ЖУРНАЛ
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Том 28, 1988 № 4

УДК 517.958:536.2

# ОБ ОДНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ЗАЖИГАНИЯ ИЗЛУЧЕНИЕМ

*БУНКИН Ф. В., ГАЛАКТИОНОВ В. А., КИРИЧЕНКО Н. А., КУРДЮМОВ С. П., САМАРСКИЙ А. А.*

*(Москва)*

Получены условия существования и несуществования стационарных решений в модельной задаче лазерной макрокинетики, описывающей нагрев полубесконечного образца пространственно неоднородным пучком излучения при степенной аппроксимации энерговыделения на поверхности образца. Обсуждаются режимы локализации и обострения теплового поля в веществе на высокотемпературной стадии нагрева.

## § 1. Введение

Развитие высокотемпературной теплофизики и макрокинетики инициировали постановку и детальное исследование широкого класса нелинейных краевых задач для уравнения теплопроводности. Важное место среди них занимают вопросы нагрева вещества излучением, составляющие предмет интенсивно развивающегося направления — лазерной макрокинетики [1], [2].

К настоящему моменту выполнено большое число теоретических и экспериментальных исследований горения под действием излучения (см., например, [3]). Оказалось, что для задач физики горения характерны размерные эффекты. Например, для инициирования горения вещества, занимающего достаточно большой объем, необходимо, чтобы очаг имел достаточно высокую температуру и большие размеры [4]. В задачах лазерного нагрева неоднородность поля излучения существенна и обусловлена конечными размерами реального пучка и неоднородностью распределения интенсивности по его сечению. В связи с этим возникает вопрос о критических параметрах излучения (о радиусе пучка и мощности), при которых становится возможным зажигание вещества. Изучение этих вопросов представляет интерес как для целей лазерной технологии, так и для дальнейшего развития теории нелинейных динамических систем с неоднородными параметрами.

В [5]–[8] подробно изучена нелинейная краевая задача

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \Delta T \equiv \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}, \qquad (r, z) = x \in \Omega = \tag{1}$$

$$= \{r \geqslant 0,\ z > 0\},$$

$$-\left.\frac{\partial T}{\partial z}\right|_{\partial\Omega} = I(r) + g(T), \qquad \partial\Omega = \{r \geqslant 0,\ z = 0\}, \tag{2}$$

$$I(r) = I_0 \exp\left(-\frac{r^2}{r_0^2}\right),$$

$$T(0, x) = 0, \qquad x \in \Omega, \tag{2'}$$

где $g(T) = \exp(-1/T)$. Это простейшая математическая модель поверхностного нагрева излучением массивного металлического образца, на поверх-

ности которого происходит экзотермическая реакция (окисление). Здесь $T$ — температура, $I_0$ и $r_0$ — интенсивность и эффективный радиус пучка излучения. Слагаемое $g(T)$ описывает энерговыделение реакции. В [5]—[8] было установлено, что в плоскости значений параметров $\{I_0, r_0\}$ существует монотонная граница устойчивости $I_0=h(r_0)$ такая, что при всех $I_0<h(r_0)$ стационарная краевая задача (1), (2) разрешима, а при $I_0>h(r_0)$ она стационарных решений не имеет. Это значит, что при достаточно низких начальных температурах вещества воспламенения не происходит, если $I_0<h(r_0)$, и при любых начальных условиях экзотермическая реакция охватывает всю поверхность образца, если $I_0>h(r_0)$.

В ряде случаев, однако, необходимо рассматривать иные типы нелинейностей, чем $g(T)=\exp(-1/T)$, поскольку, в частности, реальный химический процесс в общем случае является многостадийным, отдельные механизмы «включаются» при различных температурах, существуют различные механизмы теплопотерь (например, радиационные $\sim T^4$ и конвективные $\sim T$) и т. д. При этом в практически важных достаточно широких температурных интервалах нелинейность $g(T)$ в граничном условии часто может аппроксимироваться степенной зависимостью

$$g(T)=T^{\alpha}, \qquad \alpha=\text{const}>0. \tag{3}$$

Кроме того, исследование нелинейности типа (3) позволяет сделать определенные заключения и об эволюции систем с иной нелинейностью (например, на основании теорем сравнения).

В настоящей статье изучаются условия существования стационарных решений и некоторые эволюционные свойства нестационарных решений краевой задачи (1)—(3) со степенной нелинейностью в граничном условии.

## § 2. Об условиях несуществования стационарных решений

В стационарном случае краевая задача (1), (2), (3) эквивалентна нелинейному интегральному уравнению [9]

$$T(r, z)=S\left(I_0 \exp\left(-\frac{\xi^2}{r_0^2}\right)\right)(r, z)+S(T^{\alpha}(\xi, 0))(r, z), \tag{4}$$

где $S$ — оператор:

$$S(v(\xi))(r, z)=\int_0^{+\infty} \xi v(\xi)\, d\xi \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(r^2+z^2+\xi^2-2r\xi\cos\varphi)^{-1/2}\, d\varphi.$$

В уравнении (4) положим $z=0$ и введем обозначение $T(r, 0)=T(r)$. Тогда

$$T(r)=S\left(I_0 \exp\left(-\frac{\xi^2}{r_0^2}\right)\right)(r)+S(T^{\alpha}(\xi))(r). \tag{4'}$$

Очевидно, что задачи (4) и (4′) с точки зрения разрешимости эквивалентны: задача (4) разрешима тогда и только тогда, когда разрешимо уравнение (4′). Более того, если известно, что $T(r, 0)>0$ — решение задачи (4′), то из (4) легко найти и решение $T(r, z)$ во всем полупространстве $x=(r, z)\in\Omega$.

Теорема 1 (несуществования). *Пусть* $0<\alpha\leqslant 2$. *Тогда краевая задача* (1)—(3) *не имеет стационарных решений.*

Для доказательства понадобятся некоторые оценки, характеризующие область значений оператора $S$.

Лемма 1. *Справедливо неравенство*

$$S\left(I_0 \exp\left(-\frac{\xi^2}{{r_0}^2}\right)\right)(r) \geqslant \frac{m_1}{r+r_0}, \qquad r \geqslant 0, \tag{5}$$

*где*

$$m_1 = I_0 {r_0}^2 \int_0^{+\infty} \eta (1+\eta)^{-1} \exp(-\eta^2)\, d\eta.$$

Справедливость соотношения (5) вытекает из неравенств

$$S(I(\xi))(r) = I_0 \int_0^{+\infty} \xi \exp\left(-\frac{\xi^2}{{r_0}^2}\right) d\xi \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (r^2+\xi^2-2r\xi\cos\varphi)^{-1/2} d\varphi \geqslant$$

$$\geqslant I_0 {r_0}^2 \int_0^{+\infty} \eta (r+r_0\eta)^{-1} \exp(-\eta^2)\, d\eta \geqslant$$

$$\geqslant \frac{I_0 {r_0}^2}{r+r_0} \int_0^{+\infty} \eta (1+\eta)^{-1} \exp(-\eta^2)\, d\eta.$$

Соотношение (5) дает простейшую оценку решения уравнения (4′): $T(r) \geqslant m_1/(r+r_0)$. Составим рекуррентную функциональную последовательность

$$T_1(r) = \frac{m_1}{r+r_0}, \quad T_{n+1}(r) = T_1(r) + S(T_n{}^{\alpha}(\xi))(r), \quad n = 1, 2, \ldots. \tag{6}$$

В силу монотонности оператора $S(T^{\alpha})$ по $T$, из (4′) получаем, что при всех $n \geqslant 1$ (если $T_n(r)$ определены для любых конечных $n \geqslant 1$) должны выполняться неравенства

$$T(r) \geqslant T_n(r), \qquad r \geqslant 0, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{7}$$

и, в частности,

$$T(r) \geqslant T_\infty(r) = \lim_{n\to\infty} T_n(r), \qquad r \geqslant 0. \tag{7′}$$

В силу монотонности $\{T_n\}$, последний предел, конечный или бесконечный, существует.

Лемма 2. *Пусть* $0 < \alpha \leqslant 1$. *Тогда, в силу* (7), *при* $n=2$

$$S(T_1{}^{\alpha}(\xi))(r) = m_1{}^{\alpha} S((\xi+r_0)^{-\alpha})(r) = +\infty, \qquad r \geqslant 0,$$

*и, следовательно, уравнение* (4′) *не имеет решений.*

Доказательство. Очевидно, что

$$S((\xi+r_0)^{-\alpha})(r) \geqslant \int_0^{+\infty} \xi (r+\xi)^{-1} (r_0+\xi)^{-\alpha} d\xi = \tag{8}$$

$$= r_0^{1-\alpha} \int_0^{+\infty} \eta (s+\eta)^{-1} (1+\eta)^{-\alpha} d\eta,$$

где $s = r/r_0$, причем в случае $\alpha \in (0, 1]$ последние интегралы расходятся. Но тогда (см. (7), (6))

$$T(r) \geqslant T_2(r) > S(T_1{}^{\alpha}(\xi))(r) > m_1{}^{\alpha} S((\xi+r_0)^{-\alpha}) = +\infty,$$

что доказывает сделанное утверждение.

Лемма 3. *Пусть* $\alpha > 1$. *Тогда*

$$S((\xi+r_0)^{-\alpha})(r) \geqslant [2(\alpha-1)(r+r_0)^{\alpha-1}]^{-1}, \quad r \geqslant 0. \tag{9}$$

Доказательство. Воспользуемся оценкой, аналогичной (8). При $\alpha>1$ интегралы сходятся, причем

$$\int_0^{+\infty} \eta (s+\eta)^{-1}(1+\eta)^{-\alpha}\,d\eta \geqslant \int_s^{+\infty} \frac{\eta}{s+\eta}(1+\eta)^{-\alpha}\,d\eta, \qquad s=\frac{r}{r_0}>0.$$

Поскольку $\eta/(s+\eta)\geqslant 1/2$ при $\eta\geqslant s$, то

$$S((\xi+r_0)^{-\alpha})(r) \geqslant \frac{1}{2} r_0^{1-\alpha} \int_s^{+\infty} (1+\eta)^{-\alpha}\,d\eta = r_0^{1-\alpha}\frac{(s+1)^{1-\alpha}}{2(\alpha-1)},$$

что доказывает неравенство (9).

**Перейдем теперь к доказательству теоремы 1.**

1. Пусть сначала $1<\alpha<2$. Покажем, что при $\alpha\in(1, 2)$ последовательность (6) определена не при всех $n$ и существует такое целое $N=N(\alpha)>1$, что $T_{N+1}(r)=+\infty$. В силу (7), это гарантирует неразрешимость задачи (4′).

На основании леммы 3 оценим снизу все члены функциональной последовательности (6):

$$T_2(r) > S([m_1(\xi+r_0)^{-1}]^{\alpha}) > m_2(r+r_0)^{-\lambda_2}, \qquad \lambda_2=\alpha-1,$$
$$m_2=\frac{m_1^{\alpha}}{2\lambda_2};$$
$$T_3(r) > S([m_2(\xi+r_0)^{-\lambda_2}]^{\alpha}) > m_3(r+r_0)^{-\lambda_3}, \qquad \lambda_3=\alpha\lambda_2-1,$$
$$m_3=\frac{m_2^{\alpha}}{2\lambda_3},$$

и, окончательно, для всех $n>1$

$$T_n(r)>m_n(r+r_0)^{-\lambda_n}, \qquad \lambda_n=\alpha\lambda_{n-1}-1, \quad m_n=m_{n-1}^{\alpha}/(2\lambda_n). \tag{10}$$

Из рекуррентного соотношения на показатели степени $\lambda_n$ в (10) имеем $\lambda_n=(\alpha-1)^{-1}[1-(2-\alpha)\alpha^{n-1}]$, $n=1, 2, \ldots$, и, следовательно, при $1<\alpha<2$ всегда найдется такое целое $N=N(\alpha)>-\ln(2-\alpha)/\ln\alpha>0$, что $\alpha\lambda_N<1$, т. е.

$$T_{N+1}(r)>S(T_N^{\alpha}(\xi))(r)>m_N^{\alpha}S((\xi+r_0)^{-\alpha\lambda_N})=+\infty$$

(см. лемму 2). В силу (7), это влечет за собой неразрешимость (4′).

2. Рассмотрим теперь случай $\alpha=2$. Здесь, как будет показано ниже, функциональная последовательность (6) определена при всех $n=1, 2, \ldots$ и теорема несуществования доказывается на основе предельного неравенства (7′). Для доказательства потребуются две леммы.

Лемма 4. *Справедлива оценка*

$$S((\xi+r_0)^{-2})(r) \geqslant \frac{1}{4r}\ln\left(\frac{r}{r_0}\right), \qquad r\geqslant r_0, \quad \alpha=2. \tag{11}$$

Доказательство. Из (8) при $\alpha=2$ имеем

$$S((\xi+r_0)^{-2})(r) \geqslant r_0^{-1}\int_1^{+\infty} \frac{\eta}{(1+\eta)^2}(s+\eta)^{-1}\,d\eta, \qquad s=\frac{r}{r_0}.$$

Поскольку $\eta/(1+\eta)^2\geqslant 1/(4\eta)$ при $\eta\geqslant 1$, то

$$S((\xi+r_0)^{-2})(r) \geqslant \frac{1}{4r_0}\int_1^{+\infty} \eta^{-1}(s+\eta)^{-1}\,d\eta = \frac{1}{4r}\ln\left(1+\frac{r}{r_0}\right),$$

откуда следует (11).

С помощью (11) получаем следующую оценку второго члена последовательности (6):

$$T_2(r) \geqslant \frac{m_1}{r+r_0} + \frac{m_1^2}{4}\frac{1}{r}\ln\left(\frac{r}{r_0}\right), \qquad r \geqslant r_0. \tag{12}$$

Таким образом, оператор $S(v^2)$ меняет асимптотику функции $v$ следующим образом: если $v \sim r^{-1}$ при $r \to +\infty$, то $S(v^2) \gtrsim (\ln r)/r$. Далее потребуется оценка снизу общего члена последовательности $\{T_n\}$ при $\alpha=2$.

Лемма 5. *Пусть* $\alpha=2$. *Тогда при всех* $n \geqslant 2$

$$T_n(r) \geqslant \frac{m_1}{r+r_0} + \sum_{k=1}^{n-1} v_k(r), \tag{13}$$

*где* $v_k(r)=0$ *при* $r \in (0, r_0]$, *а при* $r > r_0$

$$v_k(r) = C_k \frac{1}{r}\left[\ln\left(\frac{r}{r_0}\right)\right]^{2^{k-1}}, \qquad C_k = \left[\frac{m_1}{2}\ln^{1/2} 2\right]^{2^k} \ln^{-1} 2 > 0. \tag{14}$$

Доказательство проведем по индукции. При $n=2$ оценка (13) верна (см. (12)). Пусть она справедлива при $n=N$. Тогда из (6) при $\alpha=2$ имеем

$$\begin{aligned} T_{N+1}(r) &= \frac{m_1}{r+r_0} + S(T_N^2(\xi))(r) \geqslant \frac{m_1}{r+r_0} + \\ &+ S\left(\left[\frac{m_1}{r+r_0} + \sum_{k=1}^{N-1} v_k(\xi)\right]^2\right) \geqslant \frac{m_1}{r+r_0} + \\ &+ S\left(\frac{m_1^2}{(\xi+r_0)^2} + \sum_{k=1}^{N-1} v_k^2(\xi)\right)(r). \end{aligned} \tag{15}$$

Действуя так же, как при доказательстве леммы 4, получаем

$$S(m_1^2(\xi+r_0)^{-2}) \geqslant \frac{m_1^2}{4}\frac{1}{r}\ln\left(\frac{r}{r_0}\right) \equiv v_1(r), \qquad r > r_0,$$

и в общем случае (см. (14))

$$\begin{aligned} S(v_k^2(\xi)) &= S\left(C_k^2 \frac{1}{\xi^2}\left[\ln\left(\frac{\xi}{r_0}\right)\right]^{2^k}\right) \geqslant \\ &\geqslant C_k^2 \int_r^{+\infty} \left[\ln\left(\frac{\xi}{r_0}\right)\right]^{2^k} \xi^{-1}(r+\xi)^{-1}\, d\xi \geqslant \\ &\geqslant C_k^2 \left[\ln\left(\frac{r}{r_0}\right)\right]^2 \int_r^{+\infty} \frac{d\xi}{\xi(r+\xi)} = C_k^2 \ln 2 \frac{1}{r}\left[\ln\left(\frac{r}{r_0}\right)\right]^{2^k}. \end{aligned}$$

Однако $C_k^2 \ln 2 = C_{k+1}$, и, следовательно, $S(v_k^2(\xi))(r) \geqslant v_{k+1}(r)$ для любого $k=1, 2, \ldots, N-1$. Тогда из (15) прямо вытекает справедливость оценки (13) при $n=N+1$. Этим завершается доказательство леммы.

Перейдем теперь к доказательству неразрешимости (4′) в случае $\alpha=2$. Подставим оценку (13), (14) в предельное неравенство (7′), которому должно удовлетворять всякое решение $T=T(r)>0$. Тогда получим

$$T(r) \geqslant T_\infty(r) \geqslant \frac{m_1}{r+r_0} + \frac{1}{r\ln 2}\sum_{k=1}^{\infty} p^{2^k}, \qquad r > r_0, \tag{16}$$

где

$$p = \frac{m_1}{2}(\ln 2)^{1/2}\left[\ln\left(\frac{r}{r_0}\right)\right]^{1/2} > 0, \qquad r > r_0.$$

Легко видеть, что ряд, стоящий в правой части (16), расходится при $p \geqslant 1$, т. е. при

$$r \geqslant r_* = r_0 \exp[4/(m_1^2 \ln 2)] > r_0.$$

Поэтому $T(r)$ при $r \geqslant r_*$ не определено и, следовательно, решение исходной эллиптической задачи при $\alpha=2$ не существует. Этим завершается доказательство теоремы 1.

Замечание. Теорема 1 остается в силе при произвольном распределении интенсивности излучения $I(r)$ в пучке: вместо экспоненциальной формы $I(r)=I_0 \exp(-r^2/r_0^2)$, принятой в (2), (4), можно взять любую функцию $I(r)=I_0\theta(r/r_0)$, $\theta(\xi)\geqslant 0$, $\theta \not\equiv 0$. Техника доказательства при этом меняется незначительно (ср. [7]).

Теорема 2 (существования). *Пусть $\alpha>2$. Тогда в плоскости параметров $\{I_0, r_0\}$ существует монотонная граница устойчивости $I_0=h(r_0)>0$, $r_0>0$; $h(0^+)=+\infty$, $h(+\infty)=0$. При всех $I_0>h(r_0)$ стационарная задача неразрешима, а при всех $I_0<h(r_0)$ существует минимальное решение $T=T_{\min}(x)>0$ в $\Omega$, которое устойчиво снизу; при этом $T(t, x)\leqslant T_{\min}(x)$, $t>0$, $x\in\Omega$, и $T(t, x)\to T_{\min}(x)$ при $t\to+\infty$ равномерно на каждом компакте из $\Omega$.*

Сформулированная теорема может быть доказана так же, как в [6], [7]. Однако при $\alpha\geqslant 3$ оценку снизу функции $h(r_0)$ можно получить достаточно просто. Пусть $\alpha\geqslant 3$. Краевая задача (1)—(3) допускает построение верхнего решения следующего вида:

$$T_+(x)=C[r^2+(z+a)^2]^{-1/2}, \qquad x=(r, z)\in\Omega,$$

где $C$, $a$ — некоторые положительные постоянные. Функция $T_+$ удовлетворяет нелинейной эллиптической задаче

$$\Delta T_+=0 \text{ в } \Omega, \qquad -\partial T_+/\partial z|_{\partial\Omega}=aC^{-2}T_+^3$$

и, очевидно, будет верхним решением исходной, если

$$-\partial T_+/\partial z|_{\partial\Omega}\geqslant I_0 \exp(-r^2/r_0^2)+T_+^\alpha,$$

или, что то же самое,

$$aC(r^2+a^2)^{-3/2}\geqslant I_0 \exp(-r^2/r_0^2)+C^\alpha(r^2+a^2)^{-\alpha/2} \tag{17}$$

при любых $r\geqslant 0$. Используя оценку $(r^2+a^2)^{-\alpha/2}\leqslant a^{3-\alpha}(r^2+a^2)^{-3/2}$, получаем, что неравенство (17) заведомо выполнено, если

$$aC(1-C^{\alpha-1}a^{2-\alpha})(r^2+a^2)^{-3/2}\geqslant I_0 \exp(-r^2/r_0^2), \qquad r\geqslant 0.$$

Последнее неравенство справедливо, например, при $3r_0^2=2a^2$ и $I_0\leqslant aC(1-C^{\alpha-1}a^{2-\alpha})/a^3$, т. е. в случае

$$I_0\leqslant {}^2/_3 r_0^{-2}C[1-C^{\alpha-1}({}^3/_2)^{(2-\alpha)/2}r_0^{2-\alpha}].$$

Максимум выражения, стоящего в правой части, достигается при

$$C=\alpha^{-1/(\alpha-1)}({}^2/_3)^{(2-\alpha)/2(\alpha-1)}r_0^{-(2-\alpha)/(\alpha-1)},$$

и поэтому верхнее решение $T_+$ существует при следующем ограничении на параметры пучка:

$$I_0\leqslant h_+(r_0)=(\alpha-1)\alpha^{-\alpha/(\alpha-1)}({}^2/_3)^{\alpha/[2(\alpha-1)]}r_0^{-\alpha/(\alpha-1)}. \tag{18}$$

Покажем, что при выполнении этого же условия задача (1), (2), (3) при $\alpha\geqslant 3$ имеет стационарное решение. Действительно, в этом случае решение нестационарной задачи удовлетворяет оценке $T(t, x)\leqslant T_+(x)$ в

$\mathbb{R}_+^1 \times \Omega$ и, кроме того, $T_t \geqslant 0$ (см. лемму 5 о критичности в [7]). Поэтому для любого $x \in \bar{\Omega}$ существует конечный предел

$$\lim_{t \to +\infty} T(t, x) = T_*(x)$$

и так же, как в [7, § 3] устанавливается, что $T_*(x) > 0$ — искомое стационарное решение.

Итак, в случае $\alpha \geqslant 3$ при выполнении неравенства (18) задача (1)—(3) имеет стационарное решение и, следовательно, функция $h$ в формулировке теоремы 2 удовлетворяет неравенству $h(r_0) \geqslant h_+(r_0)$ при всех $r_0 > 0$.

Доказательство несуществования решений при $I_0 > h(r_0)$ проводится аналогично [7], и останавливаться на этом не будем.

## § 3. О режимах с обострением и эффекте локализации реакции в нестационарной задаче

Исследуется асимптотическое поведение решений эволюционной задачи (1)—(3) в случаях, когда стационарных решений не существует.

1. Неограниченные решения при $1 < \alpha \leqslant 2$. Прежде всего покажем, что при $1 < \alpha \leqslant 2$ развитие теплового процесса всегда происходит в режиме с обострением, т. е. краевая задача глобально неразрешима.

Теорема 3. *Пусть* $\alpha \in (1, 2]$. *Тогда задача* (1)—(3) *не имеет глобального решения и существует такое* $t_0 \in (0, +\infty)$, *что*

$$\sup_{x \in \Omega} T(t, x) \equiv T(t, 0) \to +\infty \quad \textit{при} \quad t \to t_0^-. \tag{19}$$

Для доказательства потребуются вспомогательные утверждения.

Лемма 6. *Пусть* $T(t, x)$ *определено в* $(0, t_0) \times \bar{\Omega}$. *Тогда*

$$\partial T / \partial t \geqslant 0, \tag{20}$$

$$\partial T / \partial r \leqslant 0, \qquad \partial T / \partial z \leqslant 0 \quad \textit{в} \quad (0, t_0) \times \bar{\Omega}. \tag{21}$$

По поводу доказательства см. лемму 5 в [7].

Лемма 7. *При* $\alpha \in (1, 2]$ *функция* $T(t, r, 0)$ *для любого фиксированного* $r \geqslant 0$ *не ограничена сверху по* $t$.

Доказательство. Предположим противное. Тогда возможны три случая.

1. Существует такая постоянная $M > 0$, что $T(t, r, 0) \leqslant M$ для всех $t \geqslant 0$ при любых $r \geqslant 0$. Тогда, в силу неравенств (21), $T(t, r, z) \leqslant M$ в $\mathbb{R}_+^1 \times \bar{\Omega}$. Из (20), в свою очередь, получаем, что для любого $x \in \bar{\Omega}$ существует конечный предел

$$T_*(x) = \lim_{t \to +\infty} T(t, x),$$

и легко доказывается, что функция $T_*(x)$ должна быть стационарным решением задачи (см. [7]), которого в силу теоремы 1 не существует. Стабилизация любого равномерно ограниченного по $t$ решения задачи к стационарному вытекает также из наличия функции Ляпунова

$$V(T)(t) = \frac{1}{2} \| \nabla T \|^2_{L^2(\Omega)}(t) - 2\pi \int_{\partial\Omega} r \left[ \exp\left( -\frac{\xi^2}{r_0^2} \right) T + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\alpha + 1} T^{\alpha+1} \right] dr,$$

которая монотонна на эволюционных траекториях:

$$\frac{d}{dt}V(T)(t) = -\|T_t\|^2_{L^2(\Omega)}(t) \leqslant 0, \qquad t > 0.$$

2. Существует такое $r_* > 0$, что $T(t, r, 0) \to +\infty$ при $t \to +\infty$ на $(0, r_*)$ и функция $T(t, r, 0)$ ограничена сверху для всех $r > r_*$. Тогда, в силу (20), $T(t, r, 0) \to +\infty$ при $t \to +\infty$ равномерно на $[0, r_*/2]$. В этом случае из интегрального уравнения

$$(22) \qquad T(t, r, z) = \frac{2}{(2\sqrt{\pi})^3}\int_0^t (t-\tau)^{-3/2}\,d\tau \int_0^\infty \xi\,[\exp(-\xi^2/r_0^2) + T^\alpha(\tau, \xi, 0)]\,d\xi \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \exp\left[-\frac{r^2 + z^2 + \xi^2 - 2r\xi\cos\varphi}{4(t-\tau)}\right] d\varphi,$$

эквивалентного задаче (1)–(3), при $z=0$ получаем, что $T(t, r, 0) \to +\infty$ при $t \to +\infty$ для всех $r \geqslant 0$.

3. Функция $T(t, r, 0) \to +\infty$ при $t \to +\infty$ только в точке $r=0$. Этот случай в силу неравенства (20) (см. п. 1) равносилен тому, что при $t \to +\infty$ функция $T(t, r, 0)$ стабилизируется к «сингулярному» стационарному решению $T_*(r)$ уравнения (4′), которое определено при любых $r > 0$, причем $T_*(0) = \infty$. Однако в ходе доказательства теоремы 1 было установлено, что таких стационарных решений, определенных в окрестности $r = +\infty$, при $1 < \alpha \leqslant 2$ не существует.

Полученные противоречия доказывают лемму.

Доказательство теоремы 3. Предположим, что (19) не выполняется и функция $T(t, r, z)$ определена всюду в $\mathbb{R}^1_+ \times \bar{\Omega}$. Тогда на основании лемм 6, 7 заключаем, что $T(t, r, 0) \to +\infty$ при $t \to +\infty$ равномерно на каждом компакте $\{0 \leqslant r \leqslant r_*\}$ и, как нетрудно показать с помощью (22),

$$(23) \qquad T(t, r, z) \to +\infty \text{ при } t \to +\infty$$

равномерно на любом компакте $\{0 \leqslant r \leqslant r_*,\ 0 \leqslant z \leqslant z_*\}$, $z_* > 0$.

Покажем, что в этих условиях решение задачи не может быть глобальным. Рассмотрим функцию $T(t, x)$ в области $\omega = \{0 < r < r_*,\ 0 < z < 1\}$, где величина $r_* > 0$ выбрана достаточно большой. Из (23) следует, что для любого $M_* > 0$ найдется такое $t_* > 0$, что $T(t, x) \geqslant M_*$ в $(t_*, +\infty) \times \bar{\omega}$. Поэтому, в силу принципа максимума,

$$(24) \qquad T(t, x) \geqslant v(t, x) \text{ в } (t_*, +\infty) \times \bar{\omega},$$

где $v$ — решение краевой задачи

$$(25а) \qquad v_t = \Delta v, \quad t > t_*, \quad x \in \omega, \quad -\frac{\partial v}{\partial z} = v^\alpha, \quad t \geqslant t_*, \quad x \in \partial\omega_1 = \{0 < r < r_*,\ z = 0\},$$

$$(25б) \qquad v = 0, \quad t \geqslant t_*; \quad x \in \partial\omega_2 = \partial\omega \setminus \partial\omega_1, \quad v(t_*, x) = v_0(x), \quad x \in \bar{\omega}.$$

Здесь $v_0(x) \geqslant 0$ — произвольная достаточно гладкая функция, удовлетворяющая условиям согласования, причем $v_0 \leqslant M_*$ в $\bar{\omega}$.

Легко проверяется, что за счет увеличения постоянных $M_*$, $r_*$ функцию $v_0$ можно выбрать таким образом, что

$$(26) \qquad \int_{\partial\omega_1} v_0^{\alpha+1}(s)\,ds > \frac{\alpha+1}{2}\int_{\omega_1} |\nabla v_0|^2\,dx.$$

Такую функцию $v_0$ можно, вообще говоря, выписать в явном виде. Кроме того, нетрудно проверить, что если $v_0$ линейна по $z$, то справедливы оценки $\| v_0 \|^{\alpha+1}_{L^{\alpha+1}(\partial\omega_1)} \sim M_*^{\alpha+1} r_*^2$, $\| \nabla v_0 \|^2_{L^2(\omega)} \sim M_*^2 r_*^2$ и при достаточно больших $M_*$ имеет место неравенство $\| v_0 \|^{\alpha+1}_{L^{\alpha+1}(\partial\omega_1)} \geqslant \| \nabla v_0 \|^2_{L^2(\omega)}$ (легко видеть, что при больших $r_*$ добиться выполнения условий согласования краевых функций можно путем «малого» возмущения функции $v_0$, которое не нарушает неравенства (26) при $M_* \gg 1$).

При выполнении условия (26) решение задачи (25) существует в течение конечного интервала времени (см. [10, теорема II. 1]) и найдется такое $t_1 > t_*$, что

$$\overline{\lim_{t \to t_1^-}} \sup_{x \in \omega} v(t, x) = +\infty.$$

Из (24) тогда получаем (19), причем для времени существования решения справедлива оценка сверху $t_0 \leqslant t_1$.

2. Режимы с обострением при $2 < \alpha < 3$. В случае $\alpha > 2$, как показывает теорема 2, решение задачи (1)–(3) в области $I_0 < h(r_0)$ глобально ограничено и стремится к минимальному стационарному решению. Поэтому, чтобы инициировать процесс горения, необходимо задать достаточно большое нетривиальное начальное возмущение. Ниже рассматривается краевая задача с начальным условием

$$T(0, x) = T_0(x) \geqslant 0, \qquad x = (r, z) \in \bar{\Omega}, \quad \sup T_0 < +\infty, \tag{27}$$

и определены условия, при которых решение задачи является неограниченным.

Теорема 4. *Пусть* $\alpha \in (1,3)$ *и существует такое* $t_* > 0$, *что*

$$T_0(x) \geqslant t_*^{-1/[2(\alpha-1)]} C_0 [r^2 t_*^{-1} + (z t_*^{-1/2} + a_0)^2]^{-1/(\alpha-1)} \quad \text{в } \bar{\Omega}, \tag{28}$$

*где* $a_0 = 2[(3-\alpha)/(\alpha-1)]^{1/2}$, $C_0 = [16(3-\alpha)(\alpha-1)^{-3}]^{1/[2(\alpha-1)]}$. *Тогда решение задачи* (1), (2), (3), (27) *существует в течение конечного времени и для некоторого* $t_0 \leqslant t_*$ *выполняется условие*

$$\overline{\lim_{t \to t_0^-}} T(t, 0, 0) = +\infty. \tag{29}$$

Доказательство. Покажем, что в сделанных предположениях задача допускает построение неограниченного нижнего решения вида

$$T_-(t, x) = (t_* - t)^{-1/[2(\alpha-1)]} f(\xi, \eta),$$
$$\xi = r(t_* - t)^{-1/2}, \qquad \eta = z(t_* - t)^{-1/2},$$

где

$$f(\xi, \eta) = C[\xi^2 + (\eta + a)^2]^{-1/(\alpha-1)}, \tag{30}$$

$C, a > 0$ – постоянные, которые будут определены ниже. Функция $T_-$ заведомо будет нижним решением, если

$$(T_-)_t \leqslant \Delta T_- \text{ в } (0, t_*) \times \Omega, \qquad -\partial T_-/\partial z \leqslant T_-^{\alpha} \text{ в } (0, t_*) \times \partial\Omega,$$
$$T_-(0, x) \leqslant T_0(x) \text{ в } \bar{\Omega}, \tag{31}$$

или, что то же самое,

$$\xi^{-1}(\xi f_\xi)_\xi + f_{\eta\eta} - (\xi f_\xi + \eta f_\eta)/2 - f/[2(\alpha-1)] \geqslant 0 \text{ в } \Omega, \tag{32}$$

$$-f_\eta(\xi, 0) \leqslant f^\alpha(\xi, 0), \qquad \xi \geqslant 0 \tag{33}$$

(условие (31) совпадает с (28)). Подставляя функцию $f$ из (30) в (32), (33), приходим к неравенствам

$$\xi^2+\eta^2+4(3-\alpha)/(\alpha-1)-a^2\geqslant 0, \qquad \xi\geqslant 0, \qquad \eta\geqslant 0,$$
$$C^{\alpha-1}\geqslant 2a/(\alpha-1).$$

Отсюда следуют ограничения на значения параметров $a$ и $C$:

$$a^2\leqslant 4(3-\alpha)/(\alpha-1)=a_0^2, \qquad C^{\alpha-1}\geqslant 2a/(\alpha-1).$$

В частности, эти ограничения выполняются при значениях постоянных $a_0$ и $C_0$, указанных в условиях теоремы.

Таким образом, функция $T_-(t,x)$ при таком выборе постоянных $a_0$ и $C_0$ является нижним решением и, следовательно, $T\geqslant T_-$ в $\bar{\Omega}$ при всех допустимых $t>0$. Отсюда прямо следует (29).

3. Об асимптотической стадии горения. Представляет интерес выяснить, как происходит эволюция температурного поля после инициирования горения.

Естественно предположить, что на стадии развитого горения энерговыделение реакции существенно превышает энергию излучения. Поэтому на данной стадии температурное поле должно правильно описываться упрощенной задачей

$$(34) \qquad T_t=\Delta T, \quad t>0, \quad x\in\Omega, \quad -\frac{\partial T}{\partial z}\Big|_{\partial\Omega}=T^{\alpha}.$$

В отличие от исходной данная задача не содержит в граничном условии слагаемого, описывающего поглощение излучения.

Задача (34) допускает построение автомодельных решений, эволюционирующих в режиме с обострением:

$$(35) \qquad T_A(t,x)=(t_0-t)^{-1/[2(\alpha-1)]}f(\xi,\eta),$$
$$\xi=r(t_0-t)^{-1/2}, \qquad \eta=z(t_0-t)^{-1/2},$$

где функция $f>0$ удовлетворяет нелинейной эллиптической задаче (ср. (32))

$$(36а) \qquad \Delta f-(\xi f_\xi+\eta f_\eta)/2-[2(\alpha-1)]^{-1}f=0 \text{ в } \Omega,$$

$$(36б) \qquad -f_\eta(\xi,0)=f^{\alpha}(\xi,0), \qquad \xi\geqslant 0.$$

В пользу такой асимптотики свидетельствует возможность построения при $\alpha\in(1,3)$ неограниченных нижних решений с той же пространственно-временной структурой.

Амплитуда решения (35) неограниченно возрастает: $T_A(t,0,0)=f(0,0)\,(t_0-t)^{-1/[2(\alpha-1)]}\to+\infty$ при $t\to t_0^-$. Эффективная ширина возникающей тепловой структуры по каждому направлению сокращается:

$$\|x_{\text{эф}}\|(t)\sim(t_0-t)^{1/2}\to 0, \qquad t\to t_0^-,$$

и, более того, можно ожидать, что $T_A(t,x)\to+\infty$ при $t\to t_0^-$ только в одной точке $x=0$. Тем самым в окрестности этой точки локализуется практически вся энергия, выделившаяся на развитой стадии горения.

По своей пространственно-временной структуре $T_A$ представляет собой типичное локализованное автомодельное решение LS-режима с обострением (см. [11]). Эффект локализации энерговыделения реакции ранее был обнаружен в другой нелинейной задаче лазерного нагрева [12], [13], где режим локализации с обострением возникал как промежуточная

асимптотика эволюции температурного поля и был обусловлен изменением оптических характеристик вещества в ходе реакции.

В заключение следует отметить, что вопрос строгого обоснования асимптотики (35) остается открытым. Доказательство асимптотической устойчивости автомодельных решений с точкой сингулярности по времени даже в случае существенно более простых нелинейных параболических задач требует значительных усилий (см., например, [14], [15]). Остается открытым также вопрос о существовании нетривиального решения эллиптической задачи (36), более сложной по сравнению с рассмотренной в § 2.

**Литература**


1. *Бункин Ф. В., Кириченко Н. А., Лукьянчук Б. С.* Термохимическое действие лазерного излучения // Успехи физ. наук. 1982. Т. 138. Вып. 1. С. 45–94.
2. *Бункин Ф. В., Кириченко Н. А., Лукьянчук Б. С.* Термохимические и термокинетические процессы в поле непрерывного лазерного излучения // Изв. АН СССР. Сер. физ. 1983. Т. 47. № 10. С. 2000–2016; Нелинейные процессы при лазерном нагреве химически активных сред // 1984. Т. 48. № 8. С. 1485–1503.
3. *Вилюнов В. Н.* Теория зажигания конденсированных веществ. Новосибирск: Наука, 1984.
4. *Зельдович Я. Б., Баренблатт Г. И., Либрович В. Б., Махвиладзе Г. М.* Математическая теория горения и взрыва. М.: Наука, 1980.
5. *Бункин Ф. В., Кириченко Н. А., Лукьянчук Б. С.* Неустойчивость поверхностного горения под действием лазерного излучения // Квантовая электроника. 1982. Т. 9. № 10. С. 1959–1967.
6. *Бункин Ф. В., Галактионов В. А., Кириченко Н. А. и др.* Об одной нелинейной задаче лазерной термохимии // Докл. АН СССР. 1984. Т. 279. № 4. С. 838–842.
7. *Бункин Ф. В., Галактионов В. А., Кириченко Н. А. и др.* Об одной нелинейной задаче лазерной термохимии. I // Дифференц. ур-ния. 1985. Т. 21. № 11. С. 1947–1958.
8. *Бункин Ф. В., Галактионов В. А., Кириченко Н. А. и др.* Об одной нелинейной задаче лазерной термохимии. II // Дифференц. ур-ния. 1985. Т. 21. № 12. С. 2097–2105.
9. *Будак Б. М., Самарский А. А., Тихонов А. Н.* Сборник задач по математической физике. М.: Наука, 1980.
10. *Levine H. A., Payne L. E.* Nonexistence theorems for the heat equation with nonlinear boundary conditions and for porous medium equation backward in time // J. Different. Equat. 1974. V. 16. P. 319–334.
11. *Курдюмов С. П.* Собственные функции горения нелинейной диссипативной среды // Соврем. пробл. матем. физ. и вычисл. матем. М.: Наука, 1982. С. 217–243.
12. *Кириченко Н. А., Лукьянчук Б. С.* Лазерная активация окислительных реакций на поверхности металлов // Квантовая электроника. 1983. Т. 10. № 4. С. 819–825.
13. *Бобырев В. А, Бункин Ф. В., Кириченко Н. А. и др.* Эффекты локализации и обострения в задачах лазерной термохимии: Препринт № 298. М.: ИОФ АН СССР, 1985.
14. *Berryman J. G., Holland C. J.* Stability of the separable solution for fast diffusion // Arch. Ration. Mech. and Analysis. 1980. V. 74. P. 379–388.
15. *Галактионов В. А.* Асимптотическое поведение неограниченных решений нелинейного параболического уравнения $u_t=(u^\sigma u_x)_x+u^{\sigma+1}$ // Дифференц. ур-ния. 1985. Т. 21. № 7. С. 1126–1134.


Поступила в редакцию 24.IV.1987