



**Ордена Ленина**  
**ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ**  
**имени М.В. Келдыша**  
**Академии наук СССР**

**Н.А. Дарьин, В.И. Мажукин, А.А. Самарский**

**КОНЕЧНО - РАЗНОСТНЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ**  
**НЕСТАЦИОНАРНЫХ ДВУМЕРНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ**  
**НА АДАПТИВНОЙ СЕТКЕ,**  
**ДИНАМИЧЕСКИ СВЯЗАННОЙ С РЕШЕНИЕМ**

**Препринт № 117 за 1987г.**

**Москва**

ОРДЕНА ЛЕНИНА

ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ ИМ.М.В.КЕЛДЫША АКАДЕМИИ НАУК СССР

Н.А.Дарьин, В.И.Мажукин, А.А.Самарский

КОНЕЧНО-РАЗНОСТНЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ НЕСТАЦИОНАРНЫХ  
ДВУМЕРНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ НА АДАПТИВНОЙ СЕТКЕ,  
ДИНАМИЧЕСКИ СВЯЗАННОЙ С РЕШЕНИЕМ

Москва 1987 г.

Рассмотрен один из возможных методов построения адаптивных сеток, динамически связанных с решением, применительно к нестационарным двумерным задачам.

Возможности метода продемонстрированы на примере задач, допускающих решения типа пограничного слоя.

## Введение.

Построение адаптивных сеток для многомерных задач математической физики является актуальной проблемой математического моделирования, ввиду ряда явных преимуществ, получаемых при их использовании. Одним из них является резкое увеличение точности численного решения без увеличения общего числа узлов сетки.

При решении многомерных стационарных [1,2] и нестационарных задач [2,3] наибольшее распространение, по-видимому, получил вариационный принцип построения адаптивных к решению сеток и его различные модификации [4], см. также обзоры [5,6]. В основе методов, использующих вариационный принцип построения адаптивных сеток, лежит задача минимизации одной или нескольких характеристик искомого численного решения, требующая определения экстремумов некоторых функционалов. Одним из основных преимуществ вариационного принципа построения расчетных сеток является наличие возможности разумного компромисса между противоречивыми требованиями к сетке, такими как ортогональность, гладкость линий и существенная неравномерность в определенных областях [7].

Другим направлением в этой области является построение адаптивных сеток, динамически связанных с решением [6]. Известно несколько эмпирических подходов, использующих в процессе построения информацию о численном решении [8-10]. В работе [8] в качестве управляющего параметра выбиралась норма погрешности аппроксимации в [9,10] - скорость изменения решения. При этом в работах [9,10] осуществлялась локально одномерная адаптация сетки.

Принципы построения адаптивных сеток, динамически связанных с решением как для одномерных, так и для многомерных задач, впрочем как и сама терминология, в настоящее время не являются до конца установившимися. В определение адаптивных сеток, динамически связанных с решением, разными авторами вкладывается различный смысл. В указанных подходах [8-10] процедура динамического распределения узлов сетки не обязательно жестко связана с решением задачи. Движение узлов под влиянием одной из характеристик численного решения оказывается в целом не до конца согласованным с решением, и в силу этого расстановка узлов производится не на каждом шаге интегрирования по времени, а через несколько [9]. Адаптация на каждом временном шаге, при определенных условиях, приводит к связанным колебаниям решения и расчетной сетки.

В то же время применение подвижных конечных элементов к ре-

шению ряда модельных одномерных задач [11, 12]. показало, что объединение в единый алгоритм процедур численного определения координат узлов и сеточных функций позволяет существенно повысить точность решения по сравнению с другими методами.

В настоящей работе излагается более общий подход к построению адаптивных сеток, динамически связанных с решением, для нестационарных двумерных задач математической физики, являющийся обобщением метода решения нестационарных одномерных краевых задач [13].

## 2. ПРИНЦИП ПОСТРОЕНИЯ

Принцип построения адаптивных сеток, динамически связанных с решением, определим как способ построения, при котором определение сеточных функций и координат узлов неразрывно взаимосвязано. Тесная взаимосвязь между искомым решением и определением самой сетки вводится на уровне дифференциальной модели, представляющей собой в общем случае нелинейную систему уравнений в частных производных. В этой системе часть уравнений описывает непосредственно исследуемое явление, а вторая часть — динамику расчетной сетки, определяемую динамикой искомого решения. В предельных случаях из этих уравнений получаются сетки либо в эйлеровых, либо в лагранжевых переменных.

Как и в других методах построения расчетных сеток [8, 9, 14] в качестве исходной системы используется декартова система координат  $x, y, t$ , в которой производится математическая формулировка исследуемого явления, т.е. постановка задачи. Затем с помощью преобразования общего вида

$$\xi = \xi(x, y, t), \quad \eta = \eta(x, y, t), \quad \tau = t$$

физическая плоскость отображается на прямоугольник в плоскости криволинейных координат  $\xi, \eta$  рис. I.\*

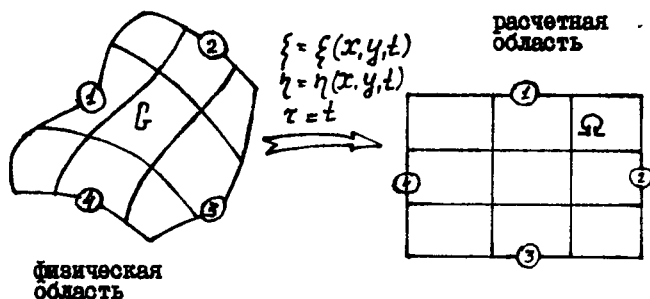


Рис. I

В криволинейных координатах математическая постановка задачи приобретает более сложный вид, поскольку в уравнениях появляются дополнительные члены с множителями в виде метрических коэффициентов  $x_1, x_2, y_1, y_2$ . Тем не менее, несмотря на то, что преобразованные уравнения несколько сложнее исходных, процесс решения их обладает рядом существенных преимуществ:

1) Возможность отображения физической плоскости с криволинейной границей в прямоугольную область, позволяет строить и использовать в расчетах ортогональные сетки равномерные или неравномерные по одному или обоим направлениям (что определяется индивидуальными особенностями рассматриваемых задач) с неменяющимися во времени шагами  $h_1, h_2$  рис. I.

2) Для вычисления метрических коэффициентов и якобиана преобразования  $\Psi$  необходимо знание значений координат  $x, y$  на каждый момент времени. С этой целью преобразованная система уравнений дополняется уравнениями, описывающими траекторию движения узлов сетки  $x_{i_j}(t), y_{i_j}(t)$ . Тем самым появляется возможность концентрации узлов в эйлеровом пространстве вблизи

ж) Отображение областей сложной геометрической формы представляет самостоятельный интерес, ему посвящен ряд работ, см. например [15, 16], и выходит за рамки рассмотрения данной работы.

особенностей решения.

3) Основное отличие и преимущество предлагаемого метода адаптации от рассматривавшихся ранее состоит в предложении более общего и универсального способа задания уравнений движения узлов сетки. Для двумерных нестационарных задач вводится два уравнения в частных производных, позволяющих производить преобразование координат с помощью функций  $Q$  и  $P$ , конструкция которых в общем случае произвольна. Конкретный вид данных функций определяется особенностями решения и допускает большую свободу выбора.

### § 3. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В произвольной области  $G \{x, y\}$  рассмотрим нестационарное уравнение параболического типа, допускающее при определенных условиях решение типа пограничного слоя

$$(1) \quad \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= - \frac{\partial W_1}{\partial x} - \frac{\partial W_2}{\partial y} - u, \\ W_1 &= -\lambda \frac{\partial u}{\partial x}, \quad W_2 = -\lambda \frac{\partial u}{\partial y}. \end{aligned}$$

Используя преобразование общего вида

$$\xi = \xi(x, y, t), \quad \eta = \eta(x, y, t), \quad \tau = t,$$

перейдем к криволинейным координатам  $\xi, \eta, \tau$ , в которых уравнение (1) запишется следующим образом:

$$(2) \quad \begin{aligned} \frac{\partial(\psi u)}{\partial \tau} &= - \frac{\partial}{\partial \xi} \left[ (W_1 - u \frac{\partial x}{\partial \tau}) \frac{\partial y}{\partial \eta} - (W_2 - u \frac{\partial y}{\partial \tau}) \frac{\partial x}{\partial \eta} \right] - \\ &- \frac{\partial}{\partial \eta} \left[ - (W_1 - u \frac{\partial x}{\partial \tau}) \frac{\partial y}{\partial \xi} + (W_2 - u \frac{\partial y}{\partial \tau}) \frac{\partial x}{\partial \xi} \right] - \psi u; \end{aligned}$$

где  $\Psi$  - якобиан перехода,<sup>7</sup>  $w_1$ ,  $w_2$  - потоки тепла, имеющие вид:

$$\Psi = \frac{\partial x}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial y}{\partial \xi},$$

$$(3) \quad w_1 = - \frac{\lambda}{\Psi} \left( \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial u}{\partial \eta} \right),$$

$$w_2 = - \frac{\lambda}{\Psi} \left( \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial u}{\partial \eta} \right).$$

Введем обозначения

$$(4) \quad \begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial t} &= -a, \\ \frac{\partial y}{\partial t} &= -p. \end{aligned}$$

Тогда уравнение (3) запишется в виде

$$(5) \quad \begin{aligned} \frac{\partial(\Psi u)}{\partial t} &= - \frac{\partial}{\partial \xi} \left[ (w_1 + uQ) \frac{\partial y}{\partial \eta} - (w_2 + uP) \frac{\partial y}{\partial \eta} \right] - \\ &- \frac{\partial}{\partial \eta} \left[ -(w_1 + uQ) \frac{\partial y}{\partial \xi} + (w_2 + uP) \frac{\partial x}{\partial \xi} \right] - \Psi u. \end{aligned}$$

Для определения значений якобиана  $\Psi$  и метрических коэффициентов  $\partial x / \partial \xi$ ,  $\partial y / \partial \xi$ ,  $\partial x / \partial \eta$ ,  $\partial y / \partial \eta$  необходимо знать текущие значения  $x$  и  $y$ , которые можно определить из уравнений (4) при условии, что функции  $Q$  и  $P$  известны.



## Выбор функций $Q$ и $P$

Конкретный вид функций  $Q$  и  $P$  определяется из соображений эффективного использования расчетной сетки. В рамках сформулированной задачи (I), (6) это означает, что для решения желательно иметь сетку с динамическим распределением узлов, концентрирующихся в областях сильного изменения решения и квазиравномерно распределяющихся в остальных. Достичь указанных целей представляется возможным посредством задания функций  $Q$  и  $P$ , например, в виде

$$(6) \quad \begin{aligned} Q &= -[D_0 (\frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 x}{\partial \eta^2})] - \{C_0 \Psi \frac{\partial}{\partial \xi} [\Psi^2 ((\frac{\partial u}{\partial \xi})^2 + (\frac{\partial u}{\partial \eta})^2)^{\frac{1}{2}}]\}, \\ P &= -[D_0 (\frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2})] - \{C_0 \Psi \frac{\partial}{\partial \eta} [\Psi^2 ((\frac{\partial u}{\partial \xi})^2 + (\frac{\partial u}{\partial \eta})^2)^{\frac{1}{2}}]\} \end{aligned}$$

Первые члены в квадратных скобках выполняют роль расталкивающих сил, вторые - сжимающих.  $D_0, C_0$  - константы, подбираемые в ходе расчетов.

### 4. РАЗНОСТНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ

I. Построение расчетной сетки. В преобразованной плоскости  $\Omega_{\xi, \eta}$  введем расчетную сетку с равномерными по каждому направлению шагами  $h_1$  и  $h_2$ , рис. 2

$$\omega_h = \left\{ \begin{aligned} &(\xi_i, \eta_j) \\ &\xi_i = \xi_{i-1} + h_1, \quad i = 1, 2, \dots, N; \quad h_1 = \frac{\xi_N}{N} \\ &\eta_j = \eta_{j-1} + h_2, \quad j = 1, 2, \dots, M; \quad h_2 = \frac{\eta_M}{M} \end{aligned} \right\}$$

Сетка по переменной  $t$  определяется обычным образом:

$\omega_t = \{t_n; t_{n+1} = t_n + \tau_n, n = 0, 1, \dots\}$ . В криволинейной системе координат шаги сетки  $h_1, h_2$  не зависят от времени и первоначально заданная ортогональная сетка остается неизменной. В физическом пространстве соответствующие координаты узлов  $x, y$  с течением времени изменяются в зависимости от поведения решения. Текущие значения  $x_{i,j}(t), y_{i,j}(t)$  определяются с помощью уравнений (5), (6) на каждом временном слое  $t_n$ .

$$W_{i,j+\frac{1}{2}} = -\frac{\lambda}{\Psi_{i,j+\frac{1}{2}}^n h_x h_z} [(y_{i,j+1}^n - y_{i,j}^n)(u_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^n - u_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^n) - (y_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^n - y_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^n)(u_{i,j+1}^n - u_{i,j}^n)];$$

$$\frac{x_{i,j}^{n+1} - x_{i,j}^n}{\tau} = -Q_{i,j}^n;$$

$$\frac{y_{i,j}^{n+1} - y_{i,j}^n}{\tau} = -P_{i,j}^n.$$

В узлах сетки определялись функции  $x_{i,j}^n$ ,  $y_{i,j}^n$ ,  $Q_{i,j}^n$ ,  $P_{i,j}^n$ . В центре ячеек — функции  $u_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^n$ ,  $\Psi_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^n$ . В серединах ребер ячеек определялись потоковые величины  $w_{i+\frac{1}{2},j}^n$ ,  $w_{i,j+\frac{1}{2}}^n$ ,  $w_{2i+\frac{1}{2},j}^n$ ,  $w_{2i,j+\frac{1}{2}}^n$ . Необходимое интерполирование выполнялось по формулам линейной интерполяции.

## § 5. РЕЗУЛЬТАТЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ

Математическая модель (4)–(7) использовалась для моделирования нескольких вариантов задачи, допускающих решение типа пограничного слоя. В исследованиях ставилась цель демонстрации принципиальной возможности двумерной адаптации расчетной сетки. Для этого рассматривались варианты с наиболее неблагоприятными для метода условиями.

Вариант I. Для уравнения (I) рассмотрим следующую краевую задачу:

$$\begin{aligned} u(x, y, 0) &= u_0, & u(x_0, y, t) &= u_1, & u(x, y_0, t) &= u_0, \\ 0 < x < 1, & & u(x_N, y, t) &= u_0, & u(x, y_M, t) &= u_1, \\ 0 < y < 0.5. & & & & & \end{aligned}$$

Вдоль левой вертикальной  $\xi = \xi_0$  и верхней горизонтальной  $\eta = \eta_M$  границ  $\Omega$  функция  $u$  задавалась  $u(\xi_0, \eta) = u(\xi, \eta_M) = 1$ , на двух других  $u(\xi_M, \eta) = u(\xi, \eta_0) = 0$ . В остальной области, в момент времени  $t = 0$  полагалось  $u(\xi, \eta) = 0$ .

Малый параметр  $\lambda$  задавался равным  $10^{-3}$ .

В расчетной области  $\Omega : \{ [0,1] \times [0,0.5] \}$  выбиралась сетка с равномерным распределением узлов. По каждому направлению сетка имела постоянный шаг  $h_1 = 0,1$ ,  $h_2 = 0,05$ . При таком выборе  $h_1$  и  $h_2$  общее число узлов равнялось  $(10 \times 10)$ . Характерный размер пограничного слоя приблизительно можно оценить из соотношения  $\ell \sim (\lambda)^{1/2} \approx (10^{-3})^{1/2} \approx 3.33 \cdot 10^{-2}$ . Таким образом, рассматривается довольно неблагоприятный случай, когда пространственные шаги по каждому направлению превосходили характерные размеры пограничного слоя  $h_1, h_2 > \ell$ .

Задание граничных значений  $u$ , отличных от нуля, в виде уголка приводит к тому, что область существенно неоднородного решения находится в левом верхнем углу. При смещении вправо или вниз на несколько шагов установившееся решение вдоль каждого направления носит одномерный характер. В виду того, что размеры рассматриваемой области много больше характерных размеров пограничных слоев, область изменения решения представляет собой узкую полосу вдоль границ  $\xi = \xi_0$  и  $\eta = \eta_N$ . В большей части области, примыкающей к правому нижнему углу, решение остается практически неизменным, т.е.  $u(\xi, \eta, t) = 0$ . Для того, чтобы достаточно подробно передать структуру решения в такой области, необходимо использовать сетки с мелкими шагами  $h_1, h_2 \ll \ell$ . Однако, при любом способе измельчения расчетных сеток, степень их полезного использования уменьшается.

Решить подобную проблему без существенного увеличения общего количества узлов можно с помощью адаптивной сетки, динамически связанной с решением. Расчеты производились на фиксированных сетках с общим числом узлов  $(10 \times 10)$  Рис.2 и  $(20 \times 10)$  рис.4 и на адаптивных с тем же числом узлов, Рис.3,5. Расчеты велись до полного установления профиля  $u$ , а затем сравнивались либо между собой, табл. I, либо с точным решением, табл. II. В этих таблицах приведены значения  $u_{ij}$  вдоль направления  $\eta$  при двух фиксированных значениях  $\xi$  вблизи левой границы  $\xi = \xi_2$ , табл. I, и в середине области  $\xi = \xi_5$ , табл. II. На рис.2 ячейки, в которых производится сравнение, отмечены цифровыми индексами. Из сравнения результатов, полученных на фиксированных и адаптивной сетках, следует, что при использовании фиксированных сеток с числом узлов  $(10 \times 10)$  и  $(20 \times 10)$  в область пограничного слоя, где значения  $u_{ij}$  уменьшается примерно на порядок, попадает один узел, в то время как на адаптивной сетке с общим

Функции  $Q$  и  $P$  выбраны таким образом, что в физическом пространстве узлы сетки должны концентрироваться в области сильных градиентов решения и стремиться равномерно распределяться в области, не подверженной влиянию градиентов. В расчетном пространстве учет неравномерного распределения узлов в физической области производится с помощью метрических коэффициентов

$$\frac{\partial x}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial x}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial y}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial y}{\partial \eta}.$$

2. Разностная  $\frac{\partial x}{\partial \xi}$  ма. Для аппроксимации дифференциальной модели (4) - (6) использовался метод конечных разностей. С помощью интегро-интерполяционного метода [17] для системы (4) - (6) выписывалась явная конечно-разностная схема:

$$\begin{aligned} & [(\Psi U)_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}}^{n+1} - (\Psi U)_{i-\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}}^n] \frac{h_x h_y}{\tau} = [(W_1 + UQ)_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}}^n \cdot (y_{i+\frac{1}{2}, j+1}^n - y_{i+\frac{1}{2}, j}^n) - \\ & - (W_1 + UQ)_{i, j+\frac{1}{2}}^n \cdot (y_{i, j+1}^n - y_{i, j}^n) - (W_1 + UQ)_{i+\frac{1}{2}, j+1}^n \cdot (y_{i+\frac{1}{2}, j+1}^n - y_{i+\frac{1}{2}, j}^n) + \\ & + (W_1 + UQ)_{i+\frac{1}{2}, j}^n \cdot (y_{i+\frac{1}{2}, j}^n - y_{i, j}^n) - (W_2 + UP)_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}}^n \cdot (x_{i+\frac{1}{2}, j+1}^n - x_{i+\frac{1}{2}, j}^n) + \\ & + (W_2 + UP)_{i, j+\frac{1}{2}}^n \cdot (x_{i, j+1}^n - x_{i, j}^n) + (W_2 + UP)_{i+\frac{1}{2}, j+1}^n \cdot (x_{i+\frac{1}{2}, j+1}^n - x_{i+\frac{1}{2}, j}^n) - \\ & - (W_2 + UP)_{i+\frac{1}{2}, j}^n \cdot (x_{i+\frac{1}{2}, j}^n - x_{i, j}^n)]; \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \Psi_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}}^{n+1} = \frac{1}{2h_x h_y} & [(x_{i+\frac{1}{2}, j}^{n+1} - x_{i, j+1}^{n+1}) (y_{i+\frac{1}{2}, j+1}^{n+1} - y_{i, j}^{n+1}) - \\ & - (x_{i+\frac{1}{2}, j+1}^{n+1} - x_{i, j}^{n+1}) (y_{i+\frac{1}{2}, j}^{n+1} - y_{i, j+1}^{n+1})]; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_1_{i+\frac{1}{2}, j}^n = -\frac{\lambda}{\Psi_{i+\frac{1}{2}, j}^n h_x h_y} & [(y_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}}^n - y_{i+\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}}^n) (u_{i+\frac{1}{2}, j}^n - u_{i, j}^n) - \\ & - (y_{i+\frac{1}{2}, j}^n - y_{i, j}^n) (u_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}}^n - u_{i+\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}}^n)]; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_2_{i+\frac{1}{2}, j}^n = -\frac{\lambda}{\Psi_{i+\frac{1}{2}, j}^n h_x h_y} & [-(x_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}}^n - x_{i+\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}}^n) (u_{i+\frac{1}{2}, j}^n - u_{i, j}^n) + \\ & + (x_{i+\frac{1}{2}, j}^n - x_{i, j}^n) (u_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}}^n - u_{i+\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}}^n)]; \end{aligned}$$

Таблица I

$(i, j)$	фиксиров.сетка 10×10		фиксиров.сетка 20×10		адаптивная сетка 10×10	
	$U_{iz}$	$\Psi_{iz}$	$U_{iz}$	$\Psi_{iz}$	$U_{iz}$	$\Psi_{iz}$
(10,2)	1.00	0.00	1.00	0.00	1.00	0.00
(9,2)	3.433 $10^{-1}$	2.47	3.462 $10^{-1}$	1.17	8.340 $10^{-1}$	5.27 $10^{-1}$
(8,2)	7.679 $10^{-2}$	2.47	2.319 $10^{-2}$	1.17	5.626 $10^{-1}$	6.15 $10^{-1}$
(7,2)	2.274 $10^{-2}$	2.47	3.049 $10^{-2}$	1.17	3.383 $10^{-1}$	8.01 $10^{-1}$
(6,2)	1.184 $10^{-2}$	2.47	2.000 $10^{-2}$	1.17	3.176 $10^{-1}$	1.18 $10^0$
(5,2)	9.648 $10^{-3}$	2.47	1.791 $10^{-2}$	1.17	3.108 $10^{-1}$	8.67 $10^{-1}$
(4,2)	9.216 $10^{-3}$	2.47	1.750 $10^{-2}$	1.17	3.077 $10^{-1}$	8.70 $10^{-1}$
(3,2)	9.133 $10^{-3}$	2.47	1.742 $10^{-2}$	1.17	3.058 $10^{-1}$	8.64 $10^{-1}$
(2,2)	9.117 $10^{-3}$	2.47	1.740 $10^{-2}$	1.17	2.956 $10^{-1}$	8.80 $10^{-1}$
(1,2)	9.115 $10^{-3}$	2.47	1.740 $10^{-2}$	1.17	2.952 $10^{-1}$	8.75 $10^{-1}$

Таблица II

(i,k)	фиксированная сетка 10*10 , 20*10			адаптивная сетка 10*10		
	$U_{ik}$ , точное	$U_{ik}$ , расчетное	$\Delta U_{ik}$	$U_{ik}$ , расчетное	$\Delta U_{ik}$	$\Psi_{ik}$
(10,5)	1.00	1.00	0.00	1.00	0.00	
(9,5)	$4.154 \cdot 10^{-1}$	$3.397 \cdot 10^{-1}$	$7.57 \cdot 10^{-2}$	$8.535 \cdot 10^{-1}$	$7.0 \cdot 10^{-3}$	$4.55 \cdot 10^{-1}$
(8,5)	$7.166 \cdot 10^{-2}$	$6.956 \cdot 10^{-2}$	$2.10 \cdot 10^{-3}$	$6.132 \cdot 10^{-1}$	$4.2 \cdot 10^{-3}$	$5.54 \cdot 10^{-1}$
(7,5)	$1.237 \cdot 10^{-2}$	$1.418 \cdot 10^{-2}$	$1.81 \cdot 10^{-3}$	$4.061 \cdot 10^{-1}$	$5.8 \cdot 10^{-3}$	$6.85 \cdot 10^{-1}$
(6,5)	$2.136 \cdot 10^{-3}$	$2.909 \cdot 10^{-3}$	$7.73 \cdot 10^{-4}$	$2.555 \cdot 10^{-1}$	$2.6 \cdot 10^{-3}$	$8.32 \cdot 10^{-1}$
(5,5)	$3.686 \cdot 10^{-4}$	$6.109 \cdot 10^{-4}$	$2.42 \cdot 10^{-4}$	$1.496 \cdot 10^{-1}$	$5.5 \cdot 10^{-3}$	1.11
(4,5)	$6.363 \cdot 10^{-5}$	$1.516 \cdot 10^{-4}$	$8.80 \cdot 10^{-5}$	$7.346 \cdot 10^{-2}$	$2.2 \cdot 10^{-2}$	1.54
(3,5)	$1.098 \cdot 10^{-5}$	$6.193 \cdot 10^{-5}$	$5.09 \cdot 10^{-5}$	$3.235 \cdot 10^{-2}$	$1.2 \cdot 10^{-2}$	2.50
(2,5)	$1.895 \cdot 10^{-6}$	$4.507 \cdot 10^{-5}$	$4.32 \cdot 10^{-5}$	$1.155 \cdot 10^{-2}$	$1.2 \cdot 10^{-2}$	4.54
(1,5)	$3.271 \cdot 10^{-7}$	$4.213 \cdot 10^{-5}$	$4.18 \cdot 10^{-5}$	$5.072 \cdot 10^{-3}$	$5.0 \cdot 10^{-3}$	6.29

числом узлов ( $10 \times 10$ ) в этой области концентрируется 5 узлов. Концентрация узлов в областях сильного изменения решения приводит к существенной двумерной деформации сетки, рис.3. Тем не менее погрешность численного решения в областях пограничного слоя согласно таблице II составляет 1-3%. О степени деформации адаптивной сетки можно судить по поведению функции  $\Psi$ , значения которой  $\Psi_{ij}$  характеризует площадь ячеек с индексами  $(i, j)$ . В равномерных фиксированных сетках площади ячеек равны и неизменны во времени,  $\Psi_{ij} = \text{const}$ , рис.4, 2. Адаптивные сетки рис.3,5 в момент  $t = 0$  совпадают с фиксированными, рис.2,4. К моменту установления значения  $\Psi_{ij}$  в зоне пограничного слоя уменьшаются максимально в 4-5 раз. В области нулевого решения  $\Psi_{ij}$  увеличиваются в 3-6 раза, табл. II, рис.3.

Увеличение числа узлов в 2 раза вдоль направления  $\{$  в фиксированной сетке, рис.4, не приводит к существенным изменениям численного решения. Адаптивная сетка с общим числом узлов ( $20 \times 10$ ), рис.4, для достижения той же точности, что и на адаптивной сетке ( $10 \times 10$ ) в момент установления подвергается значительно меньшей деформации, рис.5. На рис.6 численное решение, полученное на этой сетке, представлено в виде изолиний.

Существует широко распространенное мнение, что численные расчеты на сильно неравномерных сетках, особенно в случае многомерных уравнений, характеризуются низкой точностью. В частности это может происходить из-за большой погрешности аппроксимации смешанных производных и потоковых величин на неортогональных сетках. Казалось бы, тем самым возникают естественные ограничения для неоднородных адаптивных сеток и область их применимости существенно сужается.

Однако в случае адаптивных сеток, динамически связанных с решением, указанные эффекты не имеют места. Вычисления ведутся в расчетном пространстве на неподвижной прямоугольной сетке. Информация о деформации сетки в физическом пространстве передается через метрические коэффициенты. Поскольку деформация сетки определяется динамикой решения, то изменения решения и положения узлов происходят согласованно. В области сильного изменения решения значения якобиана и метрических коэффициентов уменьшаются пропорционально величине градиентов. В областях слабого изменения решения, за счет перераспределения узлов сетки площади ячеек увеличиваются, соответственно увеличиваются значения

$\psi_{ij}$  и метрических коэффициентов. Однако величины производных в этой области невелики, соответственно мала и погрешность аппроксимации.

Для подтверждения высказанного утверждения рассмотрим вариант задачи, в котором степень деформации адаптивной сетки максимальна.

Вариант II. Граничные условия зададим таким образом, чтобы пограничный слой проходил по главной диагонали, рис.7. Для этого значение функции  $u$  на главной диагонали квадрата задавалось равным  $u = 1$ . Тогда в направлении, перпендикулярном к главной диагонали, можно записать точное решение

$$u(\ell) = \left(1 - e^{-\frac{2}{\lambda^{1/2}}}\right)^{-1} \cdot \left(e^{-\ell/\lambda^{1/2}} - e^{-(\ell-2)/\lambda^{1/2}}\right).$$

Задача рассматривалась в области  $\Omega \{[0, 1,4] \times [0, 1,4]\}$ , в которой вводилась расчетная сетка с равномерным распределением узлов,  $h_1 = h_2 = 7 \cdot 10^{-2}$ , рис.7. Общее число узлов равнялось (20x20). Шаг расчетной сетки в 3 раза превосходил глубину пограничного слоя. Как и в первом варианте расчеты велись до полного установления решения, а затем полученные значения  $u_{ij}$  сравнивались с точным, табл. III, IV. Ячейки, в которых производилось сравнение, отмечены в таблицах и на рисунках цифровыми индексами. Конфигурация адаптивной сетки в момент установления решения показана на рис.8. В области пограничного слоя на характерной толщине  $\ell \sim 3,3 \cdot 10^{-2}$  концентрировалось 7 ячеек сетки, что приводило ее к чрезвычайно сильной деформации. О степени деформируемости расчетной сетки в физическом пространстве можно судить по значениям  $\psi_{ij}$ , приведенным в таблицах III, IV, согласно которым максимальное отличие  $\Delta u$ -ощадей ячеек в зоне пограничного слоя от ячеек в остальной области достигает 2-х порядков. Тем не менее, погрешность численного решения в зоне пограничного слоя не превышает 2%, табл. III, IV. Для наглядности на рис.9 показан фрагмент адаптивной сетки в увеличенном масштабе.

Аналогичные расчеты производились на адаптивной сетке с общим числом узлов (10x10). Степень деформируемости адаптивной сетки в этом случае оказалась еще выше. Конфигурация сетки и ее фрагмент в увеличенном масштабе приведены на рис.10, II.



Таблица III

$(i, j)$	$U_{ij}, \text{ расчет}$	$U_{ij}, \text{ точно}$	$\Delta U_{ij}$	$\psi_{ij}$
(10, 10)	1,00	1,00	0,00	$9,57 \cdot 10^{-2}$
(9, 9)	$6,037 \cdot 10^{-4}$	$6,060 \cdot 10^{-4}$	$2,326 \cdot 10^{-3}$	$1,20 \cdot 10^{-4}$
(8, 8)	$3,284 \cdot 10^{-4}$	$3,284 \cdot 10^{-4}$	$4,550 \cdot 10^{-5}$	$1,62 \cdot 10^{-4}$
(7, 7)	$1,508 \cdot 10^{-4}$	$1,476 \cdot 10^{-4}$	$-3,178 \cdot 10^{-3}$	$2,54 \cdot 10^{-4}$
(6, 6)	$4,497 \cdot 10^{-2}$	$4,031 \cdot 10^{-2}$	$-4,666 \cdot 10^{-2}$	$5,56 \cdot 10^{-4}$
(5, 5)	$1,512 \cdot 10^{-3}$	$4,649 \cdot 10^{-5}$	$-1,465 \cdot 10^{-5}$	4,61
(4, 4)	$4,536 \cdot 10^{-5}$	$7,976 \cdot 10^{-16}$	$-4,530 \cdot 10^{-5}$	$1,39 \cdot 10^{-1}$
(3, 3)	$1,467 \cdot 10^{-6}$	$3,519 \cdot 10^{-23}$	$-1,467 \cdot 10^{-6}$	6,27
(2, 2)	$1,340 \cdot 10^{-8}$	$3,297 \cdot 10^{-32}$	$-1,340 \cdot 10^{-8}$	3,05
(1, 1)	$1,433 \cdot 10^{-14}$	$2,831 \cdot 10^{-38}$	$-1,433 \cdot 10^{-14}$	2,41

Таблица IV

$(i, j), (i, j)$	$U_{ij}, \text{расчет}$	$U_{ij}, \text{точное}$	$\Delta U_{ij}$	$\Psi_{ij}$
$(14, 6), (6, 14)$	1,00	1,00	0,00	$9,57 \cdot 10^{-2}$
$(13, 5), (5, 13)$	$6,046 \cdot 10^{-4}$	$6,060 \cdot 10^{-4}$	$1,430 \cdot 10^{-3}$	$1,27 \cdot 10^{-4}$
$(12, 4), (4, 12)$	$3,286 \cdot 10^{-4}$	$3,284 \cdot 10^{-4}$	$1,870 \cdot 10^{-4}$	$1,80 \cdot 10^{-4}$
$(11, 3), (3, 11)$	$1,502 \cdot 10^{-4}$	$1,476 \cdot 10^{-4}$	$-2,62 \cdot 10^{-3}$	$2,86 \cdot 10^{-4}$
$(10, 2), (2, 10)$	$4,425 \cdot 10^{-2}$	$4,031 \cdot 10^{-2}$	$-3,94 \cdot 10^{-3}$	$6,12 \cdot 10^{-4}$
$(9, 1), (1, 9)$	$6,712 \cdot 10^{-4}$	$4,649 \cdot 10^{-5}$	$-6,25 \cdot 10^{-5}$	4,89

16

$(i, j)$  — индексы ячеек, в которых проводится сравнение.

### Заключение.

Рассмотренные модельные задачи свидетельствуют о том, что метод построения адаптивных сеток, динамически связанных с решением, основанный на идее описания поведения сетки на уровне дифференциальной модели, оказывается достаточно эффективным для решения неоднородных краевых задач математической физики.

Метод обладает рядом достоинств, основными из которых являются:

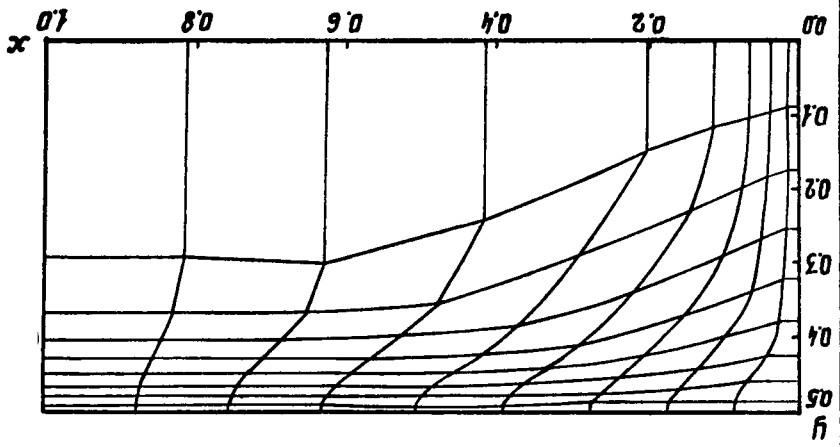
- эффективное использование узлов расчетной сетки в задачах с локальными областями сильных градиентов решения;
- возможность проведения расчетов на существенно неравномерных и неортогональных сетках.

## Литература

- I. Ковеня В.М., Яненко Н.Н. Разностная схема на подвижных сетках для решения уравнений вязкого газа. *ЖВМ и МФ*, 1979, т.19, № 1, с.174-188.
2. Brackbill J.U., Saltzman J.S. Adaptive Zoning for Singular Problems in Two Dimension. - *J.Comp. Physics*, 1982, v.46, p.342-368.
3. Kreis R.I., Thames F.C., Hassan H.A. Application of a Variational Method for Generating Adaptive Grids. - *AIAA J.*, 1986, No3, p.404-410.
4. Дегтярев Л.М., Дроздов В.В. Адаптирующиеся к решению сетки в эллиптических задачах на плоскости. *Дифференциальные уравнения*. 1984, т.20, № 7, с.1194-1203.
5. Thompson J.F. A survey of dynamically adaptive grids the numerical solution of partial differential equations. - *Appl. Numer. Mathem.*, 1985, v.1, NO 1, p.3-28.
6. Thompson J.F. Grid Generation Techniques in Computation Fluid Dynamics. - *AIAA J.*, 1984, v.22, No 11, p.1505-1523.
7. Яненко Н.Н., Данаев Н.Г., Лисейкин В.Д. О вариационном методе построения сеток. - *Сб. "Численные методы механики сплошной среды"*. 197, т. с.157-163.
8. Rai M.M., Anderson D., Application of Adaptive Grid to Fluid-Flow Problems with Asymptotic Solutions. - *AIAA J.*, 1982, v.20 No 4, p.496-502.
9. Dwyer H.A. Grid Adaption for Problems in Fluid Dynamics. - *AIAA J.*, 1984, v.22, No 12, p.1705-1712.
10. Dwyer H.A., Kee R.J., Sanders B.R. Adaptive Grid Method for Problems in Fluid Mechanics and Heat Transfer. - *AIAA J.*, 1980, v.18, No 10, p.1205-1212.
- II. Miller K., Miller R. Moving Finite Elements 1,11. - *SIAM J., Numer. Anal.*, 1981, v.18, No 6, p.1019-1057.

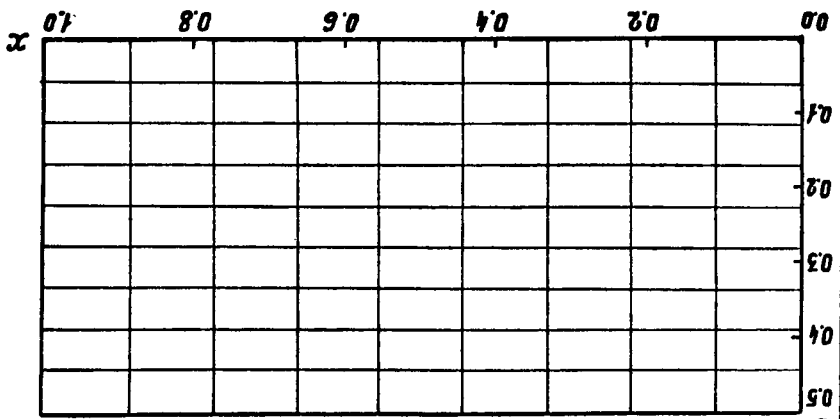
12. Gelinas R.J., Doss S.K., Miller K. The Moning Finite Element Methodà Applications to General Partial Differential Equations with Multiple Large Gradients. J. Comput. Phys., 1981, v.40, p.202-249.
13. Дарьин Н.А., Мажукин В.И. Метод построения адаптивных сеток для одномерных краевых задач. Препринт Института прикладной математики им.М.В.Келдыша АН СССР, 1987, № 33, 26 с.
14. Стергер Дж. Неявный конечно-разностный метод расчета двумерного обтекания тел с произвольной геометрией. - Ракетная техника и космонавтика, 1978, т.16, № 7, с.51-60.
15. Hankey W.L., Granam J.E., Shang J.S. Navier-Stokes Solution of a Slender Body of Revolution at Incidence . - AIAA J., 1982, v.20, No4, p.776-781.
16. Molvik G.A., Choi D., Merkle C.L. A Two-Dimensional Analysis of Laser Heat Addition in a Constant Absorptivity Gas. - AIAA J., 1985, v.23, No 7, p.1053-1060.
17. Самарский А.А. Теория разностных схем. - М.: Наука, 1977, 656 с.

Puc. 3



$t = 10.02$

Puc. 2



$t = 0.0$

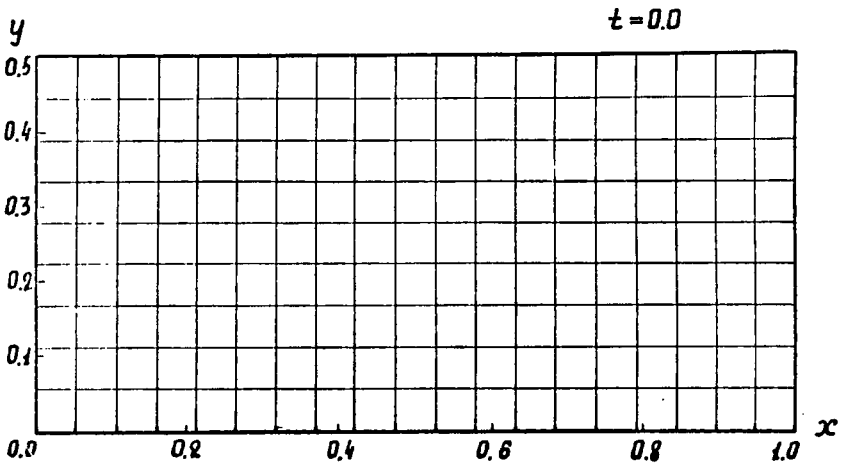


Рис. 4

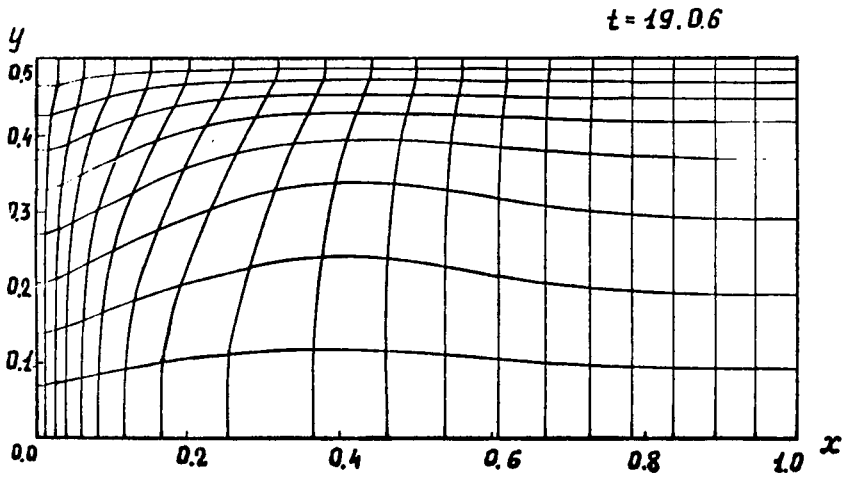


Рис. 5

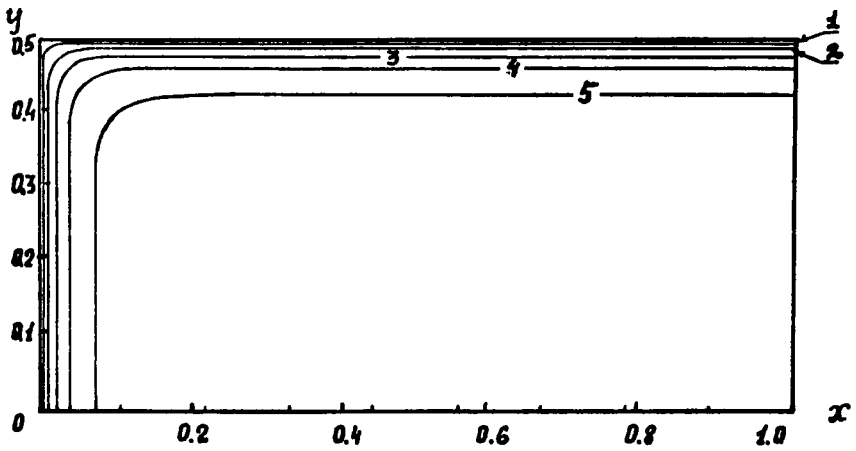


Рис. 6. 1-0.9, 2-0.7, 3-0.5, 4-0.3, 5-0.1 (



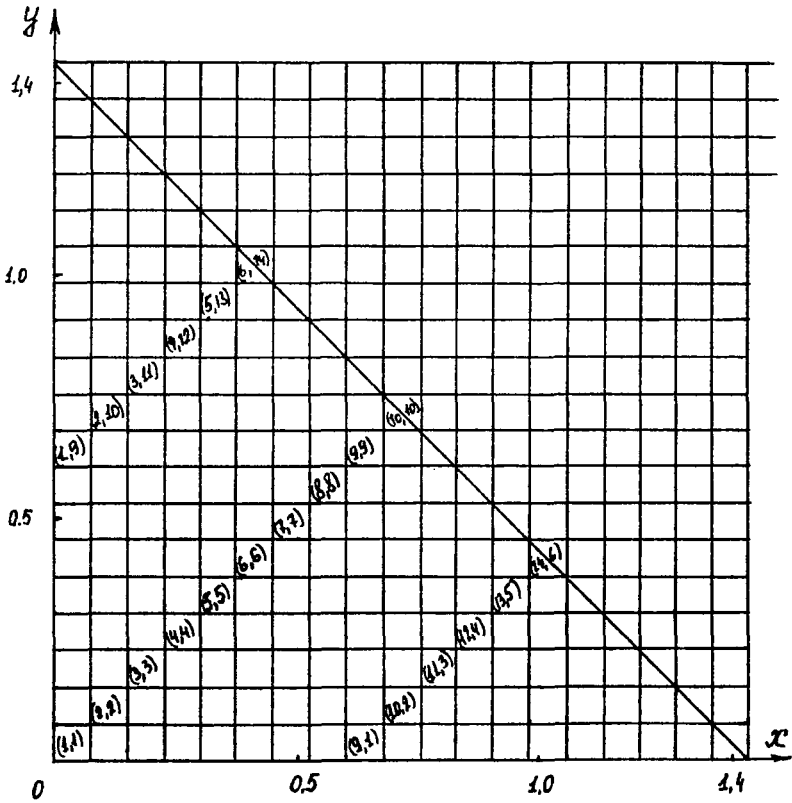
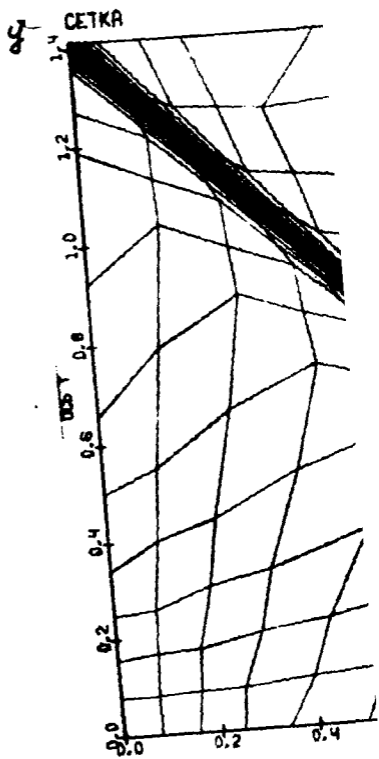


Рис. 7



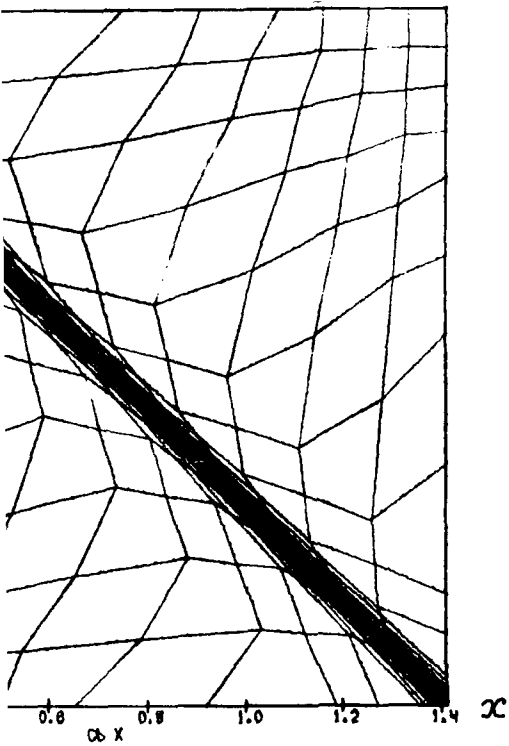


Рис. 8.



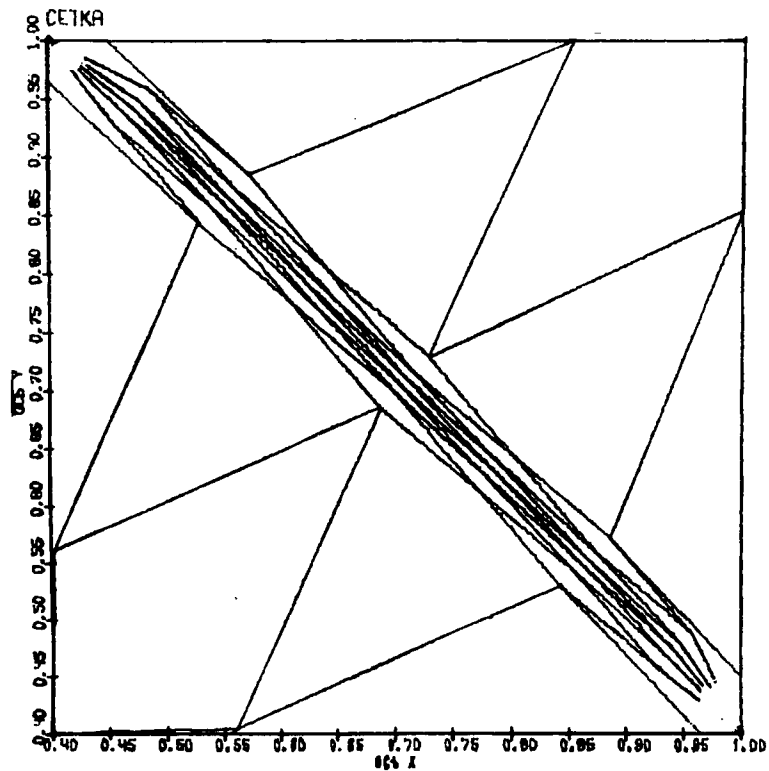


Рис. 11.

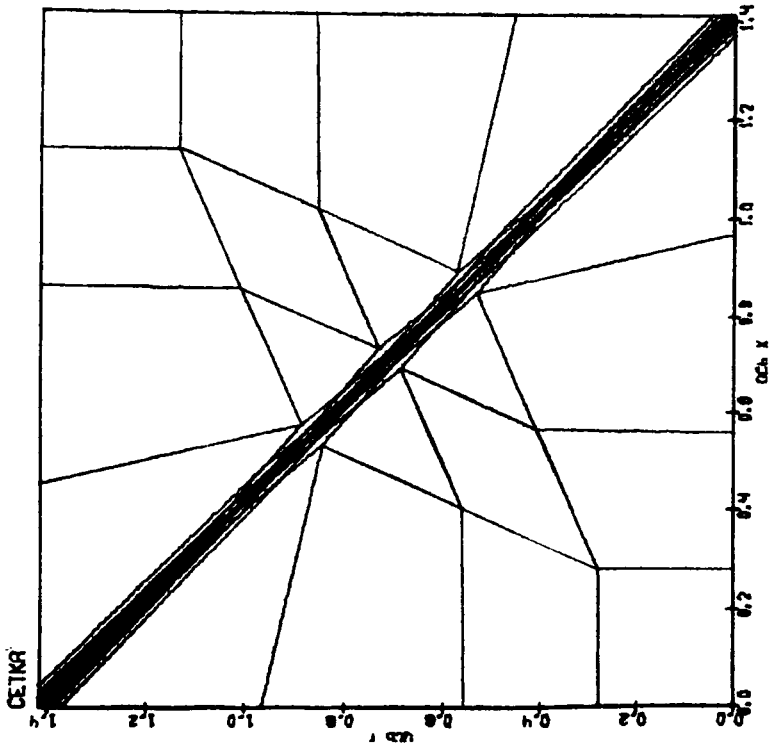


Рис. 10.

Н.А. Дарьин, В.И. Мажукин, А.А. Самарский "Конечно - разностный метод решения нестационарных двумерных краевых задач на адаптивной сетке, динамически связанной с решением."

Редактор Н.Г. Чурбанова.                      Корректор М.П. Забелина.

---

Подписано к печати 29.05.87г. № Т-14153. Заказ № 249.

Формат бумаги 60X90 1/16. Тираж 180 экз.

Объем 1,1 уч.-изд.л.                      Цена 15 коп.

055 (02)2

---

Отпечатано на ротационных в Институте прикладной математики АН СССР

©

Москва, Мясницкая пл. 4.

Все авторские права на настоящее издание принадлежат Институту прикладной математики им. М.В. Келдыша АН СССР.

Ссылки на издание рекомендуется делать по следующей форме:  
и. о., фамилия, название, препринт Ин. прикл. матем. им. М.В. Келдыша  
АН СССР, год, №.

Распространение: препринты института продаются в магазинах Академкниги г. Москвы, а также распространяются через Библиотеку АН СССР в порядке обмена.

Адрес: СССР, 125047, Москва-47, Миусская пл. 4, Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша АН СССР, ОНТИ.

Publication and distribution rights for this preprint are reserved by the Keldysh Institute of Applied Mathematics, the USSR Academy of Sciences.

The references should be typed by the following form: initials, name, title, preprint, Inst.Appl.Mathem., the USSR Academy of Sciences, year, N(number).

Distribution. The preprints of the Keldysh Institute of Applied Mathematics, the USSR Academy of Sciences are sold in the bookstores "Academkniga", Moscow and are distributed by the USSR Academy of Sciences Library as an exchange.

Address: USSR, 125047, Moscow A-47, Miusskaya Sq.4, the Keldysh Institute of Applied Mathematics, Ac.of Sc., the USSR, Information Bureau.