ЖУРНАЛ
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Том 28, 1988 № 8

УДК 519.6:533.7

# КОНЕЧНО-РАЗНОСТНЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ АДАПТИВНЫХ СЕТОК, ДИНАМИЧЕСКИ СВЯЗАННЫХ С РЕШЕНИЕМ

*ДАРЬИН Н. А., МАЖУКИН В. И., САМАРСКИЙ А. А.*

*(Москва)*

Предлагается конечно-разностный метод решения нестационарных, одномерных по пространству задач газовой динамики. Метод основывается на использовании адаптирующихся сеток, получаемых преобразованием координат, которое, в свою очередь, определяется искомым решением. На основе предложенного метода построен эффективный вычислительный алгоритм, позволяющий существенно повысить точность расчетов при одновременном уменьшении общего числа узлов сетки в 2–5 раз по сравнению с другими методами.

## Введение

Правильный выбор расчетной сетки в задачах математической физики всегда является важнейшим компонентом численного решения. Особенно важна эта проблема в задачах газовой динамики, решения которых отличаются большим разнообразием особенностей.

Изначально при разработке методов численного решения уравнений газовой динамики наметились два подхода: лагранжев и эйлеров [1].

В лагранжевых методах [2], [3] ячейки расчетной сетки перемещаются вместе с жидкостью и, таким образом, скорость движения узлов определяется скоростью гидродинамического течения. Такой способ адаптации оказался удобным для относительно гладких течений, в которых отсутствуют большие деформации. Наиболее эффективно его применение в задачах со свободными поверхностями и поверхностями раздела. При значительных деформациях течения происходит сильное искажение ячеек сетки, что вызывает снижение точности расчетов и уменьшение шага интегрирования. Слишком большие амплитуды возмущающих сил могут вызвать так называемое «выворачивание» части ячеек, что приводит к утрате физического смысла результатов расчетов. Существует ряд механизмов регуляризации расчетных сеток лагранжева типа (см., например, [4], [5]), с помощью которых удается расширить область использования этих методов, однако полностью устранить недостатки лагранжева подхода не удается.

В численных методах, базирующихся на эйлеровом подходе [1], [6], узлы расчетной сетки фиксированы и не изменяются в процессе счета, что позволяет рассматривать течения с сильными деформациями. Но в задачах с не известным заранее поведением решения расстановка узлов может оказаться не оптимальной, что потребует применения сетки с весьма мелким шагом. Частично данный недостаток может быть компенсирован предварительным неравномерным распределением координатных линий, если известна некоторая априорная информация о поведении решения. Однако само построение неравномерных сеток в многомерных

задачах со сложной геометрией области решения представляет собой непростую задачу. Для построения наиболее простых сеток, учитывающих только форму границ области и не изменяющихся при их движении, был предложен ряд методов, либо основанных на геометрическом подходе [7], либо использующих идею автоматического преобразования координат [8], [9].

Оба подхода использовались для разработки методов построения сеток, учитывающих подвижность границ расчетной области. С этой целью в методах, использующих преобразование координат [10], предлагается дифференцирование по времени эллиптической системы уравнений. В методах, основанных на геометрическом подходе [11], вводятся подвижные сетки, жестко связанные с движением границы или с одной из особенностей решения. С их помощью в [11], [12] осуществлялось, в частности, выделение головной ударной волны.

Попытки объединить преимущества обоих подходов привели к разработке смешанных эйлерово-лагранжевых [13]—[17] и квазилагранжевых [18]—[20] методов.

Стремление к использованию всех преимуществ, которыми обладают методы подвижных сеток, лагранжев, эйлеров и смешанный эйлерово—лагранжев подходы, привели в конечном итоге к разработке и использованию методов адаптивных сеток, динамически связанных с решением (см. обзоры [21]—[23]).

Разработка методов построения адаптивных сеток в настоящее время находится в стадии интенсивного развития, и поэтому пока невозможно какому-либо из них отдать предпочтение. Ключевой проблемой всех методов построения адаптивных сеток, динамически связанных с решением, является выбор характеристики численного решения, используемой в качестве параметра, управляющего перемещением узлов сетки. Точность расчетов зависит также от того, как связаны разностная схема и способ построения расчетной сетки. С учетом этих требований различными авторами был предложен ряд эмпирических подходов к построению расчетных сеток с управляемым распределением узлов.

В методах подвижных конечных элементов [24], [25] для этих целей используется система разностных уравнений, получаемых с помощью проекционного метода Галеркина. При этом в [25] высказывалось мнение, что методы подвижных конечных элементов имеют неоспоримое преимущество перед конечно-разностными, использующими адаптивные сетки.

Еще большим разнообразием отличаются способы построения адаптивных сеток в конечно-разностных методах [26]—[34]. Наибольшее распространение в конечно-разностных методах получили способы построения адаптирующихся сеток, основанные на вариационных подходах [26], [27], эквидистантном распределении зависимых переменных [28], учете погрешности аппроксимации [29], [30] и градиентов численного решения [31] и др. (см., например, [32]).

К недостаткам перечисленных подходов следует отнести то, что процессы определения решения и движения узлов в них как бы разделены и реализуются автономно. Кроме того, взаимосвязь используемых разностной схемы и способа перестройки сетки задается эмпирически и, как правило, весьма груба. Как нам представляется, именно в силу этих причин при решении задач нередко возникают осцилляции сетки либо

связанные колебания решения и сетки, неоднократно отмечавшиеся в различных работах.

Представляется также не совсем рациональным определять решения в области сингулярности с помощью концентрации в ней узлов сетки. Выделение с помощью такого приема, например, ударной волны [32] требует $\sim 10^2$ узлов.

В настоящей работе предлагается свободный от указанных недостатков метод решения нестационарных одномерных задач газовой динамики на адаптивной сетке, динамически связанной с решением. Излагаемый подход представляет собой распространение на газодинамические задачи метода решения краевых нестационарных задач теплопроводности [33] и задач типа Стефана [34] на адаптивных сетках.

## § 1. Дифференциальная постановка задачи

Нахождение численного решения уравнений газовой динамики с помощью адаптивной сетки, динамически связанной с решением, определим как способ решения, при котором нахождение сеточных функций и координат узлов неразрывно связано. Основные отличия предлагаемого подхода от ранее рассматривавшихся заключаются в следующем.

1. Построение адаптивной сетки производится с помощью соответствующего преобразования координат. Конкретный вид преобразования задается с помощью некоторой функции $Q$, вид которой определяется особенностями решения исследуемой задачи.

2. Тесная взаимосвязь между искомым решением и способом перестройки расчетной сетки вводится на уровне дифференциальной модели, представляющей собой в общем случае нелинейную систему уравнений в частных производных. В этой системе часть уравнений описывает непосредственно исследуемое явление, а вторая часть — динамику расчетной сетки, определяемую, в свою очередь, эволюцией решения. В предельных случаях из этих уравнений получаются сетки либо в эйлеровых, либо в лагранжевых переменных.

Отметим, что конкретный вид связи между уравнениями газовой динамики и уравнением перестройки сетки задается по аналогии с квазилагранжевым подходом [18].

В качестве исходной системы координат, в которой производится математическая формулировка исследуемого явления, используем эйлерову систему координат $(x, t)$. Затем с помощью преобразования общего вида $x=f(q, t)$ осуществим переход из физического пространства в расчетное. Система нестационарных уравнений газовой динамики в одномерном приближении в эйлеровых переменных имеет вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+u\frac{\partial \rho}{\partial x}=-\rho\frac{\partial u}{\partial x}, \qquad \frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}, \tag{1.1а}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\varepsilon+\frac{u^2}{2}\right)+u\frac{\partial}{\partial x}\left(\varepsilon+\frac{u^2}{2}\right)=-\frac{\partial}{\partial x}(pu). \tag{1.1б}$$

В новых переменных $q$ и $t$ система уравнений (1.1) запишется в виде

$$\frac{\partial \psi}{\partial t}=-\frac{\partial Q}{\partial q}, \tag{1.2}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\psi u) = -\frac{\partial p}{\partial q} - \frac{\partial}{\partial q}(Qu), \tag{1.3а}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\psi\left(\varepsilon + \frac{u^2}{2}\right)\right] = -\frac{\partial}{\partial q}(pu) - \frac{\partial}{\partial q}\left[Q\left(\varepsilon + \frac{u^2}{2}\right)\right], \tag{1.3б}$$

$$\psi = \rho \partial x/\partial q, \tag{1.4}$$

$$Q = \rho(u - \partial x/\partial t). \tag{1.5}$$

Конкретный вид функции $Q$ определяется выбранным законом преобразования координат, т. е. видом функции $f(q, t)$. Отметим, что в лагранжевом, квазилагранжевом и смешанном эйлерово-лагранжевом подходах функция $f(q, t)$ считается известной. Для построения адаптивной сетки, динамически связанной с решением, необходимо, чтобы закон преобразования координат (функция $f(q, t)$) определялся искомым решением. В силу этого для полного определения системы (1.2)—(1.5) необходимо задать функцию $Q$.

Выражения (1.2)—(1.3) представляют собой уравнения неразрывности, движения и энергии, (1.4) — уравнение связи между переменными $x$ и $q$. Уравнение (1.5) можно записывать в виде

$$\partial x/\partial t = u - Q/\rho, \tag{1.6}$$

где $u$ — скорость, $\rho$ — плотность газа, а $Q$ — произвольная функция от решения. Как показано ниже, существенного улучшения решения разностных уравнений можно добиться, выбирая функцию $Q$ в виде

$$Q = \pm(\gamma p \rho)^{1/2}, \tag{1.7}$$

где $p$ — давление, $\gamma$ — постоянное отношение удельных теплоемкостей ($\gamma > 1$). Выбор функции $Q$ в виде (1.7) означает, что каждый узел разностной сетки движется либо по $C_+$-, либо по $C_-$-характеристике, так как в случае (1.7) уравнение (1.6) принимает вид

$$\partial x/\partial t = u \pm c, \qquad c = (\gamma p/\rho)^{1/2},$$

где $c$ — скорость звука.

В ряде задач, например при описании движения контактного разрыва, удобно выбирать функцию $Q$ в виде $Q \equiv 0$. В этом случае, очевидно, переменная $q$ совпадает с массовой лагранжевой переменной $m = \int \rho dx$. А при выборе функции $Q$ вида $Q = \rho u$ приходим к эйлеровым переменным, так как в этом случае $\partial x/\partial t = 0$.

Уравнения (1.4), (1.5) можно использовать для определения эйлеровой переменной $x(q, t)$ и изменения плотности $\rho$. Однако в вычислительном отношении удобнее вместо (1.5) взять другое уравнение. Для его получения дифференцируем левую и правую части (1.5) по пространственной переменной $q$ и, используя (1.4), приходим к уравнению для определения изменения $\rho$:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\psi}{\rho}\right) = \frac{\partial u}{\partial q} - \frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{Q}{\rho}\right). \tag{1.8}$$

Окончательно система уравнений газовой динамики в переменных $q$, $t$ имеет вид (1.2)—(1.4), (1.8).

## § 2. Выбор функции $Q$

При построении функции $Q$ приходится учитывать особенности решения рассматриваемой задачи. Так, построение адаптивной сетки для решения задачи Стефана [33] с выделением положения фазовой границы в простейшем случае требует равномерного распределения узлов в каждой фазовой подобласти. Величины пространственных шагов в этих подобластях, как правило, сильно различаются и зависят от скорости движения фазового фронта. Близкое к равномерному распределение узлов на каждый момент времени в обеих подобластях (с неизменным общим количеством на всем отрезке интегрирования по $t$) достигалось при помощи задания функции $Q$ в виде диффузионного потока $Q=-D\partial\psi/\partial q$, где $D$ — коэффициент, величина которого подбирается в ходе расчета.

Существует класс задач, решение которых внутри области или на ее границе характеризуется наличием больших градиентов, требующих для достижения необходимой точности численного решения более мелкой сетки, чем внутри остальной области. Автоматического сгущения сетки можно достичь посредством концентрации в них узлов с помощью функции $Q$, задаваемой в виде

$$Q=-Q_0\frac{\partial}{\partial q}\left(\psi\left|\frac{\partial T}{\partial q}\right|\right).$$

Отток узлов из области слабого изменения решения может привести к сильно неравномерной сетке в этой области. Во избежание этого следует применять механизм разглаживания, для чего в задачах с большими градиентами функция $Q$ задавалась в виде комбинации [33]:

$$Q=-D\frac{\partial\psi}{\partial q}-Q_0\frac{\partial}{\partial q}\left(\psi\left|\frac{\partial T}{\partial q}\right|\right).$$

В задачах, описывающих сложные процессы, вид функции $Q$ должен, по-видимому, определяться доминирующим процессом. Отметим, что в эволюционных задачах вид уравнения, используемого для перестройки сетки, также должен быть эволюционного типа.

Задачи газовой динамики отличаются большим разнообразием решений, и поэтому трудно указать универсальный вид функции $Q$, удовлетворяющий всем задачам. Некоторые способы задания функции $Q$ в задачах газовой динамики рассмотрим на примере решения ряда конкретных задач.

## § 3. Разностная схема

В расчетном пространстве $\Omega_{q,t}$ введем расчетную сетку $\omega$ с постоянным шагом $h$ по переменной $q$ и шагом $\tau$ по переменной $t$:

$$\omega=\{(q_i, t^j),\ (q_{i+1/2}, t^j),\ q_{i+1}=q_i+h,\ q_{i+1/2}=q_i+0.5h,$$

$$t^{j+1}=t^j+\tau,\quad i=0, 1, \ldots, N-1,\quad j=0, 1\ldots\}.$$

На этой сетке система уравнений (1.2)—(1.4), (1.8) аппроксимируется с помощью семейства разностных схем, в которых функции $\psi$, $\rho$, $u$, $p$, $\varepsilon$ вычисляются в полуцелых точках $(q_{i+1/2}, t^j)$, а значения $x$ и $Q$ — в целых точках

$(q_i, t^j)$. Семейство разностных схем имеет вид

$$\frac{\psi_{i+1/2}^{j+1}-\psi_{i+1/2}^{j}}{\tau}=-\frac{Q_{i+1}^{(\sigma)}-Q_i^{(\sigma)}}{h}, \tag{3.1а}$$

$$\frac{(\psi/\rho)_{i+1/2}^{j+1}-(\psi/\rho)_{i+1/2}^{j}}{\tau}=\frac{u_{i+1}^{(\sigma)}-u_i^{(\sigma)}}{h}-\frac{(Q/\rho)_{i+1}^{(\sigma)}-(Q/\rho)_i^{(\sigma)}}{h}, \tag{3.1б}$$

$$\frac{[\psi(\varepsilon+u^2/2)]_{i+1/2}^{j+1}-[\psi(\varepsilon+u^2/2)]_{i+1/2}^{j}}{\tau}=-\frac{(pu)_{i+1}^{(\sigma)}-(pu)_i^{(\sigma)}}{h}- \tag{3.1в}$$

$$-\frac{[Q(\varepsilon+u^2/2)]_{i+1}^{(\sigma)}-[Q(\varepsilon+u^2/2)]_i^{(\sigma)}}{h},$$

$$(x_{i+1}^{j+1}-x_i^{j+1})/h=(\psi/\rho)_{i+1/2}^{j+1}. \tag{3.1г}$$

Значения функций $\psi$, $\rho$, $u$, $p$, $\varepsilon$ в целых узлах определялись по интерполяционным формулам

$$y_i=\frac{\psi_{i+1/2}y_{i-1/2}+\psi_{i-1/2}y_{i+1/2}}{\psi_{i-1/2}+\psi_{i+1/2}}.$$

При $\sigma=0$ и 1 разностная схема (3.1) имеет порядок аппроксимации $O(\tau+h^2)$, при $\sigma=0.5$ — порядок $O(\tau^2+h^2)$. В последующих расчетах использовались схемы (3.1) с $\sigma=0.5$ и 1. Неявные схемы решались с помощью метода простых итераций.

Рассмотрим решение некоторых нестационарных, одномерных по пространству задач газовой динамики. Выбор их определялся стремлением наиболее полно продемонстрировать возможности предлагаемого метода решения.

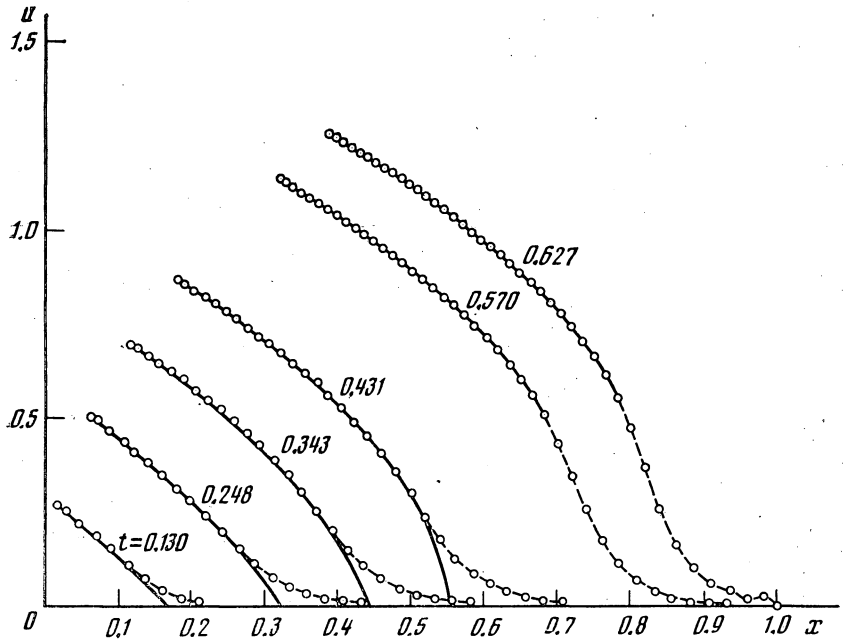
## § 4. Задача о формировании ударной волны

Рассмотрим задачу о зарождении и распространении ударной волны на примере движения ускоряющегося поршня. В момент времени $t=0$ поршень занимает положение $x=0$, а затем вдвигается по закону $x=at^2$, $a>0$, в трубу, заполненную покоящимся политропным газом. В процессе развития волны сжатия градиенты решения в этой зоне увеличиваются и в некоторый критический момент времени $t=t_к$ обращаются в бесконечность. Происходит так называемая градиентная катастрофа, т. е. образование разрыва решения. Момент наступления градиентной катастрофы можно определить по формуле [35]

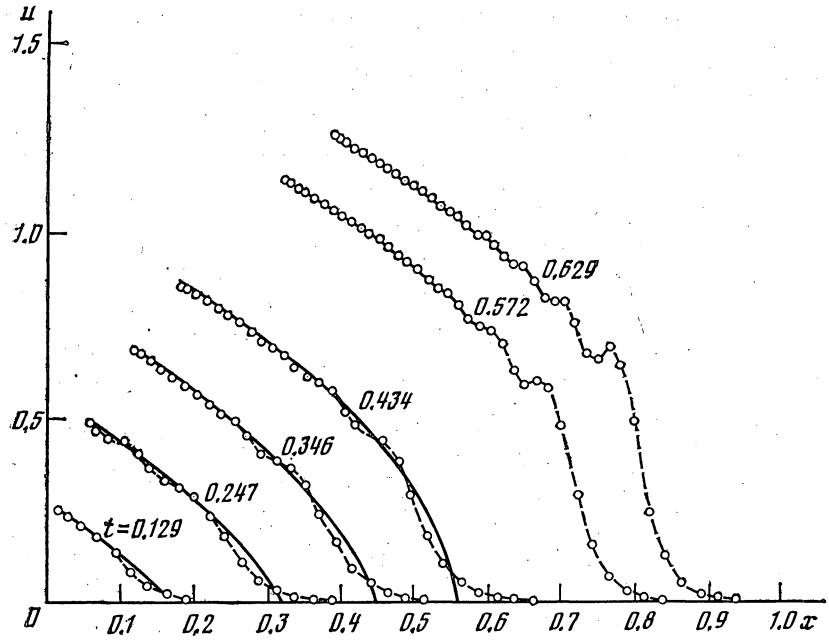
$$t_к=u_c^0/[(\gamma+1)a],$$

где $u_c^0$ — скорость звука в покоящемся газе, $a$ — константа в законе движения поршня. Для $\rho_0=1$, $p_0=1$, $a=1$ время $t_к=0.484$, $\gamma={}^5/_3$.

До момента наступления градиентной катастрофы течение представляет собой простую волну сжатия со слабым разрывом в месте ее соединения с постоянным течением. Была осуществлена попытка определения момента образования разрыва из численного решения системы конечно-разностных уравнений (3.1) с $\sigma=0.5$ и 1 на фиксированной лагранжевой сетке ($Q\equiv0$) с общим числом узлов $N=60$. На фиг. 1, 2 представлены пространственные профили скорости $u$ на различные моменты времени, полученные по неявной разностной схеме ($\sigma=1$) с первым порядком точ-

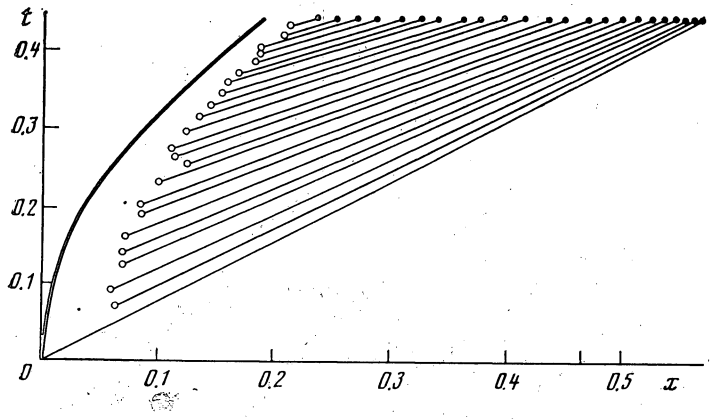



Фиг. 1

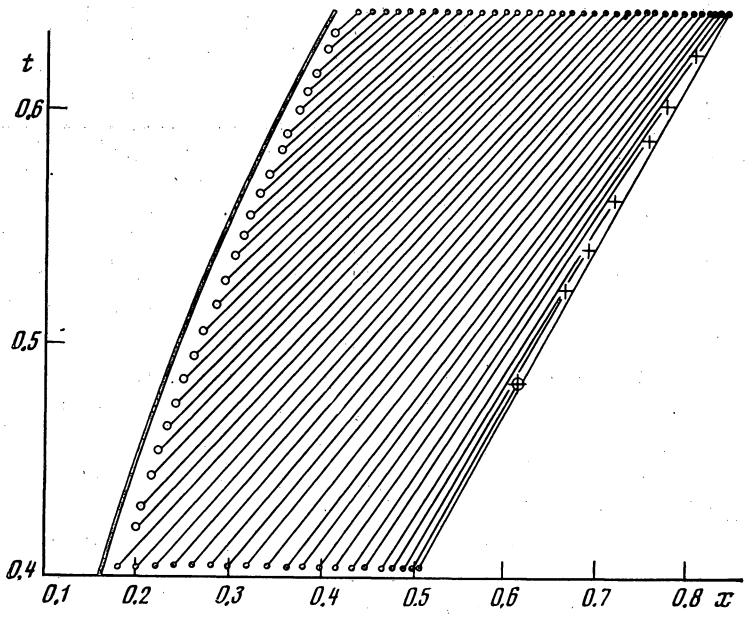



Фиг. 2

ности (фиг. 1) и по схеме со вторым порядком точности ($\sigma=0.5$ фиг. 2). Численное решение показано штриховыми линиями, точное — сплошными. Положение узлов сетки отмечено кружочками. Полученные результаты свидетельствуют о том, что определить момент образования ударной волны из численных расчетов на фиксированной сетке практически невозможно. Решения, полученные по схеме первого порядка (фиг. 1), не передают крутых фронтов из-за большой аппроксимационной вязкости схемы. Схема со вторым порядком дает колебания в области больших градиентов (фиг. 2).




Фиг. 3. $(x-t)$-диаграмма

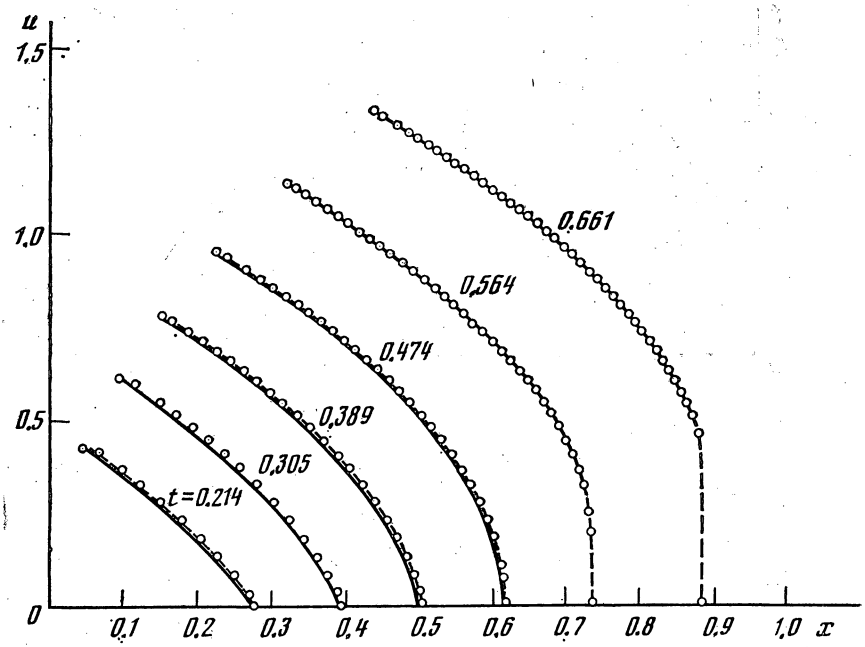



Фиг. 4

Качественное влияние аппроксимационной вязкости на получаемые решения исследовалось с помощью метода дифференциального приближения [36]. Как пример возьмем первое дифференциальное приближение для разностного уравнения движения из системы (3.1) с $\sigma=0.5$:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\psi u)+\frac{\partial p}{\partial q}+\frac{\partial}{\partial q}(Qu)=-\frac{1}{3!}\left[\frac{\tau^2}{4}\frac{\partial^3(p+Qu)}{\partial t^2\,\partial q}+\right.$$
$$\left.+\frac{h^2}{8}\frac{\partial^3(p+Qu)}{\partial q^3}\right]. \tag{4.1}$$

Отметим следующее: колебательный характер поведения $u$ при $Q\equiv 0$ определяется, по-видимому, первым слагаемым в правой части (4.1) Оба слагаемых в правой части являются функциями производных от величин $p+$ $+Qu$ по пространственной координате $q$. Отсюда, вероятно, при решении задачи на адаптивной сетке для узлов желательно задать такой закон движения, при котором производные от величины $p+Qu$ вблизи больших градиентов решения были бы малы. Как известно [37], в решениях задач газовой динамики, представляемых в виде простой волны, все величины —




Фиг. 5

функции только одной величины, которая на характеристиках сохраняет постоянное значение. Естественно выбрать функцию $Q$ такой, чтобы координаты узлов сетки в физическом пространстве двигались вдоль соответствующего семейства характеристик. В рассматриваемой задаче это должно быть семейство $C_+$-характеристик, уравнение которых записывается в виде

$$dx/dt=u+u_c, \tag{4.2}$$

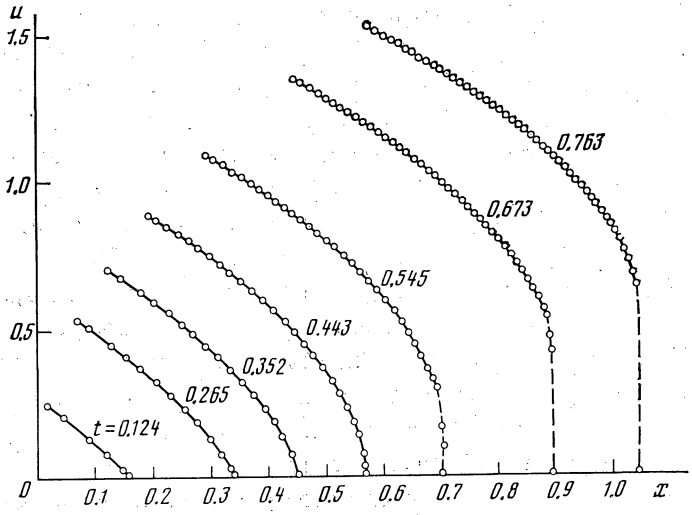
$u_c$ — скорость звука. Сравнение (4.2) с уравнением (1.5) показало, что эйлерова координата узла $x$ движется вдоль $C_+$-характеристики, если выбрано

$$Q=-\rho u_c. \tag{4.3}$$

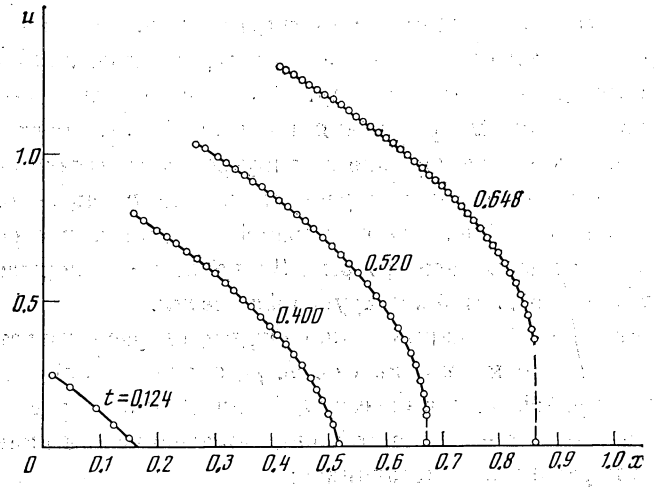
Момент перехода волны сжатия в ударную волну можно определить, руководствуясь следующими соображениями. Из метода характеристик [37] известно, что градиентная катастрофа в простой волне сжатия означает пересечение двух характеристик соответствующего семейства. В рассматриваемой задаче при выборе потока $Q$ в виде (4.3) каждый узел сетки должен двигаться вдоль $C_+$-характеристики. Тогда положение и момент образования разрыва будет определяться обращением в нуль величины $\psi$ в ячейке между двумя пересекающимися характеристиками. Расчеты подтвердили высказанные предположения. Результаты их представлены на фиг. 3—7.

Образование ударной волны и процесс ее дальнейшего распространения связаны с рядом важных аспектов.

1. Известно [35], что градиентная катастрофа происходит у основания волны сжатия при пересечении характеристик, одна из которых выходит от поршня в момент $t=0$, т. е из начала координат. При использовании равномерной по $q$ сетки и начальных значениях $\psi_i=1$ такой характеристики в расчетах не окажется, что может привести к заметной погрешности




Фиг. 6




Фиг. 7

в определении значения $t_к$. В наших расчетах при использовании равномерной сетки для аппроксимации характеристики, выходящей от поршня, в первой ячейке первоначальное значение $\psi_1$ выбиралось много меньше, чем в остальных: $\psi_1=10^{-4}$, $\psi_i=1$, $i=2, 3, \ldots, N-1$. Условием образования ударной волны считалось выполнение неравенства $\psi_l \leqslant 0.1$ в некоторой ячейке $l$. В наших расчетах при выбранных $u_c$, $a$, $\gamma$ оно выполнилось в момент времени $t=0.475$, что близко к расчетному $t_к=0.484$, $\Delta t \approx 0.02 t_к$.

2. На границах $q=q_0$ и $q=q_R$ расчетной области $q_0 \leqslant q \leqslant q_R$ должны выполняться граничные условия

$$Q(q_0, t)=Q(q_R, t)=0.$$

Поэтому при выборе перетока массы в виде (4.3) крайняя левая ячейка будет неограниченно расти, а крайняя правая за конечное время схлопнется в точку. Для предотвращения указанных явлений в численном алгоритме был предусмотрен механизм генерации новых ячеек вблизи поршня и уничтожения мелких ячеек на правом конце области. Критерием уничтожения или рождения служило значение величины $\psi$ соответствующей ячейки. В новых ячейках значения $p$ и $u$ определялись с по-

мощью интерполяции. Плотность $\rho$ находилась из требования сохранения энтропии, функция $\psi$ определялась из закона сохранения массы. На фиг. 3, 4 представлены траектории движения узлов сетки. Точками отмечены узлы, используемые в расчетах, генерируемые узлы отмечены кружочками, уничтожаемые — крестиками. Кружочком, внутри которого находится крестик, отмечен момент образования ударной волны (фиг. 4). Первоначальная сетка состояла из минимального числа ячеек, равного двум. Начальные значения функции $\psi$ для этих ячеек отличаются на несколько порядков. К концу расчетов число узлов достигает 40 (фиг. 4).

3. После того как сильный разрыв сформировался, возникает непростой вопрос о способе расчета распространения нестационарной ударной волны. Существуют две возможности выделения области сингулярности решения при расчетах на адаптивных сетках. С достаточной степенью точности пространственно-временной профиль разрыва можно передавать, концентрируя в этой области большое число узлов сетки и не позволяя при этом схлопываться ячейкам. Однако такой путь представляется не совсем рациональным по двум причинам. Во-первых, требуется большое общее число узлов, во-вторых, чрезмерное сгущение сетки по пространственной переменной может вызвать существенное уменьшение шага интегрирования по времени. В результате возникает вопрос об эффективности метода.

Более перспективным представляется второй путь, когда особенности решения выделяются в явном виде по типу решения задачи Стефана [34], в которой разрыв помещается в узел сетки. На разрыве выписываются граничные условия в виде законов сохранения, один из которых позволяет установить поток массы через разрыв. Значение этого потока использовалось затем для построения адаптирующейся сетки.

Выделение сильного разрыва означает, что он располагается в некотором узле $i=l$, в котором величины $\rho_l$, $u_l$, $p_l$, $\varepsilon_l$ слева и справа от узла различны. На этом разрыве, как известно, должны выполняться соотношения Гюгонио. В расчетном пространстве они записывались в виде, исключающем появление разностных источников:

$$u_2-Q/\rho_2=u_1-Q/\rho_1, \qquad p_2+Qu_2=p_1+Qu_1,$$

$$p_2u_2+Q(\varepsilon_2+u_2^2/2)=p_1u_1+Q(\varepsilon_1+u_1^2/2).$$

Здесь индексы 1 и 2 обозначают величины перед и за ударной волной соответственно.

Численные расчеты оказались устойчивыми, когда на поверхность разрыва экстраполировались значения из области постоянного течения $\rho_1$, $u_1$, $\varepsilon_1$ и одна из величин, например $u_2$, — из области за фронтом ударной волны. После образования ударной волны, положению фронта которой соответствует фиксированный узел расчетной сетки, справа и слева от него происходило уничтожение ячеек по методике, описанной выше.

4. Остановимся на вопросе о связи между выбором $Q$ и разностной схемы. Известно [1] — [3], что на фиксированных сетках неявные схемы первого порядка точности интенсивно размазывают слабые разрывы в газодинамическом течении. Схемы второго порядка, как правило, приводят к появлению паразитических осцилляций решения.

Использование адаптивных сеток, динамически связанных с решением, существенным образом меняет эти качества разностных схем. Расчеты по схеме (3.1) первого порядка точности ($\sigma=1$, фиг. 5) и по схемам второго

порядка точности ($\sigma=0.5$, фиг. 6) показали, что в обоих случаях практически исчезают эффекты размазывания и осцилляции. Отличие численных решений от точных не превышало $1\div2\%$. Точное решение показано сплошными линиями, численное — штриховыми, положение и количество используемых узлов отмечено кружочками. Сравнение показало, что обе схемы дают мало различающиеся результаты. В обоих случаях с одинаковой точностью определялся момент возникновения сильного разрыва. Обе схемы четко передают область разрыва, используя при этом не более 40 узлов.

Чтобы убедиться, что все это свойственно и другим разностным схемам, для сравнения в расчетах использовалась одна из широко распространенных схем типа предиктор-корректор — схема Лакса — Вендроффа [1]. Результаты, полученные по этой схеме, показаны на фиг. 7. Как качественно, так и количественно они практически не отличаются от результатов, полученных по схемам (3.1).

Таким образом, можно сделать вывод, что применение для решения задач газовой динамики метода, основанного на использовании адаптивных сеток, снижает требования к разностным схемам.

Исследование других качеств предлагаемого метода проводилось на примере задач, допускающих автомодельные решения.

## § 5. Задача о распространении ударной волны по фону с экспоненциально возрастающей плотностью

На примере этой задачи [38] выполним дополнительное экспериментальное исследование точности численного решения, получаемого на сетке, построенной с помощью механизмов генерации и адаптации узлов, описанных в § 4.

В начальный момент времени $t=t_0$ значения газодинамических функций имеют вид [16]

$$u(x,t_0)=\begin{cases}0, & x\geqslant x_0,\\ \Delta(1-\xi_0)/t_0, & x\leqslant x_0,\end{cases}$$

$$\varepsilon(x,t_0)=\begin{cases}0, & x\geqslant x_0,\\ 0.5(\Delta/t_0)^2(1+2\xi_0), & x\leqslant x_0,\end{cases}$$

$$\rho(x,t_0)=\begin{cases}\rho_0\exp[(x-x_0)/\Delta], & x\geqslant x_0,\\ 3\rho_0(1+2\xi_0)^{-5/2}, & x\leqslant x_0.\end{cases}$$

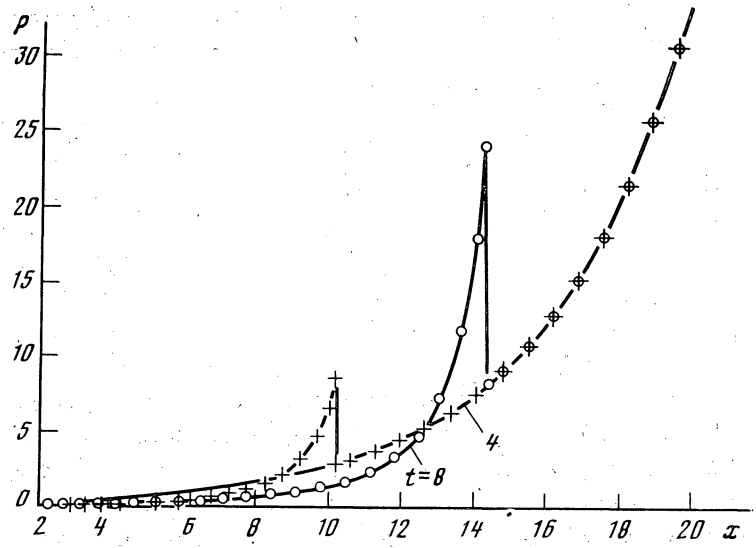
Здесь $\xi_0=(x_0-x)/\Delta$, $x_0$ — положение разрыва в момент $t_0$, $\rho_0$ — невозмущенная фоновая плотность при $x=x_0$, $\Delta$ — характерный масштаб ширины импульса.

Автомодельное решение при $t>t_0$ имеет вид

$$u(x,t)=\begin{cases}0, & x\geqslant x_F(x),\\ \Delta(1-\xi)/t, & x\leqslant x_F(t),\end{cases}$$

$$\varepsilon(x,t)=\begin{cases}0, & x\geqslant x_F(t),\\ 0.5(\Delta/t)^2(1+2\xi), & x\leqslant x_F(t),\end{cases}$$

$$\rho(x,t)=\begin{cases}\rho_0\exp[(x-x_0)/\Delta], & x\geqslant x_F(t),\\ 3\rho(x_F)(1+2\xi)^{-5/2}, & x\leqslant x_F(t).\end{cases}$$




Фиг. 8

Здесь $x_F(t)=x_0+1.5\Delta \ln (t/t_0)$ — положение фронта в момент $t$, $\xi=[x_F(t)-x]/\Delta$. Числовые значения параметров следующие: $t_0=2$, $x_0=6$, $\rho_0=1$, $\Delta=4$, $\gamma=2$.

На фиг. 8 результаты расчетов по указанной выше методике с рождением и уничтожением ячеек как вблизи границ области, так и в окрестности фронта ударной волны представлены для первого случая: в начальный момент сетка состояла из 31 узла, причем в области, охваченной движением, 11 узлов (+ — для $t=4$, 0 — для $t=8$). Во втором случае общее число узлов в начальный момент 61, из них 41 узел приходится на область $x\leqslant x_0$. В обоих случаях ошибка в определении плотности не превышала 5%. Для сравнения отметим, что в [16] для аналогичных расчетов использовались сетки с общим числом узлов $N=37\div150$.

## § 6. Задача о распаде сильного разрыва

Среди решений системы уравнений газовой динамики встречаются содержащие либо ударную волну (индекс у.в.), либо контактный разрыв (индекс к.р.). В задаче о распаде сильного разрыва присутствуют одновременно оба вида разрывов, движущихся с постоянными скоростями. Различными авторами [16], [39], [40] эта задача широко использовалась для анализа качества разностных схем.

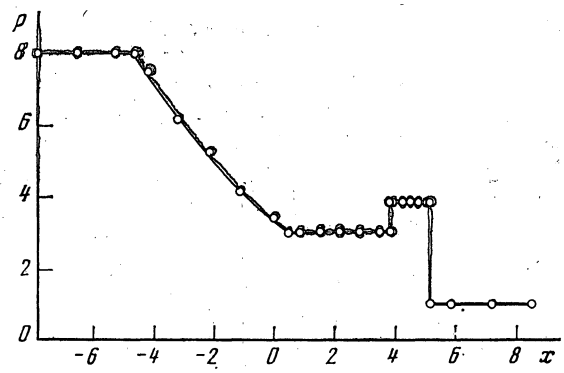
Сформулируем задачу в следующем виде: при $t=0$ положим $p_л=480$, $\rho_л=8$, $u_л=0$, $p_п=1$, $\rho_п=1$, $u_п=0$, где индексами «л» и «п» отмечены значения справа и слева от разрыва в точке $x=0$. Рассматриваемая задача является автомодельной по переменной $\xi=x/t$. Автомодельные координаты разрывов имеют следующий вид: $\xi_л=-10$, $\xi_п=1.0933$, $\xi_{к.р}=8.32$, $\xi_{у.в.}=11.24$ ($\gamma={}^5/_3$).

Точное решение в областях I—IV описывается таким образом:

| область | I | II | III | IV | V |
|---|---|---|---|---|---|
| $\rho$ | 8 | $(2-u/15)^3$ | 3,0193 | 3.85 | 1 |
| $u$ | 0 | $0.75(\xi+10)$ | 8.32 | 8.32 | 0 |
| $p$ | 480 | $15\rho^{5/3}$ | 94.52 | 94.52 | 1 |

При численных расчетах в каждой из областей I—V выбиралось по 5 ячеек. В области II узлы сетки двигались по $C_-$-характеристикам, т. е. по-

ток $Q$ выбирался в виде $Q=\rho u_c$. В областях кусочно-постоянных решений выбирался диффузионный механизм расталкивания узлов: $Q=-D_0\partial\psi/\partial q$. На фиг. 9 представлены профили плотности на момент времени $t=0.46$. Сплошная линия — точное решение, кружочки — численное решение. Количество и положение маркеров соответствует количеству и положению




Фиг. 9

узлов сетки. Максимальная погрешность наблюдалась в области волны разрежения и составила 0.5%.

## Заключение

Анализ решения ряда хорошо известных тестовых задач (§ 4—6) позволяет сформулировать следующие утверждения.

Предложен конечно-разностный метод решения нестационарных, одномерных по пространству задач газовой динамики. Метод основывается на использовании адаптирующихся сеток, получаемых преобразованием координат, которое определяется искомым решением.

На основе предложенного метода построен эффективный вычислительный алгоритм, позволяющий существенно повысить точность расчетов (погрешность по отношению к точному решению для различных задач составляет 1—5%) при одновременном уменьшении общего числа узлов сетки в 2—5 раз по сравнению с другими методами.

Метод позволяет с большой точностью определять местоположение и момент образования разрывных решений.

С помощью метода можно производить практически точное выделение фронтов сильных, слабых и контактных разрывов.

Метод экономичен, позволяет легко вводить механизм генерации узлов.

Метод снижает требования к качеству разностных схем. Использование в нем адаптивных сеток, динамически связанных с решением, приводит к снижению аппроксимационной вязкости и к подавлению паразитических осцилляций.

Эффективность предлагаемого метода можно повысить с помощью различных оптимизационных процедур, которые в данной работе не производились.

## Литература


1. *Рихтмайер Р., Мортон К.* Разностные методы решения краевых задач. М.: Мир, 1972.
2. *Самарский А. А., Попов Ю. П.* Разностные методы решения задач газовой динамики. М.: Наука, 1980.

3. *Шульц В. Д.* Двумерные конечно-разностные гидродинамические уравнения в переменных Лагранжа // Вычисл. методы в гидродинамике. М.: Мир, 1972. С. 9–54.
4. *Батлер Р.* Развитие метода LING // Числ. методы в механ. жидкостей. М.: Мир, 1973. С. 146–155.
5. *Кроули У.* FLAG – свободно-лагранжев метод для численного моделирования гидродинамических течений в двух измерениях // Числ. методы в механ. жидкостей. М.: Мир, 1973. С. 135–145.
6. *Белоцерковский О. М.* Численное моделирование в механике сплошных сред. М.: Наука, 1984.
7. *Пасконов В. М.* Разностные схемы на самоорганизующемся множестве расчетных точек в двумерных односвязных областях произвольной формы // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1971. Т. 11. № 3. С. 776–782.
8. *Thompson J. F., Thames F. S., Mastin C. W.* Automatic numerical generation of body-fitted curvilinear coordinate system for field containing any number of arbitrary two-dimensional bodies // J. Comput. Phys. 1974. V. 15. P. 229–319.
9. *Steger J. L.* Implicit finite-difference simulation of flow about arbitrary two-dimensional geometrics // AIAA Journal. 1978. V. 16. № 7. P. 679–686.
10. *Hindman R. G., Kutler P., Anderson D.* Two-dimensional unsteady Euler equation solver for arbitrary Shaped flow region // AIAA Journal. 1981. V. 19. № 4. P. 424–431.
11. *Годунов С. К., Забродин А. В., Иванов М. Я. и др.* Численное решение многомерных задач газовой динамики. М.: Наука, 1976.
12. *Белоцерковский О. М., Грудницкий В. Г., Рыгалин В. Н.* Выделение разрывов при расчете одномерных нестационарных течений газа // Докл. АН СССР. 1983. Т. 272. № 1. С. 49–52.
13. *Hirt G. W., Amsden A. A., Cool J. L.* An arbitrary lagrangian-eulerian computing method for all flow speeds // J. Comput. Phys. 1974. V. 14. P. 227–253.
14. *Волкова Р. А., Круглякова Л. В., Мышецкая Е. Е. и др.* Программа ATLANT решения двумерных задач управляемого лазерного синтеза. М.: ИПМатем. АН СССР, 1985.
15. *Головизнин В. М., Самарский А. А., Фаворский А. П.* Вариационный принцип получения уравнений магнитной гидродинамики в смешанных эйлерово-лагранжевых переменных // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1981. Т. 21. № 2. С. 409–422.
16. *Головизнин В. М., Рязанов М. А., Самарский А. А. и др.* Разностные схемы газовой динамики со сбалансированными конвективными потоками // Вычисл. методы в матем. физ. М.: Изд-во МГУ, 1986. С. 5–41.
17. *Колдоба А. В., Кузнецов О. А., Повещенко Ю. А., Попов Ю. П.* Об одном подходе к расчету задач газовой динамики с переменной массой квазичастицы: Препринт № 57. М.: ИПМатем. АН СССР, 1985. 14 с.
18. *Повещенко Ю. А., Попов Ю. П.* Некоторые задачи газовой динамики при наличии источников // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1978. Т. 18. № 4. С. 1048–1056.
19. *Колдоба А. В., Кузнецов О. А., Повещенко Ю. А. и др.* Полностью консервативные разностные схемы для уравнений механики сплошной среды в квазилагранжевых переменных при наличии гравитационных и магнитогидродинамических процессов: Препринт № 55. М.: ИПМатем. АН СССР, 1985. 41 с.
20. *Волосевич П. П., Дарьин Н. А., Карпов В. Я., Круковский А. Ю.* К расчету задач магнитной гидродинамики со стоками массы в квазилагранжевых координатах: Препринт № 7. М.: ИПМатем. АН СССР, 1984. 21 с.
21. *Thompson J. F.* Numerical grid generation. N. Y.: North-Holland, 1982.
22. *Thompson J. F.* Grid generation techniques in computation fluid dynamics // AIAA Journal. 1984. V. 22. № 11. P. 1505–1523.
23. *Thompson J. F., Warsi Z. U. A., Mastin C. W.* Boundary fitted coordinate system for numerical solution of partial differential equations.– A review // J. Comput. Phys. 1982. V. 47. P. 1–108.
24. *Gelinas R. J., Doss S. K., Miller K.* The moving finite element method: applications to general partial differential equations with multiple large gradients // J. Comput. Phys. 1981. V. 40. P. 202–249.
25. *Cook A. E., Duncan R.* A node-moving algorithm with application to Burger's equation and the Moltz problem // Appl. Math. Moddelling. 1982. V. 6. P. 463–466.
26. *Ковеня В. М., Яненко Н. Н.* Разностная схема на подвижных сетках для решения

уравнений вязкого газа // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1979. Т. 19. № 1. С. 174–188.
27. *Bell J. B., Shubin G. R.* An adaptive grid finite difference method for conservation laws // J. Comput. Phys. 1983. V. 52. P. 569–591.
28. *Дегтярев Л. М., Дроздов В. В.* Адаптирующиеся к решению сетки в эллиптических задачах на плоскости // Дифференц. ур-ния. 1984. Т. 20. № 7. С. 1194–1203.
29. *Rai M. M., Anderson D.* Application of adaptive grid to fluid-flow problems with asymptotic solutions // AIAA Journal. 1982. V. 20. № 4. P. 469–502.
30. *Дегтярев Л. М., Дроздов В. В., Иванова Т. С.* Метод адаптивных к решению сеток в одномерных краевых задачах с пограничным слоем: Препринт № 164. М.: ИПМатем. АН СССР, 1986. 26 с.
31. *Dwyer H. A., Kee R. J., Sanders B. R.* Adaptive grid method for problems in fluid mechanics and heat transfer // AIAA Journal. 1980. V. 18. № 10. P. 1205–1212.
32. *Winkler K.-H. A., Norman M. L., Newman M. J.* Adaptive mesh techniques for fronts in star formation // Max-Planck Inst. Astron. und Astrophys. Inst. Astrophys. MPA-93. Oktober, 1983. 41 p.
33. *Дарьин Н. А., Мажукин В. И.* Метод построения адаптивных сеток для одномерных краевых задач: Препринт № 33. М.: ИПМатем. АН СССР, 1987. 26 с.
34. *Дарьин Н. А., Мажукин В. И.* Математическое моделирование задачи Стефана на адаптивной сетке // Дифференц. ур-ния. 1987. Т. 23. № 7. С. 1154–1159.
35. *Овсянников Л. В.* Лекции по основам газовой динамики. М.: Наука, 1981.
36. *Шокин Ю. И.* Метод дифференциального приближения. Новосибирск: Наука, 1979.
37. *Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н.* Системы квазилинейных уравнений. М.: Наука, 1968.
38. *Зельдович Я. Б., Райзер Ю. П.* Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. М.: Наука, 1966.
39. *Boris J. P., Book D. L., Hain K.* Flux-corrected transport. II a: Generalization of the method // J. Comput. Phys. 1975. V. 18. P. 248–283.
40. *Жмакин А. И., Фурсенко А. А.* Об одной монотонной разностной схеме сквозного счета // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1980. Т. 20. № 4. С. 1021–1031.

Поступила в редакцию 14.VII.1987
Переработанный вариант 15.I.1988