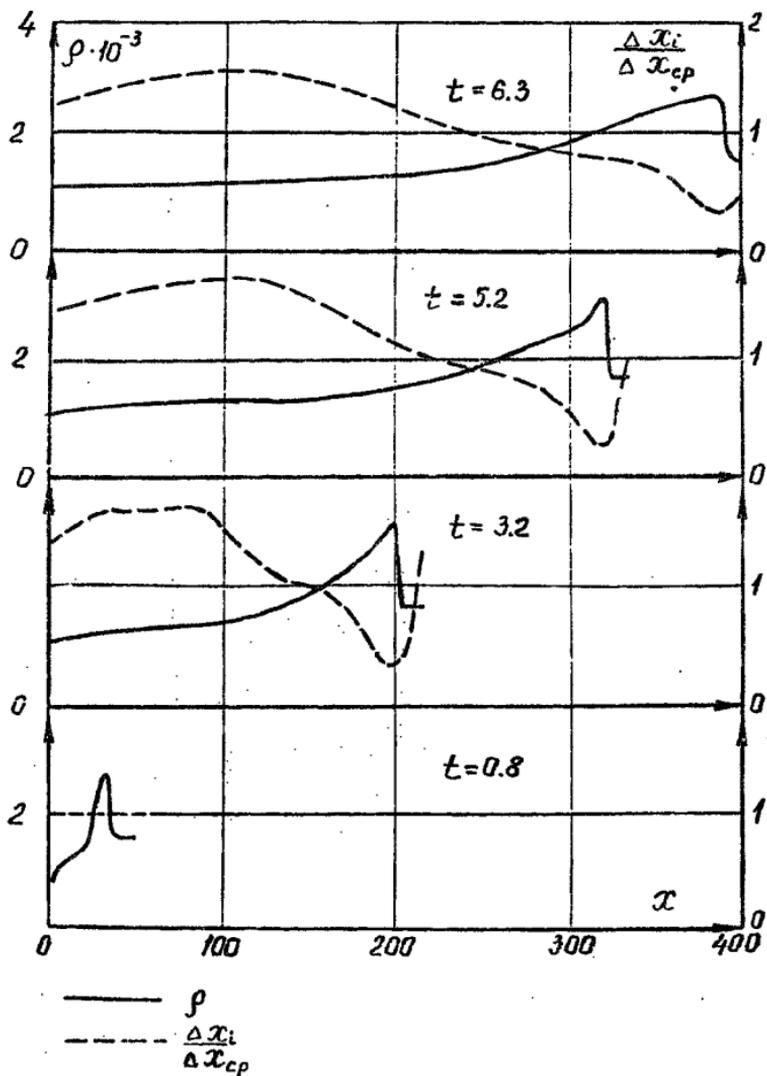


Рис. 5(6)

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ.

В данной работе:

1. Предложена модификация полностью консервативной разностной схемы уравнений ГД в СЭЛ переменных, обладающая свойством транспортности при скоростях движения узлов сетки, превышающих локальную скорость среды.
2. Предложен простой и эффективный алгоритм построения одномерных адаптирующихся сеток, сгущающихся в области больших градиентов какой либо из рассчитываемых функции и позволяющий контролировать экстремальные размеры ячеек.
3. На примере практической задачи о распространении СДВ, продемонстрированы возможности и показаны преимущества использования подвижных адаптирующихся сеток.

## ЛИТЕРАТУРА.

1. Самарский А.А., Попов Ю.П. Разностные схемы газовой динамики. //М., "Наука", 1975.
2. Кузьмин А.В., Макаров В.А., Меладзе Г.В. Об одной полностью консервативной разностной схеме для уравнений газовой динамики в переменных Эйлера. //Журн. вычисл. матем. и матем. физ, 1980, т.20, №1, стр.171-181.
3. Колдоба А.В., Повещенко Ю.А. Полностью консервативные разностные схемы для задач газовой динамики при наличии источников массы. //Препринт ИПМ им. М.В.Келдыша АН СССР, Москва, 1982, №160.
4. Головизнин В.М., Рязанов М.А., Самарский А.А., Сороковикова О.С. Разностные схемы газовой динамики со сбалансированными аппроксимациями конвективных потоков. //Препринт ИПМ им. М.В.Келдыша АН СССР, №56, М., 1984.
5. Головизнин В.М., Рязанов М.А., Самарский А.А., Чернов С.Ю. Двумерная полностью консервативная разностная схема газовой динамики в смешанных эйлерово-лагранжевых переменных //Препринт ИПМ им. М.В.Келдыша АН СССР, 1985, №11.

