УДК 517.958

О КЛАССИФИКАЦИИ РЕШЕНИЙ СИСТЕМЫ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФУЗИОННЫХ УРАВНЕНИЙ В ОКРЕСТНОСТИ ТОЧКИ БИФУРКАЦИИ

Т. С. Ахромеева, С. П. Курдюмов, Г. Г. Малинецкий, А. А. Самарский

§ 1. Двухкомпонентные системы и задача классификации

Во многих системах, которые изучаются физикой, химией и биологией, возникают самоподдерживающиеся структуры различных типов [24, 32, 36, 40, 42, 62]. Вопрос о свойствах нелинейных сред, где формируются структуры, и об общих закономерностях их возникновения является одним из фундаментальных вопросов современного естествознания.

Будем характеризовать отклонение от равновесия в изучаемых системах параметром λ ($\lambda=0$ соответствует равновесному состоянию). Из классической термодинамики следует, что эволюция такой системы идет в направлении возрастания энтропии, любая упорядоченность при этом исчезает. Необходимым условием существования устойчивых структур является обмен с внешней средой (система должна быть открытой).

При небольших отклонениях ($0<\lambda<\lambda_0$) применимы представления линейной неравновесной термодинамики. Эта теория описывает процессы в окрестности термодинамического равновесия и «... охватывает все случаи, когда потоки (или скорости необратимых процессов) являются линейными функциями «термодинамических сил» (градиентов температуры или концентраций)» [52]. Было показано, что в этой области параметров стационарное состояние системы близко к равновесному (для каждого значения λ оно единственно и устойчиво). Поэтому говорят, что все такие состояния лежат на термодинамической ветви.

Вне термодинамической ветви ($\lambda>\lambda_0$) могут возникать структуры различных типов. В их формировании существенную роль играют нелинейные эффекты. Это приводит к необходимости построения и исследования нелинейных математических моделей. Принципы построения таких моделей, их связь с представлениями термодинамики обсуждаются в работах [52, 70].

Структуры возникают в открытых системах, в которые энергия поступает извне. Энергия преобразуется и рассеивается в

результате диссипативных процессов, роль которых оказывается очень большой. Они определяют количество и типы структур, согласование процессов в различных частях системы и т. д. Чтобы подчеркнуть это обстоятельство, структуры в открытых нелинейных системах, возникающие вне термодинамической ветви, стали называть диссипативными структурами.

Развитие теории диссипативных структур или синергетики показало, что можно выделить ряд общих закономерностей в поведении открытых нелинейных систем.

Математические модели, которые описывают конкретные физические, химические или биологические системы, могут быть очень сложными. Во многих случаях это системы нелинейных параболических уравнений, зависящих от ряда параметров

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_N \end{pmatrix}_t = \begin{pmatrix} D_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & D_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_N \end{pmatrix}_{xx} + \begin{pmatrix} Q_1(u_1, \ldots, u_N, \lambda_1, \ldots, \lambda_m) \\ \vdots \\ Q_N(u_1, \ldots, u_N, \lambda_1, \ldots, \lambda_m) \end{pmatrix}. \quad (1.1)$$

Однако в них часто можно выделить небольшое количество управляющих переменных, к которым подстраиваются все остальные. Наличие таких переменных, которые обычно называют параметрами порядка, намного упрощает описание процессов. Обычно они позволяют описать поведение системы на больших или малых характерных временах [42, 70].

Выделение параметров порядка дает возможность не только упростить используемые модели, но в ряде случаев исследовать многие нелинейные процессы в рамках одних и тех же уравнений. Их обычно называют базовыми моделями. Одной из наиболее важных и широко используемых базовых моделей является система уравнений вида

$$\begin{aligned} X_t &= D_1 X_{xx} + F_1(X, Y, \lambda), \\ Y_t &= D_2 Y_{xx} + F_2(X, Y, \lambda). \end{aligned} \quad (1.2)$$

Здесь F_1 и F_2 — нелинейные функции, зависящие от параметра λ. Уравнения (1.2), как и (1.1), часто называют моделями типа реакция-диффузия.

Несмотря на то, что базовая модель гораздо проще исходной задачи, она представляет собой сложный математический объект. Именно поэтому принципиальную роль в развитии теории диссипативных структур играет вычислительный эксперимент — сочетание больших серий расчетов на ЭВМ с широким использованием различных аналитических методов [51, 59, 62, 63]. Можно привести ряд примеров из физики плазмы [41, 62, 67], теории нелинейных волн [7, 66, 68, 69, 125], биологии [21, 36, 48, 56, 86] и других областей, где экспериментальному обнаружению новых явлений, ведению новых понятий или созданию строгой математической теории предшествовало исследование средствами вычислительного эксперимента.

1.1. Системы реакция-диффузия, описание в окрестности точки бифуркации. В последние десятилетия система уравнений (1.2) использовалась при моделировании большого круга явлений в химии, экологии, теории морфогенеза, в физике плазмы, теории горения и во многих других областях. Этой модели посвящено огромное количество работ.

Разнообразие двухкомпонентных систем вида (1.2), широкая область их применения, необходимость построения приближенных методов и проведения больших серий численных расчетов при их анализе приводят к постановке двух вопросов. Первый — существуют ли общие черты в поведении решений уравнений (1.2) при различных правых частях. Этот вопрос очень сложен, поскольку «число качественно различных решений этих уравнений столь велико, что до сих пор не найдено общего способа их классификации. В лучшем случае удается построить приближенные выражения для некоторых специальных решений типа стационарных, периодических или почти периодических, причем без особой уверенности в том, исчерпывают ли эти решения все возможные бифуркации в системе» [52].

Второй вопрос — можно ли провести классификацию двухкомпонентных систем по каким-либо признакам. О важности этой задачи можно судить по значению, которое проблемы классификации имели для теории обыкновенных дифференциальных уравнений и теории особенностей дифференцируемых отображений [4, 5, 29]. Классификация и выделение общих черт позволили бы перейти от исследования конкретных моделей частного вида к созданию их теории, помогли бы упростить анализ каждой конкретной задачи.

Принципиальный шаг в этом направлении был сделан в 1975 году в работе Курамото и Цудзуки [103]. У большинства открытых диссипативных систем, рассматриваемых синергетикой, существует аналог термодинамической ветви. При всех значениях параметра исследуемые уравнения имеют однородное по пространству стационарное решение. Это решение устойчиво, если $\lambda<\lambda_0$. Поведение решений после потери устойчивости термодинамической ветви ($\lambda>\lambda_0$) определяется спектром линеаризованной задачи для уравнения (1.2) в окрестности точки бифуркации λ_0 [49, 52, 70].

Если при $\lambda=\lambda_0$ одно простое собственное значение проходит через нуль, возникают пространственно-неоднородные стационарные решения. Такое поведение в системе (1.2) было обнаружено Тьюрингом при исследовании математической модели морфогенеза [120], его часто называют неустойчивостью Тьюринга. Типичная зависимость амплитуды стационарного решения A от параметра λ будет такой, как показано на рис. 1.

Если при $\lambda=\lambda_0$ мнимую ось в плоскости ($\mathrm{Re}\mu$, $\mathrm{Im}\mu$), где μ — собственное значение, пересекают два комплексно-сопряженных

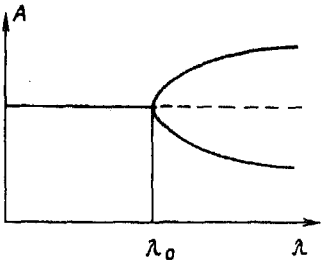


Рис. 1

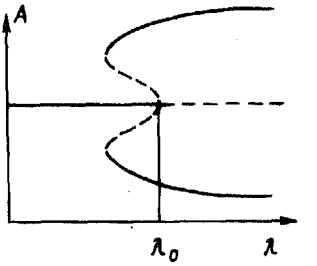


Рис. 2

собственных значения, то происходит бифуркация Хопфа и в системе начинаются колебания [49].

Уравнение, предложенное Курамото и Цудзуки, описывает поведение и тех и других двухкомпонентных систем в окрестности точки бифуркации λ_0 [103]. Оно имеет вид

$$W_T = (\pm 1 + ic_0) W + (1 + ic_1) W_{RR} - (1 + ic_2) W |W|^2. \qquad (1.3)$$

Здесь $W = u + iv$; c_0, c_1, c_2 — действительные постоянные, значения которых определяются по коэффициентам D_1, D_2, функциям $Q_1(X, Y, \lambda)$, $Q_2(X, Y, \lambda)$ и их производным. Знак плюс в правой части уравнения (1.3) соответствует области параметров $\lambda > \lambda_0$, минус — $\lambda < \lambda_0$.

Поясним смысл переменных W, R, T. Возможность перейти от систем вида (1.2) к уравнению (1.3) связана с наличием малого параметра $\varepsilon \sim (\lambda - \lambda_0)^{1/2}$. Решение уравнения (1.2) в этом случае можно записать в виде

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_0 \\ Y_0 \end{pmatrix} + \varepsilon \left[W(R, T) \cdot f + \text{к. с} \right] \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix}; \quad e_1, e_2 = \text{const}, \qquad (1.4)$$

где $\{X_0, Y_0\}$ — термодинамическая ветвь; W зависит от медленных переменных $R = \varepsilon x$, $T = \varepsilon^2 t$, $f = e^{ik_c x}$ в случае неустойчивости Тьюринга, $f = e^{i\omega_0 t}$, если происходит бифуркация Хопфа. То есть R и T — это медленные переменные, определяющие модуляцию по времени и пространству простейших решений f, вид которых следует из линейного анализа.

Функция $W(R, T)$ характеризует отклонение решений системы уравнений (1.2) от пространственно-однородного решения. Поэтому уравнение (1.3) описывает только те случаи, когда при $\lambda > \lambda_0$ решение остается в малой окрестности термодинамической ветви. Это условие нарушается, например, когда происходит скачок на другую устойчивую ветвь (бифуркация подкритична, см. рис. 2.). Уравнение (1.3) не описывает также вырожденные случаи, когда более двух собственных значений линеаризованной задачи одновременно пересекают мнимую ось. Тем не менее, это уравнение применимо к очень широкому классу задач и по-

этому представляет большой интерес. Именно оно и будет рассматриваться в дальнейшем.

Изучение уравнения (1.3) оказывается тесно связанным с задачей классификации двухкомпонентных систем в окрестности точки бифуркации. Пусть известны качественные особенности его решений (тип асимптотики, симметрия и т. д.) при всех значениях c_0, c_1, c_2 и длины области l. Тогда можно объединить в один класс все системы вида (1.2), для которых решения уравнения (1.3) ведут себя сходным образом. Такой подход окажется еще более полезным, если удастся предложить эффективные приближенные и качественные методы анализа решений различных типов.

Остановимся более подробно на алгоритме перехода от конкретной системы вида (1.2) к уравнению (1.3), следуя работе [103].

Перепишем уравнения (1.2) в векторном виде, обозначив пространственную координату через r

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{X}-\hat{\mathbf{D}}\nabla_r^2\mathbf{X}=\mathbf{F}(\mathbf{X}), \tag{1.5}$$

где $\mathbf{X}\equiv\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}$, $\hat{\mathbf{D}}\equiv\begin{pmatrix}D_1 & 0\\0 & D_2\end{pmatrix}$. Преобразуем это уравнение

$$\hat{\Gamma}\mathbf{x}=\mathbf{G}(\mathbf{x}), \tag{1.6}$$

где $\mathbf{x}=\mathbf{X}-\mathbf{X}_0$ ($\mathbf{X}_0$ — термодинамическая ветвь), $\mathbf{x}\equiv\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$,

$$\hat{\Gamma}\left(-i\frac{\partial}{\partial t},\ -i\nabla_r\right)\equiv\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial t}+K_{xx}-D_1\nabla_r^2 & K_{xy}\\K_{yx} & \frac{\partial}{\partial t}+K_{yy}-D_2\nabla_r^2\end{pmatrix}. \tag{1.7}$$

В функцию $\mathbf{G}\equiv\begin{pmatrix}P\\Q\end{pmatrix}$ при такой записи входят только нелинейные члены по $\mathbf{x}$.

Уравнение (1.6) можно переписать так

$$\mathscr{L}\mathbf{x}=\hat{\mathbf{L}}\mathbf{G},\quad \hat{\mathbf{L}}\left(-i\frac{\partial}{\partial t},\ -i\nabla_r\right)=\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial t}+K_{yy}-D_2\nabla_r^2 & -K_{xy}\\-K_{yx} & \frac{\partial}{\partial t}+K_{xx}-D_1\nabla_r^2\end{pmatrix}, \tag{1.8}$$

где

$$\mathscr{L}\left(-i\frac{\partial}{\partial t},\ -i\nabla_r\right)=\det\hat{\Gamma}. \tag{1.9}$$

Таким образом, после выделения в правых частях системы (1.2) членов, линейных по отклонению от термодинамической ветви, ее можно привести к виду (1.6) или (1.8).

Пусть теперь

$$\lambda=\lambda_0+\varepsilon^2\lambda_1. \tag{1.10}$$

В окрестности точки бифуркации

$$\begin{pmatrix} K_{\alpha\beta} \\ D_m \\ \vdots \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} K'_{\alpha\beta} \\ D'_m \\ \vdots \end{pmatrix} + \varepsilon^2 \begin{pmatrix} \gamma_{\alpha\beta} \\ d_m \\ \vdots \end{pmatrix} + \ldots \tag{1.11}$$

α и β могут принимать значения x или y, $m=1, 2$. $K'_{\alpha\beta}$, D'_m не зависят от ε, далее штрихи у этих членов мы будем опускать.

Пусть

$$T=\varepsilon^2\xi t, \ (\xi>0); \quad R=\varepsilon\chi r \tag{1.12}$$

(χ — действительное число),

$$f_\nu=\begin{cases} e^{i\nu k_c r} & \text{(случай А, неустойчивость Тьюринга)}, \\ e^{i\nu\omega_0 t} & \text{(случай В, бифуркация Хопфа)}; \end{cases} \tag{1.13}$$

здесь $\nu=\pm 1, \pm 2, \ldots$ (явные формулы для ξ, χ, k_c, ω_0 будут выписаны далее).

Вектор отклонений $\mathbf{x}$ также можно представить в виде ряда

$$\mathbf{x}=\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n \mathbf{x}_n, \text{ где } \mathbf{x}_n=\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \mathbf{x}_n^{(\nu)}(T, R) f_\nu. \tag{1.14}$$

Тогда для операторов $\hat{\Gamma}$, $\mathscr{L}$, $\hat{\mathbf{L}}$, $\mathbf{G}$ мы также получим ряды

$$\begin{gathered} \hat{\Gamma}=\hat{\Gamma}_0+\varepsilon\hat{\Gamma}_1+\ldots, \ \mathscr{L}=\mathscr{L}_0+\varepsilon\mathscr{L}_1+\varepsilon^2\mathscr{L}_2+\ldots, \\ \hat{\mathbf{L}}=\hat{\mathbf{L}}_0+\varepsilon\hat{\mathbf{L}}_1+\ldots, \ \mathbf{G}=\varepsilon^2\mathbf{G}_2+\varepsilon^3\mathbf{G}_3+\ldots. \end{gathered} \tag{1.15}$$

В операторы $\mathscr{L}_n=\mathscr{L}_n\left(-i\frac{\partial}{\partial t}, \ -i\nabla_r\right)$ входят $-i\frac{\partial}{\partial t}$ и $-i\nabla_r$. Упростим их запись, положив

$$\mathscr{L}_n(\nu)=\begin{cases} \mathscr{L}_n(0, \nu k_c) & \text{(случай А)}, \\ \mathscr{L}_n(\nu\omega_0, 0) & \text{(случай В)}. \end{cases} \tag{1.16}$$

То же относится к операторам $\hat{\mathbf{L}}$, $\hat{\Gamma}$, $\mathbf{G}$.

Уравнение Курамото—Цудзуки для функции $W(R, T)$ и отклонение $\mathbf{x}$ связывает формула

$$\begin{gathered} \mathbf{x}_1^{(1)}=\mathbf{x}_1^{(-1)*}=\mathbf{a}\zeta W(R, T), \\ \mathbf{x}_1^{(\nu)}=0, \ \nu\neq\pm 1, \end{gathered} \tag{1.17}$$

где $\mathbf{a}=\begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} a=-\hat{\Gamma}_0(1)_{xx}/\hat{\Gamma}_0(1)_{xy}=-\hat{\Gamma}_0(1)_{yx}/\hat{\Gamma}_0(1)_{yy}=\hat{L}_0(1)_{yy}/\hat{L}_0(1)_{xy}= \\ =\hat{L}_0(1)_{yx}/\hat{L}_0(1)_{xx}. \end{aligned} \tag{1.18}$$

($_{xx}$ — верхний левый элемент в матрице, $_{xy}$ — второй элемент в первой строке и т. д.).

Коэффициенты c_0, c_1, c_2 в уравнении (1.3) и ξ, χ, ζ в формулах (1.12), (1.17) определяются формулами

$$c_0=\operatorname{Im}\tilde{\gamma}/|\operatorname{Re}\tilde{\gamma}|,\quad c_1=\operatorname{Im}\tilde{D}/\operatorname{Re}\tilde{D},\quad c_2=\operatorname{Im}\tilde{g}/\operatorname{Re}\tilde{g},$$
$$\xi=|\operatorname{Re}\tilde{\gamma}|,\quad \chi^2=|\operatorname{Re}\tilde{\gamma}|/\operatorname{Re}\tilde{D},\quad |\zeta|^2=|\operatorname{Re}\tilde{\gamma}|/\operatorname{Re}\tilde{g}, \tag{1.19}$$

где $\tilde{\gamma}$, $\tilde{D}$ и $\tilde{g}$ определяются по-разному для случаев А и В.

Случай А (неустойчивость Тьюринга). Из линейного анализа следует, что в точке бифуркации

$$(K_{xx}D_2-K_{yy}D_1)^2+4K_{xy}K_{yx}D_1D_2=0, \tag{1.20}$$

$$k_c^2=-(K_{xx}D_2+K_{yy}D_1)/(2D_1D_2). \tag{1.21}$$

Будем рассматривать только случай $k_c\neq 0$.

$$\tilde{\gamma}=-\{(K_{xx}+D_1k_c^2)(\gamma_{yy}+d_2k_c^2)+(K_{yy}+D_2k_c^2)(\gamma_{xx}+d_1k_c^2)-$$
$$-(K_{yx}\gamma_{xy}+K_{xy}\gamma_{yx})\}/\{K_{xx}+K_{yy}+(D_1+D_2)k_c^2\},$$
$$\tilde{D}=-2(D_2K_{xx}+D_1K_{yy})/\{K_{xx}+K_{yy}+(D_1+D_2)k_c^2\}>0, \tag{1.22}$$
$$\tilde{g}=g/\{K_{xx}+K_{yy}+(D_2+D_1)k_c^2\},$$

величина g определяется формулой

$$g=-\left[4\mathscr{L}_0^{-1}(0)\,\mathbf{a}^{\mathrm{T}}\widehat{M}_2\widehat{\mathbf{L}}_0(0)\begin{pmatrix}\mathbf{a}^{*\mathrm{T}}\widehat{P}_2\mathbf{a}\\ \mathbf{a}^{*\mathrm{T}}\widehat{Q}_2\mathbf{a}\end{pmatrix}+\right.$$
$$\left.+2\mathscr{L}_0^{-1}(2)\,\mathbf{a}^{*\mathrm{T}}\widehat{\mathbf{M}}_2\widehat{\mathbf{L}}_0(2)\begin{pmatrix}\mathbf{a}^{\mathrm{T}}\widehat{P}_2\mathbf{a}\\ \mathbf{a}^{\mathrm{T}}\widehat{Q}_2\mathbf{a}\end{pmatrix}+2\mathbf{a}^{\mathrm{T}}\widehat{\mathbf{M}}_3\hat{a}a^*+\mathbf{a}^{*\mathrm{T}}\widehat{\mathbf{M}}_3\hat{a}\mathbf{a}\right], \tag{1.23}$$

где $\hat{a}\equiv\begin{pmatrix}1&0\\0&a\end{pmatrix}$, $*$ соответствует комплексному сопряжению, ^{T} — транспонированию.

Члены, входящие в g, определяются соотношениями

$$\mathscr{L}_0(0)=K_{xx}K_{yy}-K_{xy}K_{yx},$$
$$\mathscr{L}_0(2)=(K_{xx}+4D_1k_c^2)(K_{yy}+4D_2k_c^2)-K_{xy}K_{yx},$$
$$\hat{\mathbf{L}}_0(0)=\begin{pmatrix}K_{yy}&-K_{xy}\\-K_{yx}&K_{xx}\end{pmatrix},\quad \hat{\mathbf{L}}_0(2)=\begin{pmatrix}K_{yy}+4D_2k_c^2&-K_{xy}\\-K_{yx}&K_{xx}+4D_1k_c^2\end{pmatrix}, \tag{1.24}$$
$$\hat{\mathbf{M}}_{2,3}=(K_{yy}+D_2k_c^2)\hat{P}_{2,3}-K_{xy}\hat{Q}_{2,3},$$
$$a=-\frac{K_{xx}+D_1k_c^2}{K_{xy}}=-\frac{K_{yx}}{K_{yy}+D_2k_c^2}.$$

Случай В (бифуркация Хопфа). В точке бифуркации выполнены равенства

$$K_{xx}+K_{yy}=0,\quad \omega_0=\sqrt{K_{xx}K_{yy}-K_{xy}K_{yx}}, \tag{1.25}$$

$\tilde{\gamma}$, $\tilde{D}$ и $\tilde{g}$ определяются соотношениями

$$\tilde{\gamma}=-\frac{1}{2}(\gamma_{xx}+\gamma_{yy})+\frac{i}{2\omega_0}\{K_{xx}(\gamma_{yy}-\gamma_{xx})-(K_{xy}\gamma_{yx}+K_{yx}\gamma_{xy})\},$$

$$\tilde{D}=D_{+}+iK_{xx}D_{-}/\omega_0,\quad D_{\pm}=\frac{1}{2}(D_1\pm D_2),\quad \tilde{g}=-ig/2\omega_0. \tag{1.26}$$

Величина g определяется формулой (1.23), $\mathscr{L}_0(0)$ и $\hat{\mathrm{L}}_0(0)$ будут такими же, как в формулах (1.24). Для других членов, входящих в g, справедливы соотношения

$$\mathscr{L}_0(2)=(2i\omega_0+K_{xx})(2i\omega_0+K_{yy})-K_{xy}K_{yx},$$

$$\hat{\mathrm{L}}_0(2)=\begin{pmatrix}2i\omega_0+K_{yy} & -K_{xy}\\ -K_{yx} & 2i\omega_0+K_{xx}\end{pmatrix},\quad \hat{\mathbf{M}}_{2,3}=(i\omega_0+K_{yy})\hat{P}_{2,3}- \tag{1.27}$$

$$-K_{xy}\hat{Q}_{2,3},\quad a=-\frac{(i\omega_0+K_{xx})}{K_{xy}}=-K_{yx}/(i\omega_0+K_{yy}).$$

Перечислим основные этапы перехода от конкретной системы (1.2) к уравнению (1.3). 1. Выделение в уравнении (1.2) части, линейной по отклонению, приведение к виду (1.6) и (1.8). 2. Разложение по малому параметру ε (формулы (1.11) и (1.15)). Определение значений γ_{xx}, γ_{yx}, γ_{xy}, γ_{yy}, d_1, d_2 и $\hat{P}_2$, $\hat{P}_3$, $\hat{Q}_2$, $\hat{Q}_3$. 3. В случае А, когда выполнено соотношение (1.20), находятся k_c^2, c_0, c_1, c_2 в соответствии с формулами (1.21)—(1.24) и (1.19). В случае В, когда выполнено соотношение (1.25), находятся значения ω_0, c_0, c_1, c_2 по формулам (1.25), (1.26), (1.23), (1.27).

Пример использования этого алгоритма для модели брюсселятора ($F_1=A-(B+1)X+X^2Y$, $F_2=BX-X^2Y$ в формулах (1.2)), которая широко используется в теории диссипативных структур, приведен в работе [102].

Обратим внимание на отличие рассматриваемого подхода, связанного с многомасштабными разложениями, от традиционных методов теории бифуркаций [39]. В этой теории обычно исследуются решения известного вида (стационарные или периодические) в окрестности аналога термодинамической ветви. Здесь же получается уравнение, порождающее такие решения. Этот метод можно сравнить с результатами Чепмена и Энскога по выводу уравнений гидродинамики из уравнения Больцмана [98].

1.2. Другие задачи, приводящие к уравнению Курамото—Цудзуки. Область применимости уравнения (1.3) не исчерпывается анализом двухкомпонентных систем вида (1.2). Оно представляет большой интерес во многих физических задачах. В частности, в работе [2] для исследования ветровых волн на воде было предложено уравнение

$$a_t-i\varkappa a_{xx}-iqa_{yy}-i\alpha|a|^2a=\gamma_0a+i\delta a_t+\beta a_{xx}+\nu a_{yy}-\rho|a|^2a.$$

Частные случаи его рассматривались для течения Пуазейля [115], для ионно-звуковых волн в плазме [55], а также для волн Толлмина—Шлихтинга [92]. Ряд важных и интересных эффектов может быть исследован при изучении его одномерного аналога, совпадающего с (1.3).

Во многих задачах нелинейной оптики и гидродинамики, в частности, в теории волн конечной амплитуды на поверхности глубокой жидкости широко используется уравнение Шрёдингера с кубической нелинейностью [66, 68, 125]. Это уравнение имеет бесконечно много законов сохранения, его типичные решения — солитоны огибающей [68]. В тех случаях, когда необходим учет диссипативных процессов, источников и стоков, появляется уравнение (1.3), решения которого могут вести себя совершенно иным образом.

Уравнение (1.3) использовалось при анализе упорядоченности, возникающей в активных биологических средах [21, 97], для исследования автоволновых процессов в колебательных химических реакциях [90]. Есть основания полагать, что поведение возмущений во многих неравновесных процессах при малой надкритичности описывается этим уравнением. На важность и общность такого подхода указывают авторы работы [2], в которой проводится аналогия между задачами гидродинамики и физики плазмы.

Для уравнения (1.3) в литературе используются различные названия. В работах [22, 109] оно называется TDGL (зависящее от времени уравнение Гинзбурга—Ландау). В работе [97] его относят к λ—ω системам. Оно также называлось уравнением Курамото—Цудзуки [7—19], поскольку именно авторы работы [103] предложили использовать его для анализа широкого класса двухкомпонентных систем. Этим названием мы и будем пользоваться далее в целях краткости и удобства.

§ 2. Общие свойства уравнения и основные типы решений

2.1. Основные свойства уравнения Курамото—Цудзуки и его простейшие решения. Уравнение (1.3) является сложным математическим объектом. Его анализ был начат с построения различных классов частных решений.

Без ограничения общности, в уравнении (1.3) можно положить $c_0=0$. В этом можно убедиться, сделав замену переменных $W=W'\exp(ic_0t)$. Далее будем считать, что такая замена уже сделана.

В большинстве случаев основной интерес представляет вторая краевая задача при условии, что потоки на границах равны нулю

$$\begin{gathered} W_t=\pm W+(1+ic_1)W_{xx}-(1+ic_2)W|W|^2, \\ 0\leqslant x\leqslant l,\ 0<t<\infty,\ W(x,\ 0)=W_0(x), \\ W_x(0,\ t)=W_x(l,\ t)=0. \end{gathered} \tag{2.1}$$

Простейшим решением этой задачи является нулевое

$$W(x, t) = 0 \tag{2.2}$$

и пространственно-однородное решение

$$W(x, t) = \exp(-ic_2 t + i\alpha), \ \alpha = \text{const}. \tag{2.3}$$

Все пространственно-однородные решения описываются динамической системой

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \pm\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -c_2 \\ c_2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}(u^2 + v^2). \tag{2.4}$$

Когда в правой части выбран знак минус, в ее фазовой плоскости есть одна особая точка — устойчивый узел (0, 0). Если выбран знак плюс, то (0, 0) — неустойчивый узел, и в фазовой плоскости есть устойчивый предельный цикл (2.3). При ненулевых начальных данных решения уравнения (2.4) стремятся к нему при $t \to \infty$.

Если в уравнениях (2.1) выбран знак минус, то $\int\limits_0^l (u^2 + v^2)\, dx \to 0$ при $t \to \infty$. Запишем задачу (2.1) в виде системы уравнений для u и v. Домножим первое уравнение на u, второе на v, сложим их и проинтегрируем по длине отрезка. После интегрирования по частям с учетом граничных условий получим

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_0^l (u^2 + v^2)\, dx = -\int\limits_0^l (u_x^2 + v_x^2)\, dx - \\ -\int\limits_0^l (u^2 + v^2)\, dx - \int\limits_0^l (u^2 + v^2)^2\, dx. \tag{2.5}$$

Если $u \neq 0$, $v \neq 0$ при $0 \leqslant x \leqslant l$, то правая часть равенства (2.5 отрицательна. Это и говорит о том, что при любых начальных данных $\int\limits_0^l |W|^2\, dx \to 0$, $t \to \infty$. Поэтому в дальнейшем мы будем рассматривать только случай, когда в правой части уравнений (2.1) выбран знак плюс.

При этом для $\int\limits_0^l |W|^2\, dx$ имеет место соотношение

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_0^l (u^2 + v^2)\, dx = -\int\limits_0^l (u_x^2 + v_x^2)\, dx - \\ -\int\limits_0^l (u^2 + v^2)^2\, dx + \int\limits_0^l (u^2 + v^2)\, dx. \tag{2.6}$$

Первое слагаемое неположительно, второе можно оценить, пользуясь неравенством Коши—Буняковского для функций u^2+v^2 и 1.

$$\int_0^l (u^2+v^2)\,dx \leqslant \left(\int_0^l (u^2+v^2)^2\,dx\right)^{1/2}\left(\int_0^l dx\right)^{1/2}.$$

В результате получаем неравенство

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^l (u^2+v^2)\,dx \leqslant \int_0^l (u^2+v^2)\,dx - \frac{1}{l}\left[\int_0^l (u^2+v^2)\,dx\right]^2,$$

из которого следует оценка

$$\int_0^l (u^2+v^2)\,dx \leqslant l/[1+A_1\exp(-t)], \tag{2.7}$$

где A_1 зависит от начальных данных. Таким образом, решение задачи (2.1) ограничено в норме L_2.

Отметим, что все сказанное справедливо и в случае задачи с периодическими граничными условиями.

Уточним те значения параметров, при которых нужно исследовать задачу (2.1). Вначале перейдем к переменным ρ, φ

$$\rho_t=\rho-\rho^3+\rho_{xx}-\rho\varphi_x^2-2c_1\rho_x\varphi_x-c_1\rho\varphi_{xx},$$

$$\rho\varphi_t=-c_2\rho^3+2\rho_x\varphi_x+c_1\rho_{xx}-c_1\rho\varphi_x^2+\rho\varphi_{xx},\quad u=\rho\cos\varphi,\quad v=\rho\sin\varphi. \tag{2.8}$$

Пусть $\{\rho(x,t),\ \varphi(x,t)\}$ — решение (2.8), а значит, и (2.1), тогда функции $\{\rho(x,t),\ -\varphi(x,t)\}$ также будут решением этой системы, если значения параметров c_1, c_2 изменить на $-c_1$, $-c_2$.

Справедливость этого утверждения можно проверить непосредственной подстановкой. Оно означает, что достаточно рассматривать область параметров $c_1\geqslant 0$.

Из вида уравнения ясно, что преобразование $W\to -W$ и $W(x,t)\to W(l-x,t)$ переводит одни решения в другие. Важную роль играет симметрия относительно преобразования

$$W\to We^{i\alpha}, \tag{2.9}$$

где α — действительная постоянная.

Проведя линейный анализ устойчивости решения (2.3), можно показать, что оно будет устойчиво относительно малых возмущений n-й гармоники при условии [103]

$$(c_1^2+1)k^4+2k^2(1+c_1c_2)>0,\quad k=\pi n/l,\quad n=1,\ 2,\ldots \tag{2.10}$$

Неравенство (2.10) справедливо для любых значений k, если

$$1+c_1c_2>0. \tag{2.11}$$

Естественно ожидать, что если неравенство (2.11) не выполняется, то решение задачи (2.1) будет пространственно-неоднородным.

2.2. Основные типы режимов и задачи, возникающие при их анализе. Инвариантно-групповой анализ, проведенный для уравнения (1.3), показал, что оно может иметь пространственно-неоднородное автомодельное решение вида [22]:

$$W(x,\ t)=R(x)\exp[i\omega t+ia(x)]. \tag{2.12}$$

Для того, чтобы построить такие решения в задаче (2.1), надо решить нелинейную краевую задачу для функций $R(x)$ и $a(x)$, зависящую от параметра ω, значение которого должно быть найдено из граничных условий.

Во многих активных средах теоретически изучаются спиральные волны [34, 36, 90]. Для их моделирования необходимо решать многомерную задачу. Двумерный аналог уравнения Курамото — Цудзуки также может описывать спиральные волны. Им соответствуют автомодельные решения вида

$$W(r,t)=R(r)\exp[i(\omega t+m\varphi-S(r))],\ r^2=x^2+y^2,\ x=r\cos\varphi,$$
$$y=r\sin\varphi,\ m=0,\ 1,\ 2,\ldots \tag{2.13}$$

При этем, на функции R и S накладываются условия [90, 95] $R(r)\to 0$, $S_r\to 0$ при $r\to 0$; $R\to R^\infty=\text{const}$, $S_r\to\text{const}$ при $r\to\infty$. Решения с $m>1$ получили название многовитковых волн. Их асимптотика при $r\to 0$ такова:

$$W\sim r^m\exp(i\omega t+im\varphi+iS).$$

Для построения функций R, S нужно вновь решать нелинейную краевую задачу для разных значений ω, из которой также надо определить значение ω. Обширная библиография, посвященная использованию численных и аналитических методов в этой задаче, приведена в работах [34, 90].

В работе [96] было показано, что спиральные волны во многих двухкомпонентных системах не зависят от деталей кинетики и могут быть описаны одними и теми же усредненными уравнениями. Результаты, касающиеся таких решений, были перенесены на простейшие пространственно-неоднородные среды, у которых $c_2=c_2(r)$ [123].

Записав решение (2.13) в виде $W=R(r)e^{i\theta}$, можно убедиться, что значение фазы θ при $r=0$ не определено. Такие точки получили название особенностей фазы. В книге [121] была высказана мысль, что они играют принципиальную роль в возникновении упорядоченности в большом классе систем различной природы.

Ранее исследовались случаи, когда спиральные волны теряют устойчивость. В работе [101] приводятся результаты численного расчета, в котором парами рождались особенности фазы и далее возникал турбулентный режим.

Обратим внимание на сложности, связанные с исследованием спиральных волн. Эти решения рассматриваются в задаче Ко-

ши. В то же время, их численное моделирование проводится в ограниченной, обычно небольшой области. Встает вопрос, как связаны решения этих задач. Чтобы исследовать спиральные волны в как можно большей области в расчетах часто применяются явные схемы и сетки с крупными шагами по пространству. Важной задачей было бы выяснить, какие методики в этом случае позволяют передать основные характеристики изучаемых решений.

При изучении уравнения (1.3) большое внимание было уделено поиску его непериодических решений (они получили название диффузионного хаоса). Такие режимы представляют большой теоретический интерес и могут быть связаны с моделями многих конкретных процессов [98—100, 105]. В частности, с возникновением сложных колебательных, по-видимому, непериодических режимов в реакции Белоусова — Жаботинского [31]. Интересен этот вопрос и потому, что поведение пространственно-однородных решений, которые описываются динамической системой (2.4), оказывается очень простым. Поэтому сложное поведение обусловлено только влиянием пространственной неоднородности, диффузионными процессами.

Основным источником информации о стохастических режимах в задаче (2.1) является вычислительный эксперимент. Это предъявляет жесткие требования к методике расчетов. Поэтому результаты ряда работ [100, 101, 105], где описаны решения, в течение некоторого времени остающиеся непериодическими, нельзя с полной уверенностью интерпретировать как диффузионный хаос (крупные шаги по пространству, недостаточные времена расчетов). На вопросах методики и результатах исследования непериодических решений далее мы остановимся более подробно.

Изучение диффузионного хаоса поставило еще один важный вопрос. После работы Лоренца [47], а также Рюэля и Такенса были широко развернуты исследования хаоса в динамических системах, изучение странных аттракторов. Был поставлен общий вопрос, можно ли связать стохастические режимы в распределенной системе, имеющей бесконечно много степеней свободы, с наличием странного аттрактора в системе небольшого числа обыкновенных дифференциальных уравнений, представляющих упрощенную математическую модель процессов.

Применительно к задаче (2.1) этот вопрос был поставлен в работе Курамото: «Важная, не решенная пока проблема состоит в том, чтобы найти связь диффузионного хаоса с каким-либо известным типом хаоса в системах с несколькими степенями свободы» [99].

Подведем итоги сказанному и сформулируем вопросы, на которых мы более подробно остановимся далее.

1. Уравнение (1.3) представляет собой сложный объект. Идеальной была бы ситуация, в которой мы могли бы предска-

зывать качественные и основные количественные характеристики решений при всех значениях c_1, c_2 и l. Путь к решению этой задачи связан с построением иерархии упрощенных моделей (систем нескольких обыкновенных дифференциальных уравнений и т. д.). Такие модели должны быть достаточно простыми, и вместе с тем они должны отражать наиболее важные черты исходной задачи в различных случаях.

Естественно ожидать, что построение такой иерархии потребует привлечения различных математических методов и широкого использования вычислительного эксперимента.

2. Важно было бы выяснить, существуют ли, кроме автомодельных, другие типы решений, описывающих пространственно-временную упорядоченность в системе.

3. Вопрос о существовании непериодических решений (диффузионного хаоса). Связаны ли такие режимы с наличием странных аттракторов в какой-либо динамической системе небольшой размерности? Каков механизм перехода к хаосу?

4. Для многих диссипативных систем характерен выход с целого класса начальных данных на одно и то же решение при $t \to \infty$ [52, 70]. Интересно выяснить, может ли привести постановка различных начальных данных в задаче (2.1) к различному асимптотическому поведению при $t \to \infty$.

5. Исследование свойств двумерного аналога задачи (2.1). Анализ простейших типов упорядоченности в многомерном случае.

6. Методические вопросы. Выбор наиболее эффективных алгоритмов для численного исследования уравнения (1.3) и различных упрощенных моделей.

Таковы основные вопросы, возникающие при исследовании двухкомпонентных систем в окрестности точки бифуркации. Перейдем к их анализу.

§ 3. Симметричные решения уравнения Курамото — Цудзуки

3.1. Решения, сохраняющие пространственную симметрию. Большой интерес представляет исследование асимптотики решений задачи (2.1) для разных начальных данных $W_0(x)$. Относительно последних в работе [105] было высказано предположение, что начальные данные несущественны и система «забывает» их на больших характерных временах. Мы покажем, что в случае задачи (2.1) это не так: существуют некоторые симметричные начальные данные, эволюция которых при $t \to \infty$ качественно отличается от поведения остальных решений.

Обратим внимание на то, что близкая ситуация имеет место в случае уравнения нелинейной теплопроводности с объемным источником [30, 42, 43, 61] и в средах с триггерными свойствами [45].

Представим решение задачи (2.1) в виде рядов

$$u(x, t)=\sum_{m=0}^{\infty} a_m(t)\cos\frac{\pi m x}{l}, \quad v(x, t)=\sum_{m=0}^{\infty} b_m(t)\cos\frac{\pi m x}{l},$$

где $W=u+iv$. Предположим, что краевые условия в начальный момент выполнены и соответствующие ряды сходятся. Тогда можно проверить, что функции $a_m(t)$ и $b_m(t)$ будут связаны соотношениями

$$\begin{gathered}
\dot{a}_0=a_0-\frac{1}{2}\left[r_0(a_0-c_2b_0)+\sum_{m=0}^{\infty} r_m(a_m-c_2b_m)\right],\\
\dot{b}_0=b_0-\frac{1}{2}\left[r_0(c_2a_0+b_0)+\sum_{m=0}^{\infty} r_m(c_2a_m+b_m)\right],\\
\dot{a}_p=a_p-k^2p^2(a_p-c_1b_p)-0{,}5\left[\sum_{m=0}^{p} r_m(a_{p-m}-c_2b_{p-m})+\right.\\
\left.+\sum_{m=0}^{\infty} r_m(a_{p+m}-c_2b_{p+m})+\sum_{m=0}^{\infty} r_{p+m}(a_m-c_2b_m)\right],\\
\dot{b}_p=b_p-k^2p^2(c_1a_p+b_p)-0{,}5\left[\sum_{m=0}^{p} r_m(c_2a_{p-m}+b_{p-m})+\right.\\
\left.+\sum_{m=0}^{\infty} r_m(c_2a_{p+m}+b_{p+m})+\sum_{m=0}^{\infty} r_{p+m}(c_2a_m+b_m)\right], \quad p=1, 2, \ldots,
\end{gathered} \tag{3.1}$$

где $k=\pi/l$, $r_0=0{,}5\left[a_0^2+b_0^2+\sum_{m=0}^{\infty}(a_m^2+b_m^2)\right]$, $r_n=\sum_{m=0}^{\infty}(a_ma_{m+n}+$ $+b_mb_{m+n})+0{,}5\sum_{m=0}^{n}(a_ma_{n-m}+b_mb_{n-m})$. Введем также обозначение $\rho_m=(a_m^2+b_m^2)^{1/2}$.

Можно сформулировать условия, при которых часть коэффициентов Фурье решений задачи (2.1) будет равна нулю в течение всего процесса $0<t<\infty$. Поставим в соответствие начальным распределениям $u_0(x)$ и $v_0(x)$ последовательность целых чисел $\{L\}$ следующим образом: если $n\bar{\in}\{L\}$, то $\rho_n(0)=0$. Другими словами, $\{L\}$ содержит в себе все номера гармоник с ненулевой амплитудой.

Докажем утверждения.

Лемма 1. Если последовательность $\{L\}$ такова, что для любых чисел $m\in\{L\}$, $n\bar{\in}\{L\}$ выполнено условие $m\pm n\bar{\in}\{L\}$, то все коэффициенты Фурье решений задачи (2.1) с номерами $n\bar{\in}\{L\}$ равны нулю при $0\leqslant t<\infty$.

Доказательство. Можно проверить, что в условиях леммы все $r_n=0$, если $n\,\overline{\in}\,\{L\}$. Но тогда для всех $p\,\overline{\in}\,\{L\}$, $\dot{a}_p=0$, что следует из вида правых частей системы уравнений (3.1).

Пример 1. Взяв последовательность $\{L\}=\{0, 2, 4, 6, \ldots\}$, получим решения симметричные относительно середины отрезка $x=l/2$. Пример выхода на нетривиальное пространственно-неоднородное четное решение показан на рис. 3а. Обратим внимание на то, что все величины $\rho_n(t)$ стремятся к постоянным значениям при $t\to\infty$.

Последовательности $\{0, m, 2m, \ldots\}$, где m — любое натуральное число, также удовлетворяют условию леммы 1. Пример решения с $m=3$ приведен на рис. 3б. Заметим, что все последовательности, удовлетворяющие условиям леммы, должны содержать нуль. В противном случае $(0\,\overline{\in}\,\{L\})$ одновременно должны быть выполнены условия $k\in\{L\}$ и $k\pm 0\,\overline{\in}\,\{L\}$.

Лемма 2. Если последовательность $\{L\}$ такова, что

1) для всех m, $n\in\{L\}$ выполнено $m\pm n\,\overline{\in}\,\{L\}$;

2) для всех m, $n\,\overline{\in}\,\{L\}$ выполнено $m\pm n\,\overline{\in}\,\{L\}$,

то все коэффициенты Фурье решений задачи (2.1) с номерами $n\,\overline{\in}\,\{L\}$ равны нулю при $0\leqslant t<\infty$.

Доказательство. Непосредственно проверяется, что $r_n=0$, если $n\in\{L\}$. Из этого, как и в предыдущем случае, следует, что для всех $p\,\overline{\in}\,\{L\}$ $\dot{a}_p=0$.

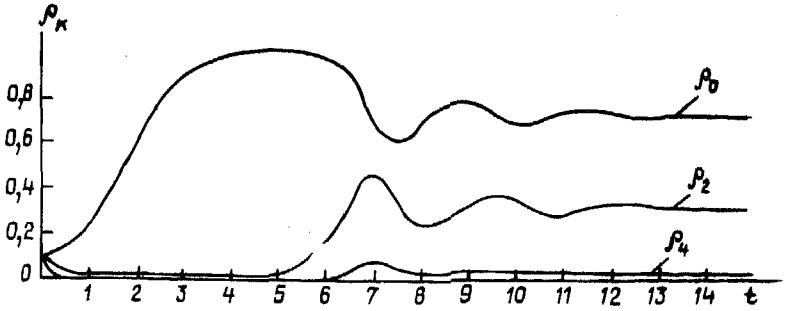
Пример 2. Последовательность такого типа дает ряд нечетных чисел $\{1, 3, 5, 7, \ldots\}$.

Отметим, что $0\,\overline{\in}\,\{L\}$ для всех последевательностей $\{L\}$, удовлетворяющих второй лемме.

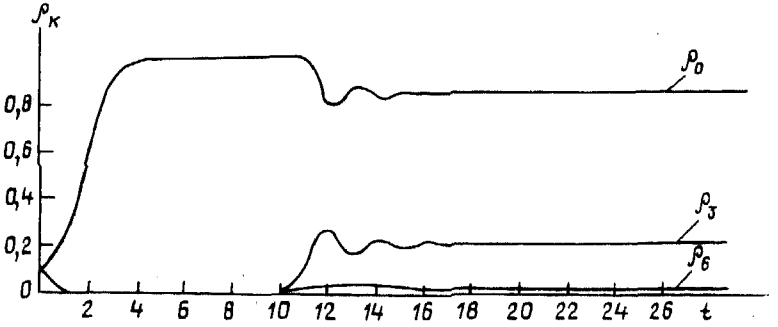
Доказанные утверждения оказываются полезны и в более общем случае. Пусть, например, $\{L\}=\{3, 9, 15, 21, \ldots\}$. Эта последовательность не удовлетворяет условиям лемм 1, 2. Однако она целиком содержится как в $\{L_1\}=\{0, 3, 6, 9, 12, \ldots\}$, так и в $\{L_2\}=\{1, 3, 5, 7, 9 \ldots\}$; $\{L_1\}$ удовлетворяет первой лемме, $\{L_2\}$ — второй. Поэтому решение задачи в частных производных будет содержать только моды с номерами $n\in\{L_1\}\cap\{L_2\}=\{L\}$. Пример численного расчета, соответствующего решению такого типа показан на рис. 3*в*.

Пусть ненулевая последовательность начальных данных удовлетворяет лемме 1, $0\in\{L\}$, m — следующий элемент этой последовательности. Если пространственно-однородное решение (2.3) неустойчиво относительно возмущений вида $\cos\left(\frac{\pi m x}{e}\right)$, то при $t\to\infty$ решение задачи (2.1) остается пространственно-неоднородным. Необходимое условие этого следует из формулы (2.10).

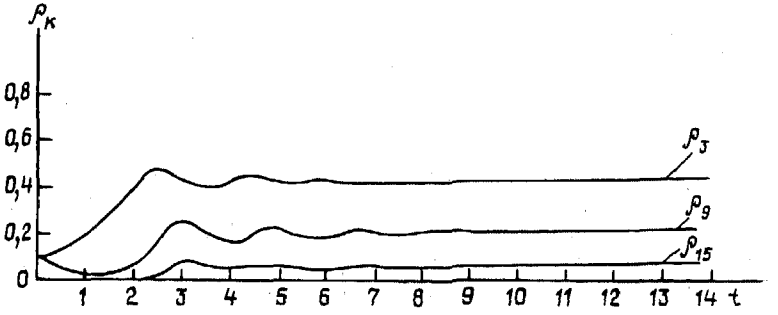
$$(\pi m/l)^2<-2(1+c_1c_2)/(1+c_1^2). \qquad (3.2)$$



а $L = \{0, 2, 4, 6 \ldots\}$; $C_1 = 1$, $C_2 = -8$, $\ell = \pi$



б $L = \{0, 3, 6, 9, \ldots\}$; $C_1 = 1$, $C_2 = -13$, $\ell = \pi$



в $L = \{3, 9, 15, 21, \ldots\}$; $C_1 = 1$, $C_2 = -13$, $\ell = 6\pi$

Рис. 3. Примеры эволюции симметричных решений

Чем больше длина области l, тем больше чисел m удовлетворяют неравенству (3.2) и, следовательно, тем больше различных типов симметричных начальных данных приводят к появлению пространственно-неоднородных решений.

Численное исследование задачи (2.1) показывает, что построенные симметричные решения во многих случаях неустойчивы относительно возмущений общего вида. Однако далее мы рассмотрим область параметров, где именно такие решения определяют поведение системы в случае начальных данных общего вида.

3.2. Класс нечетных решений. Рассмотрим в качестве примера класс нечетных решений уравнения Курамото—Цудзуки, соответствующий ненулевой последовательности $\{L\} = \{1, 3, 5, \ldots\}$.

Пусть $c_1 = 0$, начальные данные немонотонны по пространству и не являются симметричными. В расчетах можно выделить сложный переходный режим, он связан с возникновением и исчезновением экстремумов, перестройкой профилей $u(x, t)$ и $v(x, t)$. Однако затем немонотонности сглаживаются и происходит выход на пространственно-однородное решение (2.3).

Выберем теперь нечетные начальные данные. В уравнение входят только нечетные степени функций и четные производные по координате. Поэтому ясно, что если бы точка, находившаяся вначале в середине отрезка, в которой $u(x, t) = 0$ или $v(x, t) = 0$, смещалась, то это нарушило бы симметрию положительной и отрицательной частей решения. Этот же вывод следует из леммы 2.

Картина процесса качественно отличается от наблюдаемой в случае начальных данных общего вида (см. рис. 4). Функции $u(x, t)$ и $v(x, t)$ меняются сложным образом. Однако их коэффициенты Фурье $a_k(t)$, $b_k(t)$ быстро убывают с ростом их номера и достаточно просто зависят от времени. При $t > 65$ амплитуда нулевой гармоники возрастает, симметрия теряется.

Последнее обстоятельство связано с особенностями используемых алгоритмов и вычислительных машин. Они вносят малые возмущения в четные гармоники и поэтому не позволяют в полной мере передать свойства задачи (2.1). Тем не менее этот расчет показывает, что нечетное решение будет неустойчиво и позволяет оценить его инкремент. Если изменять длину области, зафиксировав все остальные параметры, то в больших областях нечетные решения имеют большую амплитуду, меньший период и меньший инкремент. При этом нетривиальное нечетное решение возникает только при $l \gtrsim 3$, в меньших областях $\rho_n(t) \to 0$ при $t \to \infty$ (это решение также неустойчиво относительно нулевой гармоники).

Отметим, что нечетные начальные данные разного вида приводят к одному и тому же асимптотическому поведению при $t \to \infty$. Важно было бы выяснить, как зависит период предель-

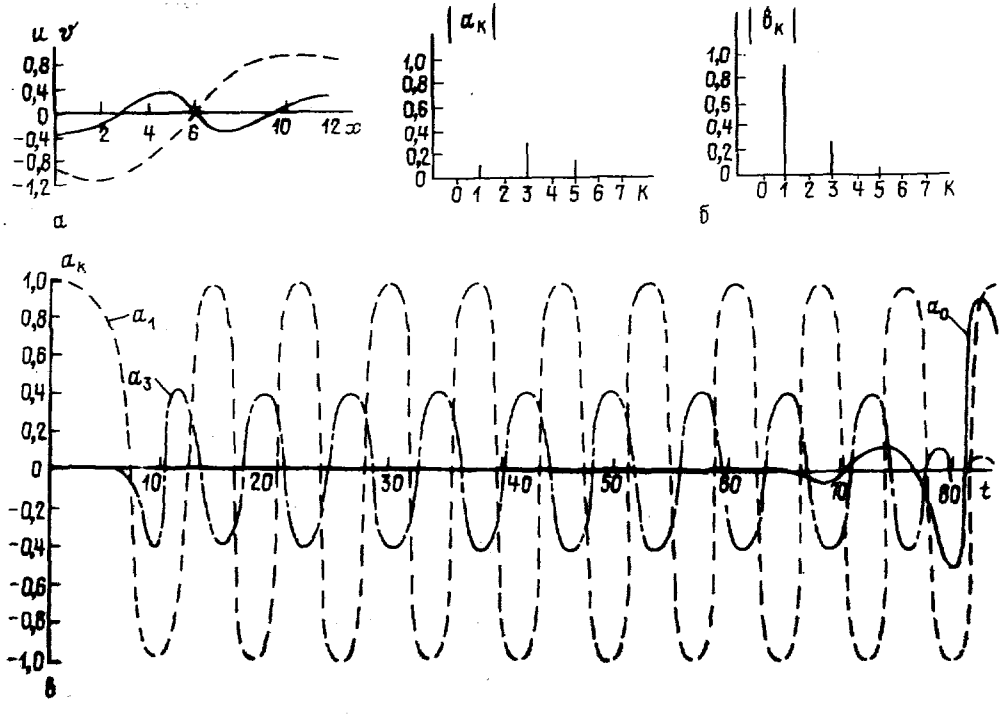


Рис. 4. Эволюция нечетного решения при $c_1=0$, $c_2=1$, $l=11{,}9$:

а) вид функций u и v на один из моментов времени, *б*) амплитуды их коэффициентов Фурье, *в*) закон изменения $a_n(t)$

ного решения и его амплитуда от параметров c_1, c_2 и l. Чтобы ответить на этот вопрос, рассмотрим некоторый приближенный метод анализа изучаемой системы.

3.3. Упрощенная модель. Поскольку коэффициенты Фурье решений быстро убывают с ростом их номера, приближенный метод должен давать закон изменения по крайней мере нескольких первых гармоник. Предположим, что в изучаемом решении есть только две моды

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \cos kx, \tag{3.3}$$

k будем выбирать так, чтобы выполнялись граничные условия задачи (2.1). Как правило, k будет равно π/l, что определяет первую гармонику. Подставим (3.3) в формулу (2.1) и отбросим все члены, куда входит $\cos(\pi m x/l)$, $m>1$, считая, что они пренебрежимо малы. Это приводит к замкнутой системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{gathered}
\dot{x}_0 = x_0 - (x_0 - c_2 y_0)(\rho_0^2 + \rho_1^2/2) - s(x_1 - c_2 y_1), \\
\dot{y}_0 = y_0 - (c_2 x_0 + y_0)(\rho_0^2 + \rho_1^2/2) - s(c_2 x_1 + y_1), \\
\dot{x}_1 = x_1 - (x_1 - c_2 y_1)(\rho_0^2 + 3\rho_1^2/4) - 2s(x_0 - c_2 y_0) - k^2(x_1 - c_1 y_1), \\
\dot{y}_1 = y_1 - (c_2 x_1 + y_1)(\rho_0^2 + 3\rho_1^2/4) - 2s(c_2 x_0 + y_0) - k^2(c_1 x_1 + y_1),
\end{gathered} \tag{3.4}$$

где $\rho_0^2 = x_0^2 + y_0^2$, $\rho_1^2 = x_1^2 + y_1^2$, $s = x_0 x_1 + y_0 y_1$. Перепишем эту систему в более удобном для дальнейшего анализа виде. Если положить $x_0 = \rho_0 \cos\varphi_0$, $y_0 = \rho_0 \sin\varphi_0$, $x_1 = \rho_1 \cos\varphi_1$, $y_1 = \rho_1 \sin\varphi_1$, то получатся соотношения

$$\begin{gathered}
\dot{\rho}_0 = \rho_0 - \rho_0(\rho_0^2 + \rho_1^2/2) - \rho_0\rho_1^2 \cos\Psi\,[\cos\Psi + c_2 \sin\Psi], \\
\dot{\rho}_1 = \rho_1 - \rho_1(\rho_0^2 + 3\rho_1^2/4) - 2\rho_0^2\rho_1 \cos\Psi\,[\cos\Psi - c_2 \sin\Psi] - k^2\rho_1, \\
\dot{\varphi}_0 = -c_2(\rho_0^2 + \rho_1^2/2) + \rho_1^2 \cos\Psi\,[\sin\Psi - c_2 \cos\Psi], \\
\dot{\varphi}_1 = -c_2(\rho_0^2 + 3\rho_1^2/4) - 2\rho_0^2 \cos\Psi\,[\sin\Psi + c_2 \cos\Psi] - c_1 k^2,
\end{gathered} \tag{3.5}$$

где $\Psi = \varphi_0 - \varphi_1$. От (3.5) можно перейти к системе трех уравнений

$$\begin{gathered}
\dot{\xi} = 2\xi - 2\xi(\xi + \eta) - \xi\eta(\cos\theta + c_2 \sin\theta), \\
\dot{\eta} = 2\eta - 2\eta(2\xi + 3\eta/4) - 2\xi\eta(\cos\theta - c_2 \sin\theta) - 2k^2\eta, \\
\dot{\theta} = c_2(2\xi - \eta/2) + \sin\theta(2\xi + \eta) + c_2 \cos\theta(2\xi - \eta) + 2c_1 k^2.
\end{gathered} \tag{3.6}$$

Связь между переменными ξ, η, θ и ρ_0, ρ_1, φ_0, φ_1 определяется соотношениями

$$\begin{gathered}
\xi = \rho_0^2, \quad \eta = \rho_1^2, \quad \varphi_0 - \varphi_1 = \theta/2, \\
\dot{\varphi}_0 = -c_2(\xi + \eta) + 0{,}5\eta(\sin\theta - c_2 \cos\theta).
\end{gathered} \tag{3.7}$$

Возможность перейти к системе трех уравнений связана с симметрией (2.9), которой обладает исходная система. Нас будет

интересовать асимптотическое поведение упрощенной двухмодовой системы при $t \to \infty$. Рассмотрим ее простейшие решения.

Первое решение — это неустойчивый узел в системе (3.4),

$$x_0=0,\ y_0=0,\ x_1=0,\ y_1=0, \tag{3.8}$$

которому соответствует инвариантная прямая в динамической системе (3.6).

$$\xi=0,\ \eta=0,\ \theta=2c_1k^2t+\text{const}. \tag{3.9}$$

Другое решение можно получить, положив $x_1=0$, $y_1=0$:

$$x_0=\cos(-c_2t+\alpha),\ y_0=\sin(-c_2t+\alpha),\ x_1=0,\ y_1=0, \tag{3.10}$$

где α — действительная постоянная. В уравнениях (3.6) ему соответствует устойчивая инвариантная прямая $\xi=1$, $\eta=0$, $\theta=\theta(t)$, если выполнено неравенство

$$c_1^2k^4+2c_1c_2k^2-1>0. \tag{3.11}$$

На кривой $c_1^2k^4+2c_1c_2k^2-1=0$ рождается пара особых точек $\xi=1$, $\eta=0$: седло и устойчивый узел. Этот узел теряет устойчивость на линии

$$(c_1^2+1)\,k^4+2k^2(1+c_1c_2)=0. \tag{3.12}$$

Естественно сопоставить решения с $\xi=1$, $\eta=0$ пространственно-однородным решениям задачи в частных производных. Предельный цикл (3.10) также теряет устойчивость на линии (3.12).

Пусть теперь $\rho_0(0)=0$, тогда $\rho_0(t)=0$, $0\leqslant t<\infty$. Из (3.5) получим, что $\rho_1\to\bar{\rho}$, $\dot{\varphi}_1\to\omega_1$ при $t\to\infty$, причем

$$\bar{\rho}=\begin{cases}\sqrt{4(1-k^2)/3}, & k\leqslant 1,\\ 0, & k>1,\end{cases}\qquad \omega_1=-3c_2\bar{\rho}^2/4-c_1k^2. \tag{3.13}$$

Аналогом такого решения в системе (3.6) может быть инвариантная прямая $\xi=0$, $\eta=\bar{\rho}^2$, $\theta=\theta(t)$ или пара особых точек. Условием существования особых точек является следующее неравенство

$$P(c_1, c_2, k)\leqslant 0,\quad k<1,$$

где $P(c_1, c_2, k)=(9c_1^2+6c_1c_2-4-3c_2^2)\,k^4-2k^2(3c_1c_2-4-3c_2^2)-(4+3c_2^2)$. Одна из этих точек устойчива, если

$$-(4k^2-1)^2<P(c_1, c_2, k).$$

Решение с $\xi=0$ является инвариантной прямой, когда

$$P(c_1, c_2, k)>0.$$

Эта прямая устойчива при $k<1/2$.

Если провести аналогию между нечетными решениями задачи в частных производных и решениями системы (3.5), у которых

$\rho_0=0$, то можно сделать следующие качественные предсказания. При нечетных начальных данных величина $\rho_1=(a_1^2+b_1^2)^{1/2}$ постоянна, по-видимому, постоянны и величины $\rho_n=(a_n^2+b_n^2)^{1/2}$, $n=2m+1$, $m=1, 2, 3, \ldots$ при $t\to\infty$. Выход на одно и то же решение происходит с целого класса нечетных начальных данных. Нетривиальные нечетные решения возникают только в областях, длина которых превышает некоторую критическую (из (3.13) следует ее оценка $l_c=\pi$).

Расчеты, проведенные для задачи (2.1), полностью подтверждают эти предсказания [10]. В примере, показанном на рис. 4, амплитуда первой гармоники равна $\approx 1{,}1$, период решения $T\approx 7{,}5$. Из формул (3.13) следует, что $\rho=1{,}11$, $T=2\pi/\omega_1=6{,}75$. В этом случае можно говорить не только о качественном, но и количественном соответствии этих характеристик. Для нечетных начальных данных неплохое соответствие наблюдается при $l<4\pi-5\pi$ [10].

Таким образом, уравнения (3.4) оказываются полезной упрощенной моделью, и в дальнейшем мы рассмотрим их более подробно.

§ 4. Двухмодовая система и ее свойства

4.1. Простейшие свойства решений. Рассмотрим простейшие свойства динамической системы (3.6).

Ограниченность решений. Воспользовавшись первыми двумя уравнениями системы (3.6), посмотрим, как меняется величина $2\xi+\eta$:

$$2\dot{\xi}+\dot{\eta}=2(2\xi+\eta)-(2\xi+\eta)^2-\eta^2/2-2k^2\eta-$$
$$-4\xi\eta(1+\cos\theta)\leqslant 2(2\xi+\eta)-(2\xi+\eta)^2. \qquad (4.1)$$

Из последнего неравенства следует, что $2\xi+\eta\leqslant z$, где $z(t)$ — решение уравнения

$$\dot{z}=2z-z^2, \quad z(0)=2\xi(0)+\eta(0)\geqslant 0. \qquad (4.2)$$

Так как $z(t)$ ограничена, а $\xi\geqslant 0$, $\eta\geqslant 0$, то каждая из функций $\xi(t)$, $\eta(t)$ также ограничена.

Диссипативность системы. Важной характеристикой динамической системы является величина Ω, которая определяет скорость изменения малого объема в фазовом пространстве при движении по траекториям: $\dot{V}=\Omega V$. Эта величина характеризует диссипативные свойства системы, показывает, насколько быстро ее решения сходятся к аттрактору. В нашем случае

$$\Omega=\partial\dot{\xi}/\partial\xi+\partial\dot{\eta}/\partial\eta+\partial\dot{\theta}/\partial\theta=4-2k^2-8\xi-5\eta. \qquad (4.3)$$

Величина Ω не зависит явно от параметров c_1, c_2 и от перемен-

ной θ. В случае $k>\sqrt{2}$ (достаточно малые значения l) система всюду диссипативна. При $k<\sqrt{2}$ в фазовом пространстве появляется область, где $\Omega>0$. В ней не могут лежать ни устойчивые особые точки, ни устойчивые предельные циклы. Эта область расположена ниже прямой $8\xi+5\eta=4-2k^2$, то есть достаточно близко к началу координат. В большинстве систем, исследованных к настоящему времени, величина Ω постоянна во всем фазовом пространстве. В этом смысле уравнения (3.6) представляют собой более сложный объект.

4.2. Особые точки. Выше мы рассмотрели простейшие решения динамической системы, у которых $\xi=0$ или $\eta=0$. Будем считать, что $\xi\neq0$, $\eta\neq0$. Тогда из (3.6) получаем систему уравнений

$$\begin{gathered}2-2(\xi+\eta)-\eta(\cos\theta+c_2\sin\theta)=0,\\ 2-2(2\xi+3\eta/4)-2\xi(\cos\theta-c_2\sin\theta)-2k^2=0,\\ c_2(2\xi-\eta/2)+\sin\theta(2\xi+\eta)+c_2\cos\theta(2\xi-\eta)+2c_1k^2=0.\end{gathered}\tag{4.4}$$

Два первые уравнения позволяют выразить ξ и η через $\cos\theta$ и $\sin\theta$. Подставив эти выражения в третье уравнение и обозначив $\varepsilon=(c_2^2+1)/[k^2(c_1-c_2)]$, $y=\operatorname{tg}(\theta/2)-\varepsilon/2$, получим следующее равенство

$$\begin{gathered}y^4+by^2+cy+d=0,\ b=-1{,}5\varepsilon^2+8\varepsilon c_1k^2-14,\\ c=\varepsilon(\varepsilon^2-8\varepsilon c_1k^2+8k^2),\ d=-3\varepsilon^4/16+2c_1k^2\varepsilon^3+\varepsilon^2(3{,}5-4k^2)-15.\end{gathered}\tag{4.5}$$

Координаты особой точки определяются соотношениями

$$\begin{gathered}\xi=\frac{(1+2k^2)x^2+4c_2(k^2-1)x+(6k^2-3)}{x^4+(8c_2^2-6)x^2-15}(1+x^2),\quad x=y+\varepsilon/2,\\ \eta=\frac{4(1+x^2)(-k^2x^2+2c_2x-k^2-2)}{x^4+(8c_2^2-6)x^2-15},\quad \cos\theta=\frac{1-x^2}{1+x^2},\quad \sin\theta=\frac{2x}{1+x^2}\end{gathered}\tag{4.6}$$

Из вида уравнения (4.5) следует, что при всех $c_1\neq c_2$ у него есть по крайней мере два действительных корня. В самом деле, функция в левой части (4.5) непрерывна, при $y=-\varepsilon/2$ она равна -15, а при $y\to\pm\infty$ ее значения положительны. Записав уравнение четвертой степени для величины x, можно убедиться, что его свободный член всегда отрицателен. Отсюда следует, что уравнение (4.5) не может иметь четырехкратного корня. Оно имеет двухкратный корень, если выполнены равенства

$$\begin{gathered}\sqrt{-b\pm\sqrt{b^2+12d}}\,[2b\pm\sqrt{b^2+12d}]=+3\sqrt{3/2}\,c,\\ \sqrt{-b\pm\sqrt{b^2+12d}}\,[2b\pm\sqrt{b^2+12d}]=-3\sqrt{3/2}\,c\end{gathered}\tag{4.7}$$

и корень кратности три при условии

$$b^2+12d=0,$$
$$-8b^3=27c^2. \tag{4.8}$$

Особая точка с координатами $\{\xi, \eta, \theta\}$, которая определяется соотношениями (4.5), (4.6), устойчива, если отрицательны действительные части всех собственных значений матрицы

$$A=\begin{vmatrix} 2-4\xi-\eta(2+\cos\theta+c_2\sin\theta) & -\xi(2+\cos\theta+c_2\sin\theta) & \xi\eta(\sin\theta-c_2\cos\theta) \\ -2\eta(2+\cos\theta-c_2\sin\theta) & 2(1-k^2)-3\eta-2\xi(2+\cos\theta-c_2\sin\theta) & 2\xi\eta(\sin\theta+c_2\cos\theta) \\ 2(c_2+\sin\theta+c_2\cos\theta) & -c_2/2+\sin\theta-c_2\cos\theta & (2\xi+\eta)\cos\theta-c_2(2\xi-\eta)\sin\theta \end{vmatrix}. \tag{4.9}$$

Формулы (4.4)—(4.9) дают полную информацию о каждой особой точке системы уравнений (3.6). Посмотрим, какие качественные выводы можно сделать, исходя из этих соотношений.

Основные закономерности рассмотрим на примере систем с $k=1$. Обратимся к уравнению (4.5). Результаты его исследования представлены на рис. 5—8. Расчеты показывают, что для всех значений c_1 и c_2 уравнение (4.5) при $k=1$ имеет хотя бы один корень, определяющий особую точку с $\eta<0$. На рис. 5 показано число точек, у которых $\xi>0$, $\eta>0$, в различных областях параметров. Число таких точек может измениться при переходе через линии ABC и $DMEQF$ на плоскости $\{c_1, c_2\}$.

Кривая ABC определяется соотношением (3.12), при $c_1-\infty$ она имеет асимптотику $c_2=-0{,}5c_1k^2$. Выше и левее этой кривой (в том числе для всех $c_1<0$) устойчива особая точка $\xi=1$, $\eta=0$ (либо особая прямая). Она и определяет асимптотику системы. На линии ABC точка $\xi=1$, $\eta=0$ теряет устойчивость. Одно из собственных значений матрицы A становится равным нулю. Одновременно с этим точка из области $\xi>0$, $\eta<0$ переходит в область $\xi>0$, $\eta>0$ и становится устойчивой.

Линия $DMEQF$ — кривая кратных корней. Она определяется формулами (4.7). На этой кривой появляются или исчезают два состояния равновесия. На участке QF она близка к прямой, найдем ее асимптотику при $|c_2|\gg 1$, полагая $|c_1|\sim|c_2|\sim$ $\sim|\varepsilon|\to\infty$. Оставляя в выражениях для коэффициентов b, c, d главные члены, имеем из (4.7)

$$3\sqrt{3/2}\,\varepsilon(-\varepsilon^2+8\varepsilon c_1k^2)+\ldots=3\sqrt{3/2}\,\varepsilon(\varepsilon^2-8\varepsilon c_1k^2)+\ldots, \tag{4.10}$$

что эквивалентно уравнению

$$\varepsilon=8c_1k^2 \text{ или } \frac{c_2}{c_1}=-4k^4\pm\sqrt{16k^8+8k^4}. \tag{4.11}$$

В нашем случае из (4.11) следует

$$c_2/c_1=-4-2\sqrt{6}\approx-8{,}9,$$

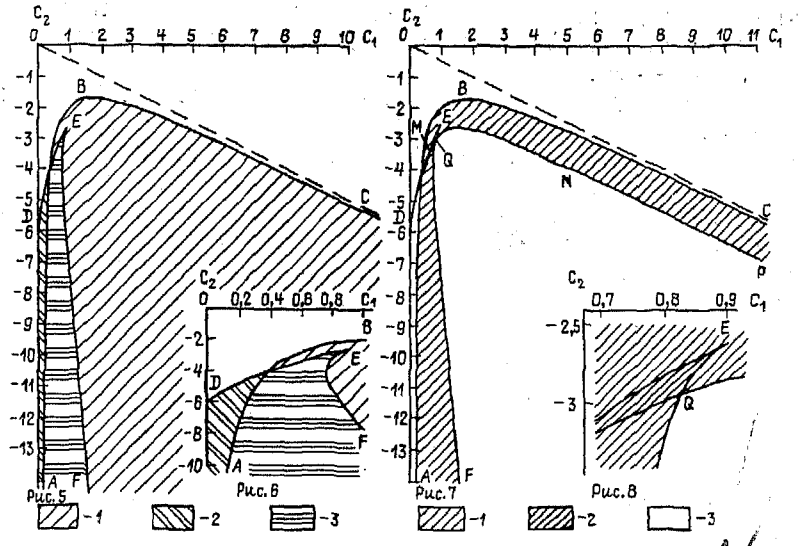


Рис. 5, 6. Число особых точек системы (3.6) при $k=1$:
1 — 1 точка, 2 — 2 точки, 3 — 3 точки

Рис. 7, 8. Число устойчивых особых точек при $k=1$:
1 — точка, 2 — 2 точки, 3 — устойчивых точек нет

что совпадает с зависимостью, наблюдаемой в расчетах. Таковы уравнения, описывающие границы областей с различным числом особых точек. Наибольший интерес представляют устойчивые точки, которые определяют асимптотику процесса.

На рис. 7 и 8 показано число устойчивых особых точек системы уравнений (3.6) в зависимости от параметров c_1 и c_2. Кривые ABC и $DMEQF$ те же, что и на рис. 5 и 6. Кроме них важную информацию об устойчивости дает линия $MQNP$, на которой происходит бифуркация Хопфа. На этой линии матрица A имеет два чисто мнимых собственных значения, одна из особых точек системы теряет на ней устойчивость. В области, ограниченной линиями $FQNP$, устойчивых особых точек нет. Аттракторы являются предельными циклами или имеют более сложную структуру. Отметим также, что в области MEQ на плоскости $\{c_1, c_2\}$ система (4.6) имеет две устойчивые особые точки.

Выясним, как ведет себя система уравнений (4.6) при $|c_2|\to\infty$. Можно ли утверждать, что в этой области параметров у нее есть устойчивые особые точки? Каковы их характеристики? Эти вопросы рассматривались в работах [6, 11, 113].

Результаты проведенного анализа содержатся в таблице 1. Из нее видно, что в этой области всегда есть, по крайней мере, одна устойчивая точка $\{\xi^*, \eta^*\}$. Причем $\xi^* \xrightarrow[|c_2|\to\infty]{} 1$, $\eta^* \xrightarrow[|c_2|\to\infty]{} 0$.

Существует диапазон параметров, где может быть устойчива еще одна точка. Так обстоит дело, например, если $k=3$, $c_1=3$, $c_2\to-\infty$.

Поведение динамической системы (4.6) при c_2, близких к нулю, определяет решение с $\xi=1$, $\eta=0$. Расчеты показывают, что с уменьшением c_2 аттрактор усложняется, появляются другие точки, предельные циклы, непериодические решения. Однако система обладает интересной особенностью: при $c_2\to-\infty$ в ней происходит стабилизация процессов. Асимптотику снова определяют решения, соответствующие особой точке $\{\xi^*, \eta^*\}$. Причем $\xi^*\to1$, $\eta^*\to0$ при $c_2\to-\infty$. Таким образом, процессы в системе при $c_2\to0$ и $c_2\to-\infty$ качественно аналогичны.

Рассмотрим особенности появления состояний равновесия. На кривой $DMEQF$ у системы появляются две особые точки. Расчеты показывают, что на участке ME одна из них устойчива, на участке DM неустойчивы обе. Та или иная ситуация реализуется в зависимости от собственных значений матрицы **A** на кривой кратных корней. Одно из собственных значений на линии $DMEQF$ всегда равно нулю. Если хотя бы одно из двух других имеет положительную действительную часть, то оба возникших состояния равновесия неустойчивы. Если же реальные части обоих собственных значений отрицательны, то появляется одна устойчивая и одна неустойчивая особая точка.

Наглядное представление о появлении состояний равновесия дает рис. 9. Зафиксируем значение c_1 и будем уменьшать параметр c_2. Изменение величины $\rho_0=\xi^{1/2}$ всех особых точек с $\xi>0$, $\eta>0$ и $\xi=1$, $\eta=0$, полученное в расчетах для разных значений c_1, показано на рисунке. Те значения параметра c_2, при которых меняется число особых точек или их устойчивость, обозначены буквами A, B_1, B_2, B_3, C.

Точка A лежит на линии ABC, точка C на линии бифуркации Хопфа. B_1, B_2, B_3 определяются линией кратных корней. В точках B_1 и B_3 у системы (3.6) появляются два новых состояния равновесия. В точке B_2 два состояния равновесия исчезают.

Если $|c_1|\ll1$, то у системы всегда есть одна устойчивая особая точка (типичная ситуация представлена на рисунке 9*а*). Когда $|c_1|\gg1$, в некоторой области параметров устойчивых точек нет (см. рис. 9*г*). В промежуточном случае картина может быть более сложной, ее иллюстрируют рисунки 9*б* и 9*в*. Видно, что здесь одновременно существуют две устойчивые точки, динамическая система (3.6) при этом обладает триггерными свойствами.

Отметим, что одно из состояний равновесия, возникших на линии кратных корней, устойчиво. Это особенно интересно. Усложнение системы при изменении параметра в синергетике обычно связывают с последовательными бифуркациями и в качестве основного аппарата используют теорию ветвления [52, 70]. В изучаемой модели наблюдается совершенно другое по-

Таблица 1

Корни уравнения четвертой степени	Особые точки системы (3.6)	Матрица линеаризованной системы уравнений (3.6)	Уравнение для собственных значений этой матрицы	Условие устойчивости особой точки при $c_2 \to \infty$.
$x_1 = \frac{15}{(8\kappa^2-14)\varepsilon}$ $x_1 \to 0$ $c_2 \to \infty$	$\xi_1 = \frac{7-4\kappa^2}{35}$ $\eta_1 = \frac{8}{3}\,\frac{7-4\kappa^2}{35}$ $\theta_1 = 2\pi n$ $n = 0, \pm 1 \ldots$	$\begin{pmatrix} \frac{8\kappa^2-14}{35} & -\frac{3\kappa^2+21}{35} & -c_2\frac{8}{3}\frac{(7-4\kappa^2)^2}{35^2} \\ \frac{16(9\kappa^2-7)}{35} & \frac{4(4\kappa^2-7)}{35} & c_2\frac{16}{3}\frac{(7-4\kappa^2)^2}{35^2} \\ 4c_2 & -3c_2/2 & \frac{2(49-13\kappa^2)}{105} \end{pmatrix}$	$\lambda^3 + \frac{28-46\kappa^2}{105}\lambda^2 + \frac{56}{3}c_2^2\frac{(7-4\kappa^2)^2}{35^2}\lambda + \frac{16}{3}c_2^2\frac{(7-4\kappa^2)^3}{35^2} = 0$	Неустойчива, если $\xi_1 > 0$, $\eta_1 > 0$
$x_2 = -2\varepsilon + 4c_1\kappa^2$ $x_2 \to \infty$ $c_2 \to \infty$	$\xi_2 = 1$ $\eta_2 = \frac{-8c_1\kappa^6}{c_2(1+2\kappa^4)}$ $\eta_2 \to 0, c_2 \to \infty$ $\theta_2 = \pi + 2\pi n$ $n = 0, \pm 1 \ldots$	$\begin{pmatrix} -2 & -1-\kappa^2 & -\frac{8c_1\kappa^6}{1+2\kappa^4} \\ 0 & 0 & \frac{16c_1\kappa^6}{1+2\kappa^4} \\ 0 & c_2/2 & -2(1+\kappa^2) \end{pmatrix}$	$(\lambda+2)(\lambda^2 + 2(1+\kappa^2)\lambda - \frac{8c_1c_2\kappa^6}{1+2\kappa^4}) = 0$	$c_1c_2 < 0$
$x_{3,4} = -2c_1\kappa^2 \pm \sqrt{4c_1^2\kappa^4 - 4\kappa^2 + 7}$	$\xi_{3,4} = \frac{(\kappa^2-1)(1+x_{3,4}^2)}{2c_2x_{3,4}}$ $\eta_{3,4} = \frac{1+x_{3,4}^2}{c_2x_{3,4}}$ $\sin\theta_{3,4} = \frac{2x_{3,4}}{1+x_{3,4}^2}$ $\cos\theta_{3,4} = \frac{1-x_{3,4}^2}{1+x_{3,4}^2}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1-\kappa^2 & -\frac{(1-x_{3,4}^4)(\kappa^2-1)}{2c_2x_{3,4}^2} \\ 4 & 0 & \frac{(1-x_{3,4}^4)(\kappa^2-1)}{c_2x_{3,4}^2} \\ \frac{4c_2}{1+x_{3,4}^2} & \frac{c_2(x_{3,4}^2-3)}{2(1+x_{3,4}^2)} & 4-2\kappa^2 \end{pmatrix}$	$\lambda^3 + (2\kappa^2-4)\lambda^2 + \frac{\kappa^2-1}{2x_{3,4}^2}(x_{3,4}^4+7)\lambda - \frac{\kappa^2-1}{x_{3,4}^2}(x_{3,4}^2+1)\cdot(x_{3,4}^2-4\kappa^2+7) = 0$	Либо $\begin{cases} \kappa^2 > 2 \\ x_{3,4}^2 < 4\kappa^2-7 \\ x_{3,4}^2 < \min\left[1, \frac{3\kappa^2-7}{\kappa^2-1}\right] \end{cases}$ либо $\begin{cases} \kappa^2 > 2 \\ x_{3,4}^2 < 4\kappa^2-7 \\ x_{3,4}^2 > \max\left[1, \frac{3\kappa^2-7}{\kappa^2-1}\right] \end{cases}$

Асимптотическое поведение особых точек системы уравнений (3.6) при $c_2 \to \infty$.
В матрице линеаризованной системы выписаны только главные члены.

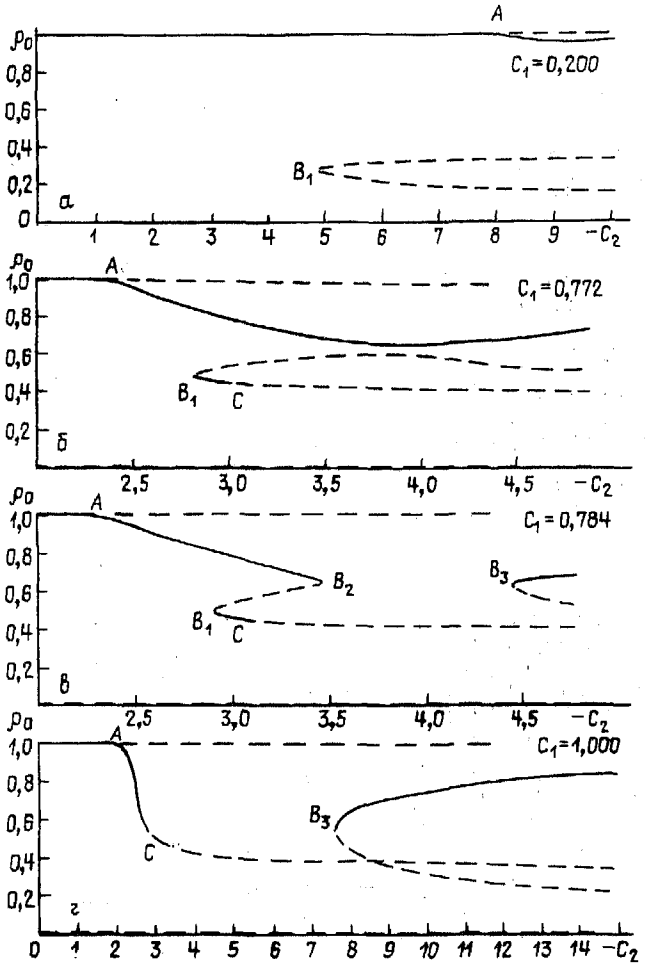


Рис. 9. Картина появления особых точек с $\xi>0$, $\eta\geqslant 0$ при разных значениях c_1. ——— — устойчивая точка, - - - - - - — неустойчивая точка

ведение: устойчивая точка, определяющая асимптотику системы, появляется не в результате ветвления ранее имевшихся решений. По-видимому, такая ситуация является достаточно общей. Ее анализ требует привлечения других методов (например, идей теории катастроф [5, 29]) и дальнейшего развития существующих представлений.

4.3. Устойчивые предельные циклы. Остановимся на периодических решениях уравнений (3.6). Пусть функции $\xi(t)$, $\eta(t)$, $\theta(t)$ удовлетворяют этой динамической системе, причем

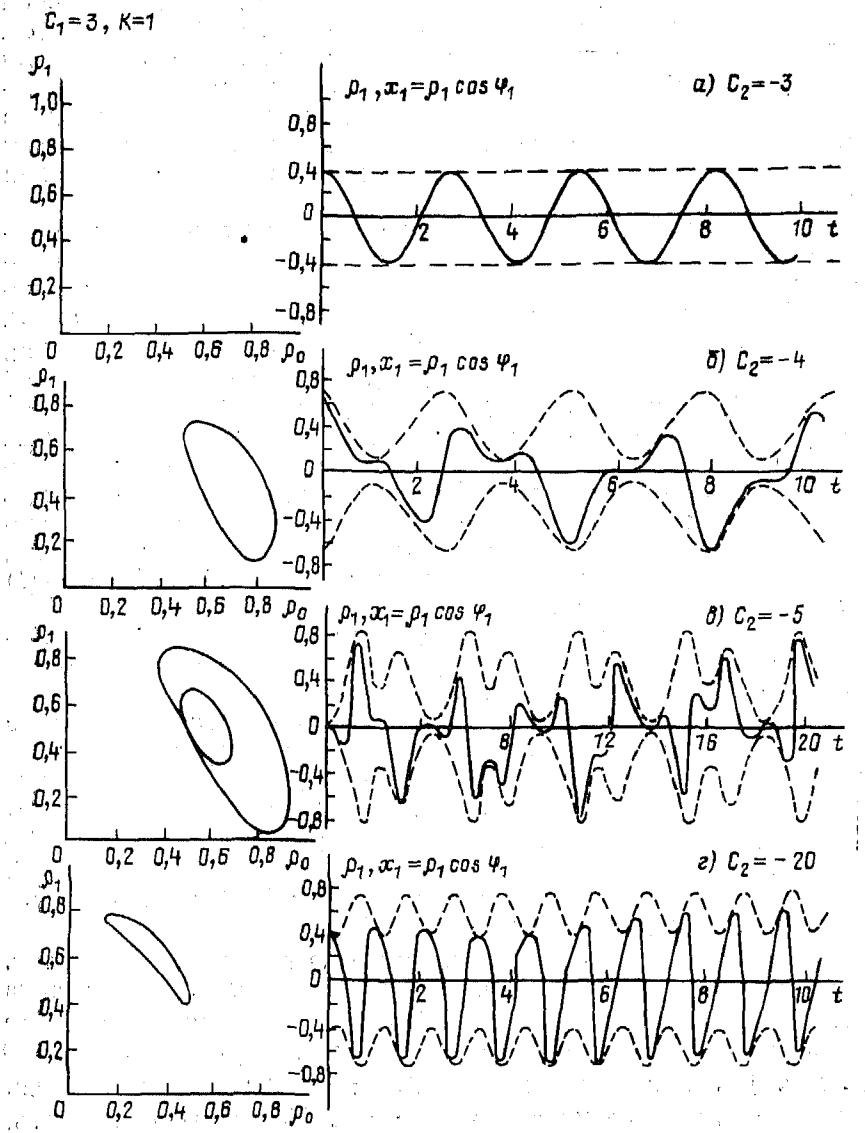


Рис. 10. Автоколебания, соответствующие различным типам аттракторов системы (3.6). Сплошной линией на рисунках справа показаны решения системы (3.4)

3

$\xi(t+T)=\xi(t)$, $\eta(t+T)=\eta(t)$. Тогда можно проверить, что

$$\theta(t+T)-\theta(t)=2\pi m,\ m=0,\ \pm1,\ \pm2,\ldots \qquad (4.12)$$

Обычным предельным циклам, которые представляют собой замкнутые траектории в пространстве ξ, η, θ ($0\leqslant\xi<\infty$, $0\leqslant\eta<\infty$, $-\infty<\theta<\infty$), соответствуют решения с $m=0$. Если $m\neq0$, то функции $\{\xi(t), \eta(t), \theta(t)\}$ определяют спирали. В литературе их называют предельными циклами второго рода, в отличие от решений с $m=0$, которые называют предельными циклами первого рода. Для краткости и те, и другие решения будем называть циклами.

Удобно различать циклы по числу оборотов n, которые делает проекция точки $\{\xi, \eta, \theta\}$ на плоскость $\{\xi, \eta\}$ вокруг некоторой центральной области, возвращаясь в начальное положение [11]. Циклы, которые характеризуются числами m и n, будем обозначать S_m^n. Циклы S_m^1 будем называть простыми.

Обратим внимание на связь между решениями двухмодовой системы (3.4) и системы (3.6). Особой точке в уравнениях (3.6) соответствует периодическое решение в модели (3.4) (см. рис. 10). Предельным циклам различных типов — двухчастотные режимы, при которых функции x_0, x_1, y_0, y_1 могут быть непериодичны [19]. Переход от (3.4) к (3.6) позволяет упростить описание. Далее, говоря о циклах в упрощенной модели, мы будем иметь в виду периодичность функций $\rho_0(t)$ и $\rho_1(t)$ (соответственно ξ и η).

Рассмотрим периодические решения системы (3.6), у которой $k=1$. Выделим наиболее интересные качественные особенности решений и отметим их общие черты.

На рис. 11 показано разбиение плоскости параметров $\{c_1, c_2\}$ на области, в которых аттракторы системы (3.6) имеют различный тип. На кривой QNP (см. рис. 7, 8) особая точка, определявшая асимптотику системы, теряет устойчивость. Происходит бифуркация рождения предельного цикла S_0^1, бифуркация Хопфа. Возникающий цикл устойчив на участке QN. На участке NP при переходе через линию QNP скачком появляются непериодические решения [13].

При уменьшении c_2 амплитуда устойчивого цикла S_0^1 растет. Начиная с некоторого значения этого параметра, асимптотика системы определяется циклом S_1^1. По мере приближения к точке перехода c_2^* цикл приближается к одному из седел $\xi=1$, $\eta=0$ (см. рис. 12). После перехода $c_2<c_2^*$ цикл от него удаляется. При $c_2=c_2^*$ цикл проходит через седло. Естественно ожидать, что при этом $T(c_2)\to\infty$, $c_2\to c_2^*$. Именно такая зависимость и наблюдается в расчетах (см. рис. 14). Линия, на которой меняется тип цикла, показана на рис. 11.

Существует область параметров на плоскости $\{c_1, c_2\}$, где

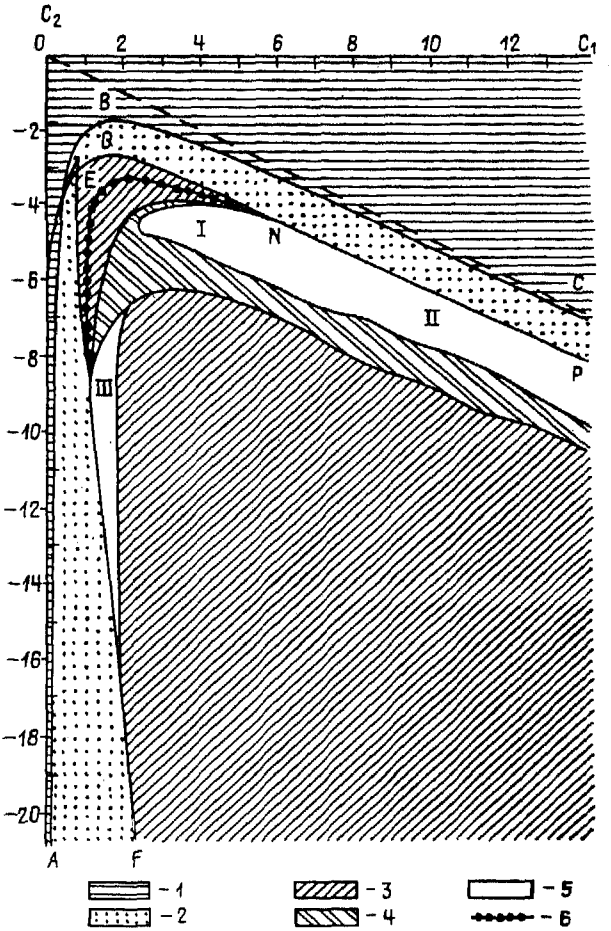


Рис. 11. Типы аттракторов для системы уравнений (3.6) при $k=1$:
1—точка $\xi=1$, $\eta=0$, 2—особая точка с $\xi>0$, $\eta>0$, 3—простой цикл, 4—цикл S^2, 5—более сложные решения, 6—линия, на которой происходит переход $S_0^1 \to S_1^1$, QNP—линия бифуркации Хопфа. Картина получена в результате численного решения уравнений (3.6). Шаг по параметру c_1 $h_1=1{,}0$, по параметру c_2 $h_2=0{,}5$. В окрестности границ между областями шаг уменьшался до 0,1. Начальными данными для задачи с параметрами $\{c_1, c_2-h_2\}$ ниже линии ABC служила точка, принадлежащая аттрактору системы для значений $\{c_1, c_2\}$

происходит усложнение периодических решений (см. рис. 11). В этой области наблюдается последовательность бифуркаций удвоения периода, теория которых интенсивно развивается в настоящее время [27, 84, 85]. При этом цикл типа S_m^n переходит в S_{2m}^{2n}, и его период удваивается. На рис. 12, 13 представлена картина такого процесса для $c_1=3$. После нескольких бифуркаций $S_m^n \to S_{2m}^{2n}$ в расчетах наблюдаются непериоди-

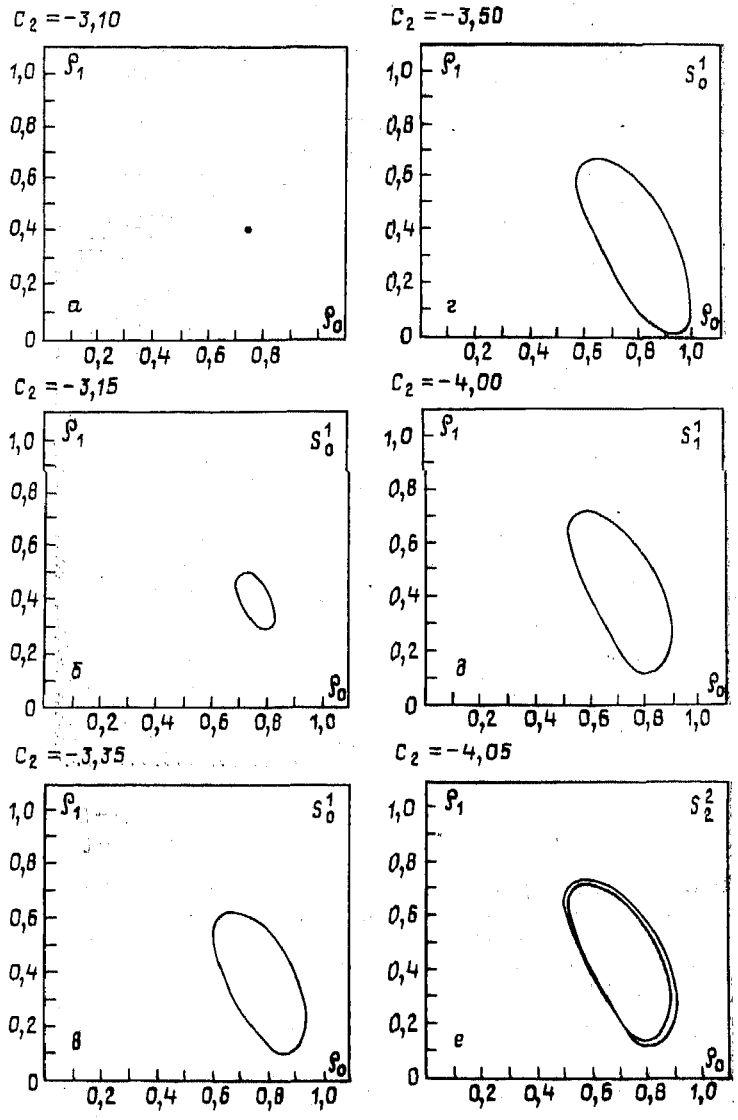


Рис. 12. Усложнение аттракторов динамической системы (3.6) при уменьшении параметра c_2; $k=1$, $c_1=3$

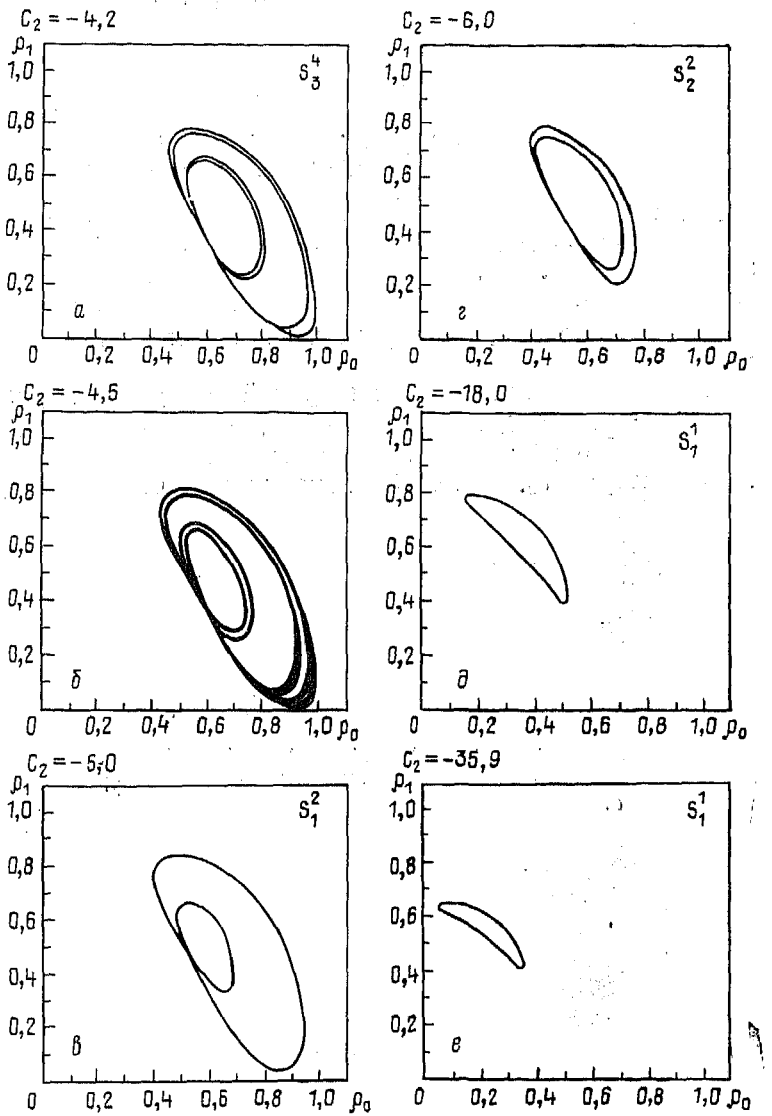


Рис. 13. Изменение аттракторов при дальнейшем уменьшении c_2

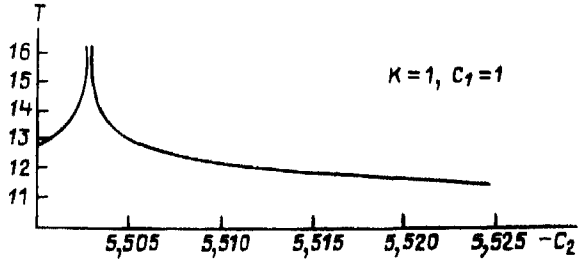
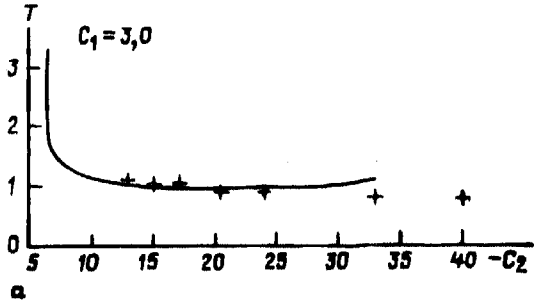


Рис. 14. Зависимость периода предельных циклов от параметра c_2. Маркеры соответствуют решениям задачи (2.1)

ческие решения (см. рис. 13*б*), примеры которых мы рассмотрим ниже. При дальнейшем уменьшении c_2 происходят бифуркации $S_{2m}^{2n} \to S_m^n$ (см. рис. 13), в результате которых снова возникают простые циклы.

Рис. 11 показывает, что в широкой области параметров асимптотику решений определяют циклы S_1^1. Остановимся на некоторых их особенностях. Рассмотрим зависимость периода T от параметра c_2. Рис. 15 показывает, что в широком



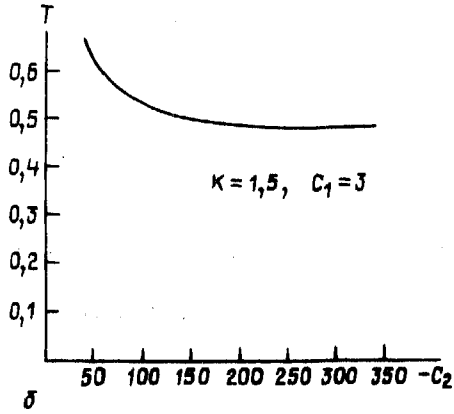


Рис. 15

диапазоне изменения $c_2(|c_2|\gg 1)$ период от этого параметра не зависит, в то время как остальные характеристики цикла меняются сильно (см. рис. 13*д* и *е*). Расчеты показали, что при $|c_2|\gg 1$, $k=1$ имеет место следующая зависимость

$$T=3/c_1.$$

В работе [11] это явление было названо эффектом постоянства периода. Для циклов S^1 наблюдается и другая закономерность: хотя переменная $\theta(t)$ меняется сложным образом, и быстрые участки на этой кривой чередуются с медленными, законы изменения величин ξ и η близки к гармоническим.

Во многих работах, где исследуются диссипативные структуры, подчеркивается независимость возникающих структур от многих параметров, их соответствие внутренним свойствам системы. Не раз подчеркивалась их независимость от начальных данных («забывание» деталей начальных данных [1, 52, 70]), от краевых условий (эффекты локализации процесов [28, 33, 42, 60, 61]). Здесь мы видим новый тип независимости от параметра. Величина c_2 определяет частоту колебаний однородного решения (2.3). Диссипативные процессы приводят к тому, что частота колебаний величины ξ и η от c_2 не зависит.

Наиболее сложные периодические решения наблюдаются при небольших значениях c_1: $1\leqslant c_1\leqslant 2$. Ряд их свойств был рассмотрен в работах [13, 19]. На линии $c_1=1{,}5$ были построены численно примеры устойчивых циклов S_2^2, S_4^4, S_8^8, S_{16}^{16}. Еще несколько примеров предельных циклов представлены на рис. 16. Они существенно отличаются от всех решений, рассмотренных выше. Это отличие заключается в том, что число максимумов $\rho_0(t)$ может не совпадать с числом оборотов цикла на плоскости $\{\rho_0, \rho_1\}$. Сравним решения, представленные на рис. 16*а* и 16*б*. При уменьшении c_2 цикл практически не изменился. Но у первого решения три максимума ρ_0, у второго их четыре.

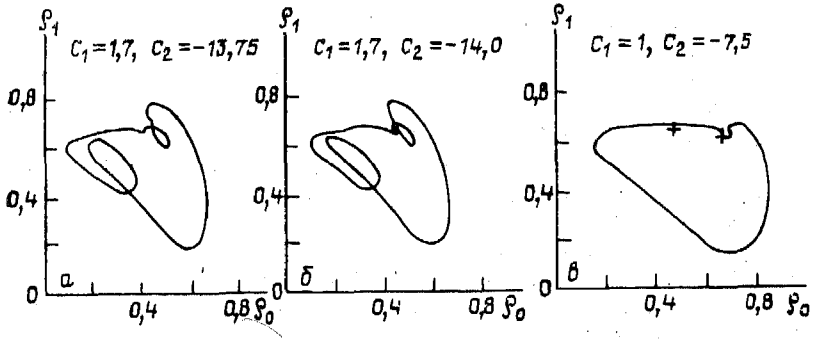


Рис. 16. Устойчивые предельные циклы в упрощенной системе (3.6), в которых число оборотов не совпадает с числом максимумов $\rho_0(t)$

Это можно объяснить следующим образом. В близкой области параметров у системы (3.6) появляется устойчивая особая точка. Ее появлению предшествует перестройка векторного поля. Траектории сложным образом изгибаются в некоторой области фазового пространства. В их проекциях на плоскость $\{\rho_0, \rho_1\}$ появляются лишние максимумы и петли. Это видно на примере циклов, показанных на рис. 16. Такое усложнение циклов не связано с бифуркациями.

Влияние устойчивой особой точки сказывается и на количественных характеристиках решения. Период цикла, показанного на рис. 16*в*, равен 111,3. В течение времени $t \approx 107$ точка, описывающая состояние системы, находится на его плоском участке, где $\rho_1 \approx 0{,}66$. При $c_2 = -8$, $c_1 = 1$, $k = 1$ возникают особые точки, координаты которых отмечены на рисунке 16*в*. Таким предельным циклам в области III соответствуют релаксационные автоколебания.

4.4. Сложные циклы и непериодические решения. Численное исследование динамической системы (3.6) показывает, что в некоторой области параметров она имеет непериодические решения. *В этом параграфе решение будет считаться непериодическим*, если за 300—400 витков вокруг центральной области (см. рис. 13) траектория не притягивается к предельному циклу. Проекция таких решений на плоскость $\{\rho_0, \rho_1\}$ оказывается очень сложной и не дает качественной информации о процессе. Поэтому здесь удобно воспользоваться приемом, примененным Лоренцем [47]. Будем следить за значениями локальных максимумов функции $\rho_0(t) = \xi^{1/2}(t)$. По оси абсцисс отложим значение n-го максимума, по оси ординат $n+1$-го. Замечательным свойством системы (3.6) является то, что эти точки обычно не заполняют какие-либо области на плоскости. Они лежат вблизи некоторой кривой $M_{n+1} = f(M_n)$. В пределах точности расчетов эта зависимость часто определяет непрерывное и однозначное отображение отрезка в себя. Его можно использовать для приближенного описания сложных решений системы (3.6), применяя методы теории одномерных отображений [71, 73, 77, 106].

На карте аттракторов можно выделить три различные области, где существуют непериодические решения. Рассмотрим каждую из них в отдельности.

На рис. 17 приведены функции $f(M)$, полученные в расчетах при разных значениях c_2 ($c_1 = 5$). Во всем диапазоне параметров $f(M)$ непрерывна, однозначна и имеет один острый максимум. Точки обычно заполняют несколько «островов» на кривой $f(M)$. По мере уменьшения c_2 происходит переход к сложным циклам. После нескольких бифуркаций $S^{2n} \to S^n$ возникает простой цикл.

Область параметров II отличается от области I тем, что переход к непериодическим режимам происходит на линии QNP

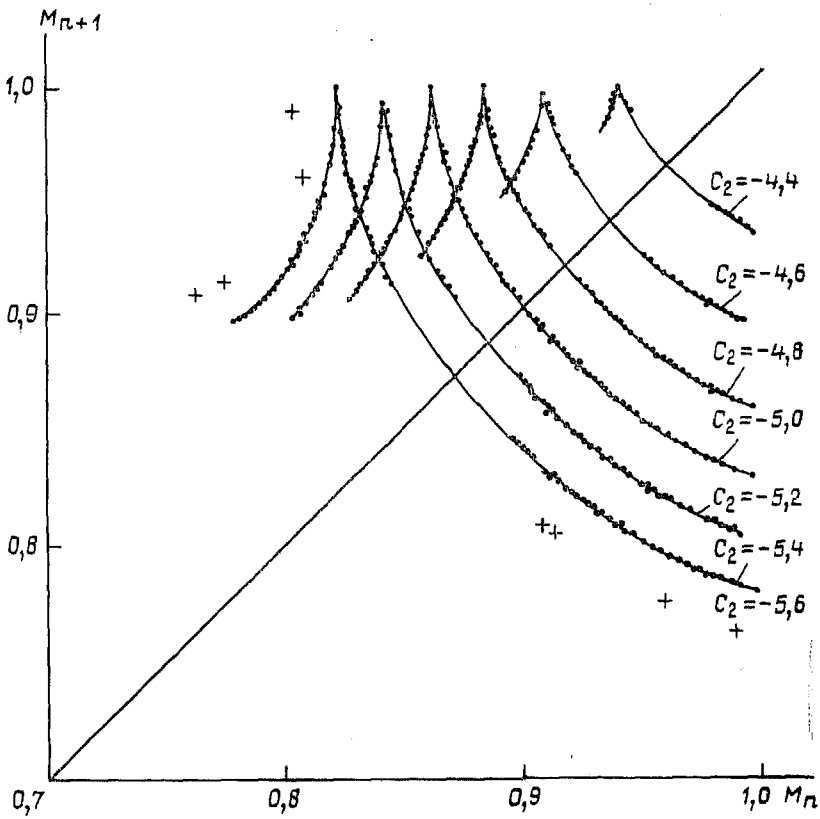


Рис. 17. Одномерные отображения, соответствующие решениям упрощенной системы (3.6) при $c_1=5$, $k=1$. В случае, когда $c_2=-5{,}6$, в системе есть устойчивый цикл S^8

скачком при уменьшении значения c_2. На этой линии происходит бифуркация Хопфа. Но если в области I рождается устойчивый предельный цикл (бифуркация надкритическая), то в области II бифуркация подкритична. Следствием подкритичности бифуркации обычно является гистерезис. Расчеты показывают, что выше линии QNP могут существовать одновременно непериодические решения и устойчивые особые точки [13].

Наиболее сложной для исследования является область параметров III. В этом случае часть времени траектория проводит в той области фазового пространства, где система (3.6) недиссипативна. Функция $M_{n+1}=f(M_n)$ здесь часто оказывается разрывной и неоднозначной. Однако и в этом случае решениям по определенному алгоритму можно сопоставить некоторые одномерные отображения [13]. Как правило, у них есть «плато» — целый интервал, где производная $f'(M)$ близка к

нулю. Вследствие этого при одних и тех же значениях параметров в системе могут существовать несколько аттракторов. В ряде химических экспериментов возникают отображения именно такого типа [25, 112]. Возможно именно они могут оказаться типичными для задач, где есть несколько взаимодействующих аттракторов.

Проведенный анализ системы (3.6) позволил получить разбиение плоскости параметров на области, в которых аттракторы имеют один и тот же тип. Рисунок 11 дает классификацию решений для $k=1$ при $t\to\infty$. Варьируя начальные данные, можно убедиться, что в некоторых областях параметров могут сосуществовать несколько аттракторов [11, 13]. Однако для системы (3.6) при $k=1$ это является скорее исключением, чем правилом.

Хочется обратить внимание на то, что полученная картина является достаточно простой. В большей части пространства параметров асимптотика определяется особыми точками и простыми предельными циклами, границы этих областей задаются сравнительно простыми соотношениями. Вопрос о соответствии решений упрощенной системы и задачи в частных производных будет рассмотрен ниже.

§ 5. Странный аттрактор в двухмодовой системе

Ранее мы рассмотрели усложнение аттрактора при изменении параметров в динамической системе (3.6) и появление непериодических режимов. Важно было бы исследовать один из таких режимов подробно. Анализ странного аттрактора оказывается особенно важным при изучении диффузионного хаоса в тех случаях, когда он является маломодовым. Полезно было бы выделить общие свойства непериодических решений задачи (2.1) и модели (3.6).

С другой стороны, число динамических систем, в которых подробно изучены странные аттракторы, невелико. Поэтому анализ каждой конкретной модели может сыграть важную роль в развитии теоретических представлений.

В дальнейшем основное внимание в этом параграфе мы уделим аттрактору системы уравнений (3.6) при $c_1=7$, $c_2=-6$, $k=1$. Его проекция на плоскость $\{\xi, \eta\}$ показана на рис. 18, она целиком лежит в области, где система диссипативна. Видно, что траектория может попадать в окрестность особой точки с $\xi=1$, $\eta=0$, и, следовательно, проводить вблизи нее длительное время. Среднее время T одного оборота вокруг центральной области примерно равно 1,63, а среднее значение Ω в формуле (4.3) составляет —4,2. Поэтому за один оборот фазовый объем при движении вдоль траектории уменьшается почти в 900 раз.

5.1. Свойства отображения Пуанкаре. Рассмотрим последовательные пересечения траектории с плоскостью $\theta=\text{const}$.

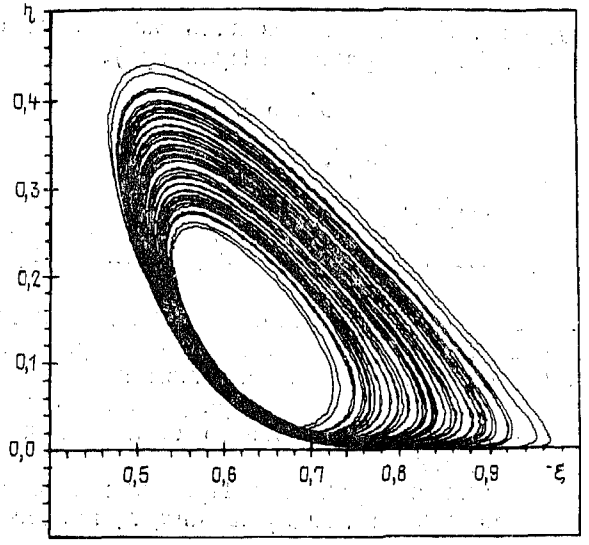


Рис. 18. Проекция странного аттрактора на плоскость $\{\xi, \eta\}$

Поскольку $\dot{\xi}$, $\dot{\eta}$, $\dot{\theta}$ зависят только от $\cos\theta$ и $\sin\theta$ (θ является циклической координатой), то необходимо учитывать пересечения со всеми плоскостями $\theta = \text{const} + 2\pi n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. Точки пересечения образуют некоторое множество на плоскости $\{\xi, \eta\}$. Оно показано на рис. 19 для разных значений θ. Видно, что наиболее простой вид имеет сечение плоскостью $\theta = 0$. Рассмотрим его подробнее.

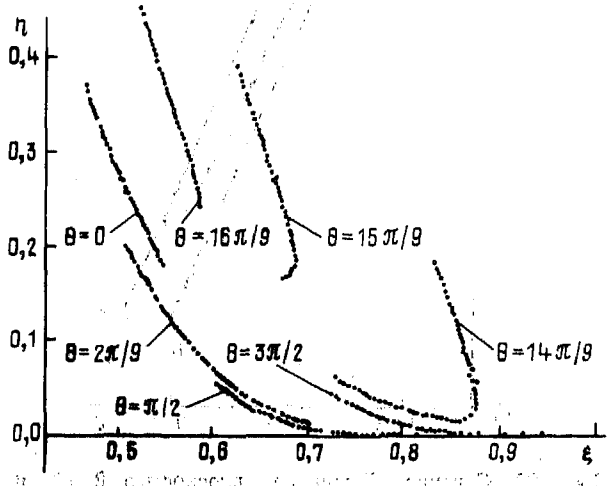


Рис. 19. Сечения Пуанкаре для разных плоскостей

Система уравнений (3.6) однозначно определяет отображение плоскости в себя (отображение Пуанкаре):

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \bar{f}(\xi_0, \eta_0), \\ \eta_1 &= \bar{g}(\xi_0, \eta_0). \end{aligned} \tag{5.1}$$

Здесь ξ_1, η_1 — координаты точки первого пересечения траектории с начальными данными (ξ_0, η_0, 0) с плоскостями $\theta = 2\pi n$. Будем рассматривать только такие пересечения, при которых $\dot{\theta} > 0$.

Можно выделить область в плоскости $\{\xi, \eta\}$, которая при отображении (5.1) переходит в себя, она и содержит аттрактор. Это полоса $ABCD$ на рис. 20, ее образом является узкая область, толщина которой в масштабе рисунка не видна. Это обусловлено сильным сжатием фазового объема при движении по траекториям системы.

Для исследования отображения Пуанкаре естественно перейти к новым координатам. Одну из них, x, направим парал-

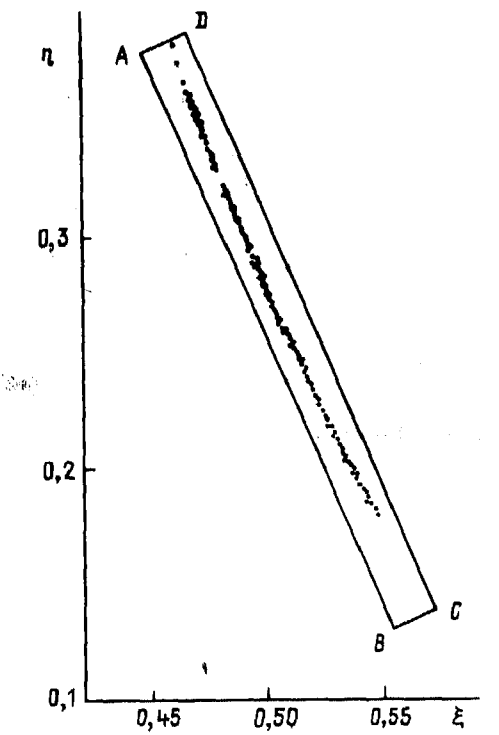


Рис. 20. Сечение Пуанкаре плоскостью $\theta = 0$ и область, переходящая в себя

лельно стороне AB, другая будет ей ортогональна:

$$x=[3(\xi-0{,}45)-7(\eta-0{,}38)]/\sqrt{58},$$
$$y=[7(\xi-0{,}46)+3(\eta-0{,}38)]/\sqrt{58}. \qquad (5.2)$$

Вид области $ABCD$ и ее образа $A'B'C'D'$ в новых координатах показан на рис. 21. (Обратим внимание на то, что рисунки 21а и б сильно растянуты в направлении y). В этих координатах образом прямоугольника является сложная криволинейная фигура, состоящая из двух частей. Область $APQD$ отображается в ее нижнюю часть. Соответствующие траектории получают за один оборот приращение фазы $\Delta\theta=2\pi$. Верхняя часть криволинейной фигуры является образом множества $BPQC$. Приращение фазы для начинающихся здесь траекторий равно нулю. Отрезок PQ весь переходит в точку R.

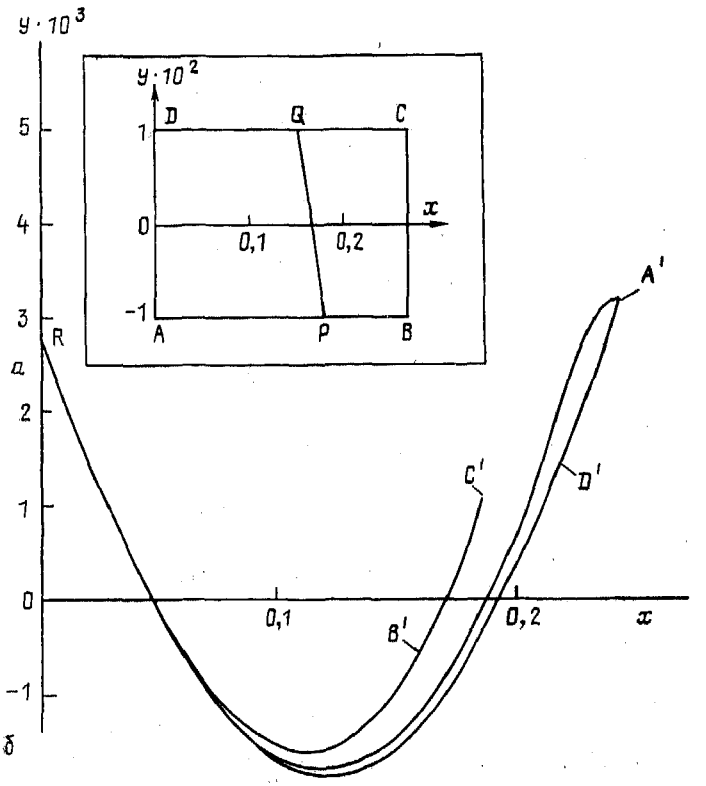


Рис. 21. Область, переходящая в себя а) и ее образ б) в новых координатах

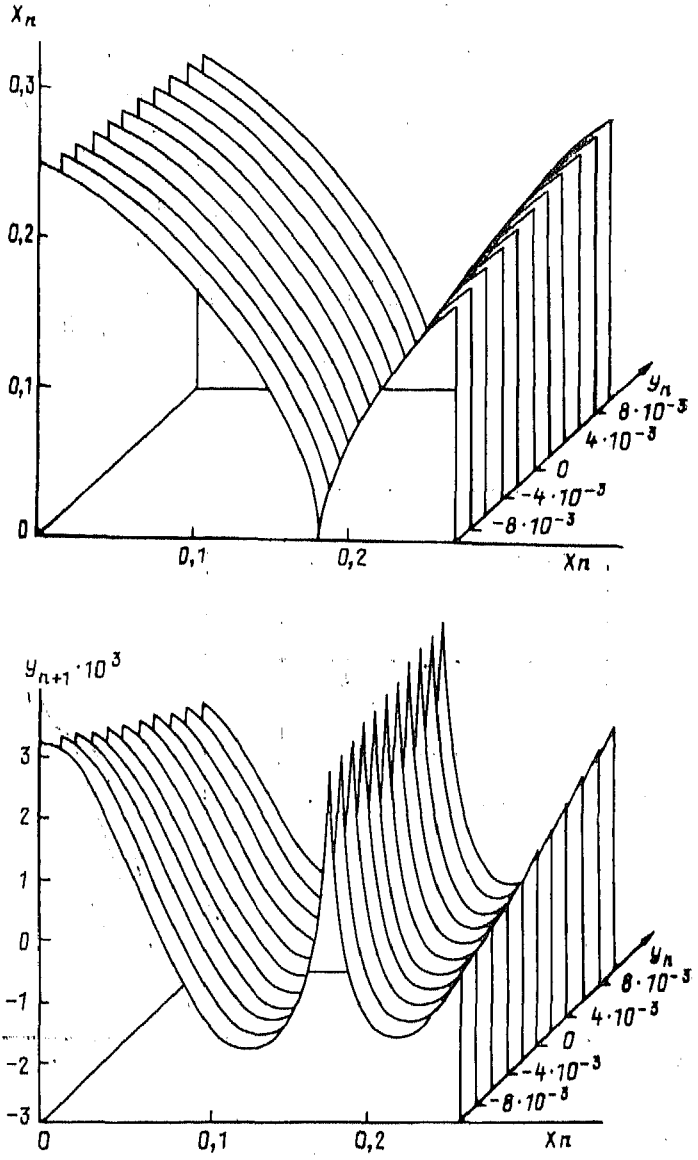


Рис. 22. Двумерные функции, осуществляющие отображение Пуанкаре

Вид функций f и g, определяющих отображение Пуанкаре в новых координатах x, y

$$x_1 = f(x_0, y_0),$$
$$y_1 = g(x_0, y_0), \tag{5.3}$$

показана на рис. 22. Эти функции непрерывны, но имеют разрыв производной на линии PQ. Значение функции f на этом отрезке равно x — координате точки R (см. рис. 21 б) и составляет примерно $5{,}4 \cdot 10^{-4}$; y — координата этой точки определяет значение g на отрезке PQ, равное $2.77 \cdot 10^{-3}$. Расчеты показывают, что частные производные функций f и g неограниченно растут в окрестности линии PQ. Эти свойства отображения Пуанкаре оказываются очень существенными и к ним мы вернемся далее.

Мы перешли от динамической системы (3.6) к более простому объекту — двумерному отображению (5.3). Сечение аттрактора плоскостью $\theta = 2\pi n$ можно получить в результате бесконечного числа итераций функций f и g:

$$x_{n+1} = f(x_n, y_n),$$
$$y_{n+1} = g(x_n, y_n), \quad n = 1, 2, 3, \ldots . \tag{5.4}$$

Существуют простые двумерные отображения, у которых при $n \to \infty$ точки притягиваются к отрезку $(x_{n+1} = 1 - 2x_n^2,\ y_{n+1} = \alpha y_n\ |\alpha| < 1)$ или к дуге кривой $(x_{n+1} = 1 - 2x_n^2,\ y_{n+1} = h(x_n))$. Однако для отображений, порождаемых системой трех обыкновенных дифференциальных уравнений, такая ситуация нетипична. На них накладывает ограничения теорема единственности.

Сечение аттрактора, соответствующего хаотическому режиму, должно обладать сложной внутренней структурой. Для нескольких моделей расчеты позволили обнаружить эту структуру [107, 113]. Попробуем сделать это для изучаемой системы.

Обратимся к рис. 23. Здесь в разных масштабах показано расположение точек пересечения одной из траекторий с плоскостью $\theta = 2\pi n$. На рис. 23*б* в увеличенном виде изображен прямоугольник, помеченный на рис. 23*а*. В свою очередь прямоугольник, помеченный на рис. 23*б*, в еще более крупном масштабе представлен на рис. 23*в*. Сечение аттрактора на верхнем рисунке состоит из двух линий. Увеличение разрешения в 500 раз приводит к тому, что каждая из них расщепляется еще на две. Отметим, что расстояние между линиями очень мало, оно не превышает $4 \cdot 10^{-7}$. Можно ожидать, что этот процесс происходит и на меньших характерных расстояниях. То есть аттрактор по одному из направлений обладает канторовой структурой.

На рис. 24 изображена зависимость x_{n+1} от x_n. В масштабе рисунка точки ложатся на непрерывную однозначную

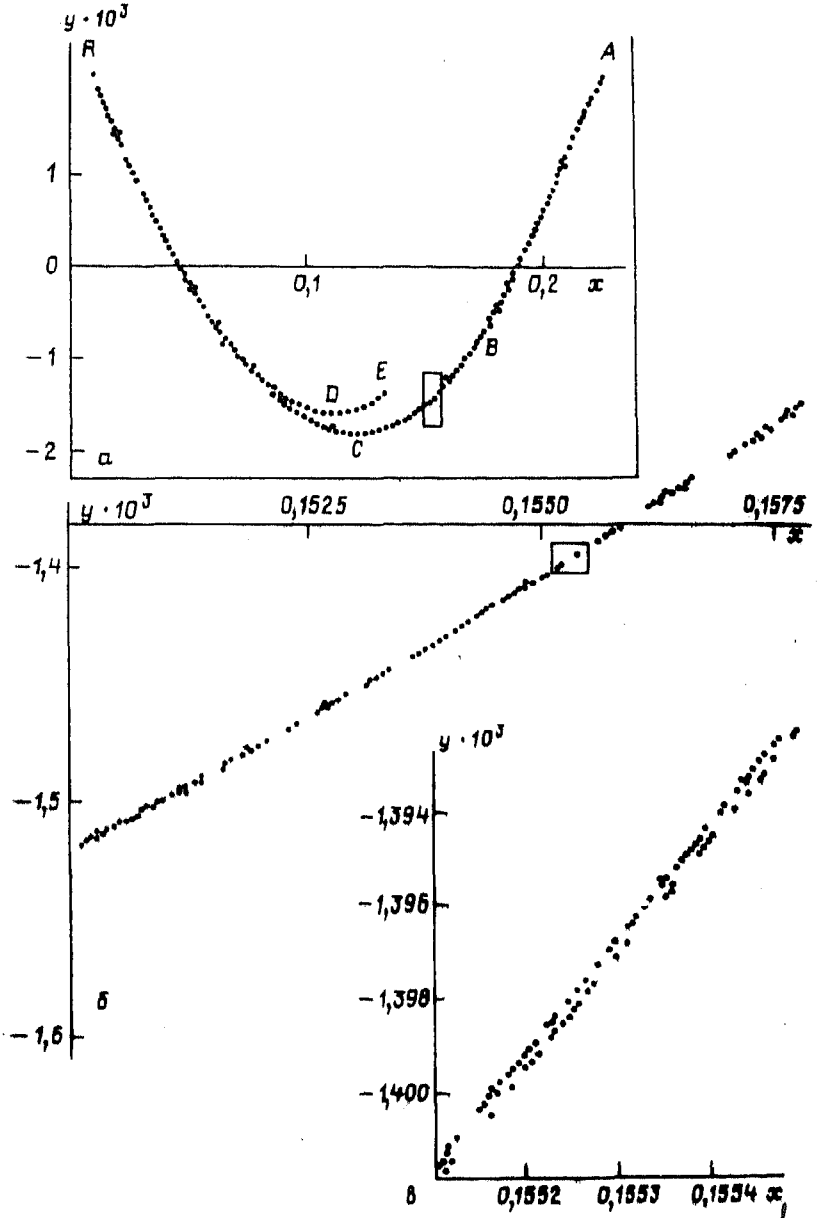


Рис. 23. Сечение аттрактора в различных масштабах

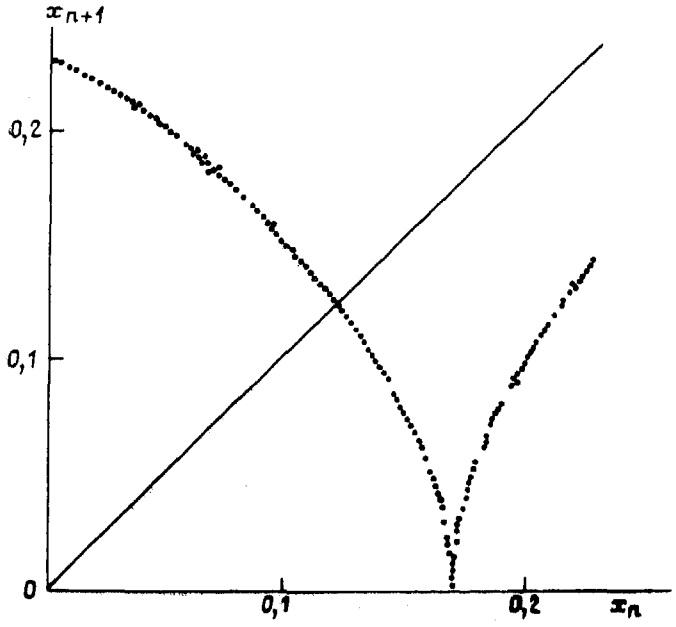


Рис. 24

кривую F. Отметим, что $|dF/dx|>1$ везде, кроме одного участка на левом конце отрезка.

Одномерное отображение $x_{n+1}=F(x_n)$ можно рассматривать как некоторую упрощенную модель для задачи (3.6). При ее анализе оказываются полезными многие результаты теории отображений отрезка в себя [71, 73, 77].

Посмотрим теперь, как связаны y_{n+1} и y_n. Результаты соответствующего расчета приведены на рис. 25. Полученная картина является более сложной, чем для координаты x. Поскольку одному значению y соответствует одна, две, три или четыре разных точки, лежащие на аттракторе (см. рис. 23а), то зависимость y_{n+1} от y_n также будет неоднозначной. Одному y_n могут соответствовать от одного до четырех y_{n+1}. (Разумеется все сказанное справедливо на тех масштабах, где не проявляется тонкая структура аттрактора.)

Сопоставим рис. 23а и 25. Образы точек, лежащих на ветви ABC на первом рисунке, определяются с помощью кривой $A'B'C'$, показанной на втором. Ветвь $C'R'$ позволяет найти, куда переходят точки с участка CR, точно так же ветвь $R'D'E'$ соответствует линии RDE. Точка B на рис. 23а лежит на пересечении дуги AC аттрактора с отрезком PQ (см. рис. 21а).

Таким образом результат действия двумерного отображения

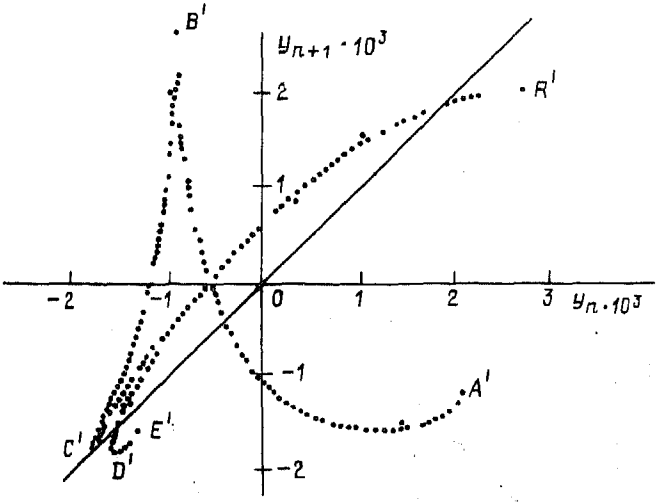


Рис. 25

(5.3) для точек аттрактора можно достаточно точно предсказать с помощью нескольких одномерных отображений.

Замечание. Как правило, при численном решении динамических систем используются алгоритмы высокого порядка точности. Однако последовательные пересечения траектории с плоскостью обычно определяются посредством простой интерполяции, что резко понижает точность расчетов. Избежать этого позволяет алгоритм Хенона, связанный с переходом к новым переменным [91]. Он дает возможность строить отображение Пуанкаре с той же точностью, с какой известно решение. Для анализа динамической системы (3.6) применяется метод Рунге—Кутта четвертого порядка и алгоритм Хенона для построения отображения Пуанкаре.

5.2. Поведение траекторий вблизи особых точек. Рис. 18 показывает, что проекции различных витков траектории на плоскость $\{\xi, \eta\}$ качественно не отличаются друг от друга. Однако, проследив за их изменением в пространстве $\{\xi, \eta, \theta\}$, можно выделить витки двух различных типов. В одних при возвращении на плоскость $\theta = 2\pi n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ фаза изменяется на 2π, в других она не меняется. В одномерном отображении F (см. рис. 24) виткам первого типа соответствует левая часть кривой, второго типа — ее правая часть. Если бы время каждого оборота было ограничено сверху, то функции f и g в отображении (5.3) были бы непрерывны и дифференцируемы, а приращение фазы $\Delta\theta$ не могло претерпевать скачка. В нашем случае это не так. Можно предположить, что причиной является влияние одной из особых точек динамической системы (3.6),

в окрестности которой время витка может неограниченно возрастать.

Важное свойство системы (3.6) состоит в том, что плоскость $\eta=0$ является инвариантным многообразием: если $\eta(0)=0$, то и $\eta(t)=0$. Найдем все особые точки с $\xi^2+\eta^2\neq 0$, лежащие в этой плоскости. Судя по рис. 18, именно они влияют на поведение траекторий на странном аттракторе. Из первого уравнения (3.6) следует, что $\xi=1$, из третьего — соотношение для θ:

$$\sin\theta+c_2\cos\theta+c_2+c_1k^2=0. \tag{5.5}$$

Это уравнение имеет два решения:

$$\begin{aligned}\sin\theta&=\left[-(c_2+c_1k^2)\mp c_2\sqrt{1+c_2^2-(c_2+c_1k^2)^2}\right]/(1+c_2^2),\\ \cos\theta&=\left[-c_2(c_2+c_1k^2)\pm\sqrt{1+c_2^2-(c_2+c_1k^2)^2}\right]/(1+c_2^2).\end{aligned} \tag{5.6}$$

Устойчивость особых точек определяется действительными частями собственных значений матрицы (4.9) системы (3.6), линеаризованной в окрестности особой точки. Для точек с $\xi=1$, $\eta=0$ матрица $\mathbf{A}$ упрощается

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}-2 & -2-\cos\theta-c_2\sin\theta & 0\\ 0 & -2(1+k^2+\cos\theta-c_2\sin\theta) & 0\\ 2c_2+2(\sin\theta+c_2\cos\theta) & -c_2/2-c_2\cos\theta+\sin\theta & 2\cos\theta-2c_2\sin\theta\end{pmatrix}. \tag{5.7}$$

Это позволяет найти ее собственные значения в явном виде

$$\begin{aligned}\Lambda_1=-2,\quad \Lambda_2&=-2\left[1+k^2\pm\sqrt{1+c_2^2-(c_2+c_1k^2)^2}\right],\\ \Lambda_3&=\pm 2\sqrt{1+c_2^2-(c_2+c_1k^2)^2}.\end{aligned} \tag{5.8}$$

Мы воспользовались здесь следствием равенства (5.5)

$$\cos\theta-c_2\sin\theta=\pm\sqrt{1+c_2^2-(c_2+c_1k^2)^2}.$$

Подставим теперь в формулы (5.6)—(5.8) интересующие нас значения параметров: $c_1=7$, $c_2=-6$, $k=1$. При этом решения уравнения (5.6) будут следующими: $\theta_A=1.24$, $\theta_B=3\pi/2$. Нам будет удобно перенумеровать собственные значения в порядке возрастания ($\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_1', \vec{e}_2', \vec{e}_3'$ — соответствующие собственные векторы). Для точки A получим:

$$\lambda_1=-16,\quad \vec{e}_1=\begin{bmatrix}m\\ n\\ l\end{bmatrix};\quad \lambda_2=-2,\quad \vec{e}_2=\begin{bmatrix}a\\ 0\\ b\end{bmatrix};$$

$$\lambda_3=+12,\quad \vec{e}_3=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\end{bmatrix}. \tag{5.9}$$

Для точки B:

$$\lambda_1' = -12, \quad \vec{e}_1' = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad \lambda_2' = -2, \quad \vec{e}_2' = \begin{bmatrix} p \\ 0 \\ q \end{bmatrix};$$

$$\lambda_3' = +8, \quad \vec{e}_3' = \begin{bmatrix} r \\ s \\ t \end{bmatrix}. \tag{5.10}$$

Здесь $m, n, l, a, b, p, q, r, s, t$ — постоянные величины, конкретные значения которых для нас несущественны.

Из формул (5.9), (5.10) видно, что точки A и B — это седла, имеющие по одному неустойчивому направлению. При этом линия $\xi=1$, $\eta=0$, $\theta=\theta(t)$, соединяющая эти точки, является интегральной кривой системы уравнений (3.6) при всех значениях параметров. На рис. 26 показано примерное расположение особых точек A и B, а также собственных векторов соответствующей им матрицы A. Поверхность M — это устойчивое двумерное многообразие точки A. Неустойчивым многообразием является прямая $\xi=1$, $\eta=0$. Устойчивым многообразием точки B

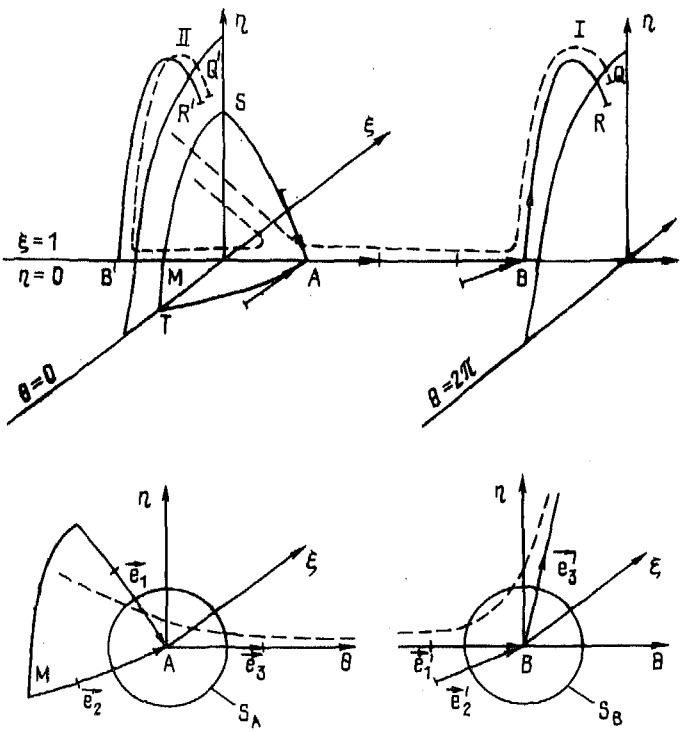


Рис. 26. Качественная картина поведения траекторий в окрестности особых точек

является плоскость $\eta=0$. Ее неустойчивое многообразие пересекается с плоскостью $\theta=2\pi$ в точке R.

Исходя из рис. 26, можно представить интегральную кривую, начинающуюся около поверхности M (выше нее), следующим образом. Вначале точка на траектории движется вблизи M к точке A и далее по отрезку $\xi=1$, $\eta=0$ к седлу B. Затем она проходит по дуге BR и пересекает плоскость $\theta=2\pi$ в точке Q, находящейся в окрестности R. Это кривая 1 на рис. 26. Заметим, что траектория не может выйти из точки B вниз, в область $\eta<0$, так как для этого ей бы пришлось пересечь плоскость $\eta=0$, являющуюся инвариантным многообразием.

Пусть теперь траектория начинается ниже поверхности M (кривая II на рис. 26). В этом случае точка также движется вдоль M, но вблизи точки A поворачивает влево. Она подходит к седлу B' и затем попадает на плоскость $\theta=0$ по кривой $B'R'$. В первом случае фаза изменилась на 2π, во втором не изменилась. Приращение фазы на следующем витке зависит от взаимного расположения многообразия M и точек Q, Q'. Проведенные расчеты полностью подтверждают сказанное [17].

Поверхность M пересекается с плоскостью $\theta=0$ по некоторой линии TS. Образом всей этой линии является точка R (или R'). Формально отображение Пуанкаре не определено на TS, поскольку траектории проходят через две особые точки, что требует бесконечного времени. Однако его можно доопределить по непрерывности. Отрезок PQ на рисунке 21*а* является частью дуги TS.

Из описанной качественной картины ясно, что по мере приближения начальной точки на плоскости $\theta=2\pi n$ к линии TS время витка будет неограниченно возрастать. Закон роста играет существенную роль при исследовании стохастических свойств аттрактора. Попробуем его оценить.

Пусть $x(t)$ — траектория динамической системы, $x(0)=x_0$, $x(t_1)=x_1$. Пусть нас интересует поведение близкой траектории с $\bar{x}(0)=x_0+\varepsilon$. Если $|\varepsilon|$ мала, то разность $y(t)=\bar{x}(t)-x(t)$ будет определяться решением линейной задачи

$$\dot{y}=\mathbf{B}(t)\,y, \quad y(0)=\varepsilon. \tag{5.11}$$

Если система (5.11) не вырождена, значение t_1 конечно (то есть траектория $x(t)$ не входит на изучаемом интервале в особую точку), то

$$\bar{x}(t_1)-x(t_1)=y(t_1)=\|\varepsilon\|\cdot Y(t_1),$$

где $Y(t_1)$ зависит от динамической системы. Отсюда следует, что порядок величины $y(\varepsilon)$ может измениться только вблизи особых точек.

Исходя из этого, окружим седла A и B сферами S_A и S_B малого, но конечного радиуса r. Будем полагать, что внутри

каждой из них система (3.6) хорошо приближается линейной задачей с матрицей (5.7). Пусть ε — расстояние от начальной точки до поверхности M (устойчивого многообразия седла A), $\varepsilon \ll r$. Это расстояние будет иметь тот же порядок, когда траектория пересечет сферу S_A. Можно определить координаты точки пересечения в базисе $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ с точностью до главных членов по ε:

$$\vec{s}_1 = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2 + c\vec{e}_3, \quad a^2 + b^2 \sim r^2, \quad c \sim \varepsilon. \tag{5.12}$$

Пусть в момент времени T_A траектория выходит из шара S_A. Координаты точки $\vec{s}_2$ выхода можно записать в виде

$$\vec{s}_2 = ae^{-|\lambda_1|T_A}\vec{e}_1 + be^{-|\lambda_2|T_A}\vec{e}_2 + ce^{\lambda_3 T_A}\vec{e}_3 \sim r\vec{e}_3. \tag{5.13}$$

Отсюда следует, что

$$T_A = \frac{1}{\lambda_3} \ln \frac{1}{\varepsilon}. \tag{5.14}$$

В момент времени T_A расстояние δ от точки выхода из шара до плоскости $\eta = 0$ равно

$$\delta \sim ae^{-|\lambda_1|T_A} = a\varepsilon^{|\lambda_1|/\lambda_3}. \tag{5.15}$$

Можно оценить также расстояние от точки выхода до прямой $\xi = 1$, $\eta = 0$:

$$\rho \sim be^{-|\lambda_2|T_A} = b\varepsilon^{|\lambda_2|/\lambda_3}. \tag{5.16}$$

Напомним, что $|\lambda_2| < |\lambda_1|$.

Между S_A и S_B точка находится в окрестности интегральной кривой $\xi = 1$, $\eta = 0$, $\theta = \theta(t)$. Поэтому порядок малости величин δ и ρ не меняется. Точка $\vec{s}_1'$, в которой траектория входит в сферу S_B, в базисе $\vec{e}_1'$, $\vec{e}_2'$, $\vec{e}_3'$ определяется следующим образом:

$$\vec{s}_1' = a'\vec{e}_1' + b'\vec{e}_2' + c'\vec{e}_3', \tag{5.17}$$

где $a' \sim r$, $b' \sim \rho$, $c' \sim \delta$.

Теперь заметим, что δ определяет расстояние от точки входа в сферу S_B до устойчивого многообразия седла B — плоскости $\eta = 0$. Поэтому время T_B, которое точка проведет внутри сферы S_B, можно найти по формуле, аналогичной (5.14):

$$T_B = \frac{1}{\lambda_3'} \ln \frac{1}{\delta} = \frac{|\lambda_1|}{\lambda_3 \lambda_3'} \ln \frac{1}{\varepsilon}. \tag{5.18}$$

При $\varepsilon \to 0$ T_A и T_B стремятся к бесконечности, тогда как время движения по остальным участкам траектории ограничено. Поэтому зависимость времени возвращения на плоскость $\theta = 2\pi n$ от ε определяется суммой

$$T = T_A + T_B = \frac{1}{\lambda_3}\left(1 + \frac{|\lambda_1|}{\lambda_3'}\right) \ln \frac{1}{\varepsilon}. \tag{5.19}$$

Таким образом, функция $T(\varepsilon)$ имеет логарифмическую особенность. Это подтверждают и проведенные расчеты [17]. При $c_1=7$, $c_2=-6$, $k=1$ зависимость $T(\varepsilon)$, полученная в расчете, имеет вид $T=0{,}580\lg\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$, формула (5.19) дает $0{,}578\lg\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$.

Таким же образом можно выяснить поведение функций f и g вблизи линии разрыва производных PQ (см. рис. 21a). Значения функций на самом отрезке PQ постоянны и совпадают с координатами точки R. Характер особенности определяется зависимостью $\mu(\varepsilon)$, где μ — расстояние от траектории до кривой BR в момент выхода из сферы S_B. (Далее порядок $\mu(\varepsilon)$ не меняется до пересечения с плоскостью $\theta=2\pi n$.) Формула (5.17) позволяет найти координаты точки выхода из сферы S_B в базисе $\vec{e}_1'$, $\vec{e}_2'$, $\vec{e}_3'$:

$$\vec{s}_2'=a'e^{-|\lambda_1'|T_B}\vec{e}_1'+b'e^{-|\lambda_2'|T_B}\vec{e}_2'+c'e^{\lambda_3'T_B}\vec{e}_3'. \qquad (5.20)$$

Так как $\mu\sim\max\{a'\exp[-|\lambda_1'|T_B],\ b'\exp[-|\lambda_2'|T_B]\}$, то $\mu\sim\varepsilon^{\alpha}$, где

$$\alpha=\min\{|\lambda_1\lambda_1'|/\lambda_3\lambda_3',\ |\lambda_2|/\lambda_3+|\lambda_1\lambda_2'|/\lambda_3\lambda_3'\}. \qquad (5.21)$$

При $c_1=7$, $c_2=-6$, $k=1$ $\alpha=1/2$, то есть $\mu\sim\sqrt{\varepsilon}$. В расчете значение показателя α вблизи особенности для функции $f(x, y)$ при $y=0$ получилось примерно равным 0,51. Хорошее совпадение результатов расчетов с оценками (5.19), (5.21) подтверждает ту качественную картину поведения траекторий вблизи особых точек, которая была описана в этом параграфе.

Как мы уже упоминали, проекция траектории на плоскость $\{\xi, \eta\}$ не дает полного представления о геометрии аттрактора в трехмерном пространстве. На рис. 27 изображена часть интегральной кривой системы уравнений (3.6) в координатах $x=\xi\cos\theta$, $y=\xi\sin\theta$, $z=\eta$. Она ложится на некоторую поверхность, так как в масштабе рисунка тонкая структура аттрактора не видна. Эта поверхность состоит из двух частей, которые «склеиваются» в верхней области. Из этой области точка начинает двигаться в направлении седла A, затем вправо или влево в зависимости от начальных данных. Потом, пройдя мимо седла B, она вновь попадает в верхнюю часть аттрактора. За один такой оборот правая лента растягивается и меняет свою ориентацию. Левая часть поверхности также растягивается, но ориентации не меняет.

Отсюда ясно, что аттрактор в этом пространстве можно представить как склеенные друг с другом лист Мёбиуса (правая часть) и обычное кольцо (левая часть). Совершая оборот по правой части аттрактора, траектория увеличивает фазу на 2π, по левой — оставляет неизменной.

Такое поведение позволяет дать символическое описание траектории, сопоставляя ей бесконечную последовательность символов R и L. При этом на n-ом месте будет стоять R, если траектория на n-ом витке двигалась по правой части поверхно-

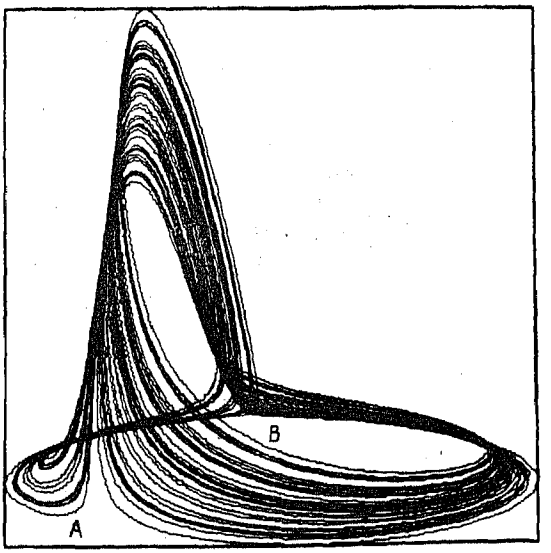


Рис. 27

сти, и L, если по левой. По-видимому, здесь также могут быть использованы топологические методы, развитые при исследовании аттрактора Лоренца [26, 114].

5.3. Свойства сжатия и растяжения отображения T^4. В настоящее время подробно изучены стохастические свойства, так называемых, гиперболических систем. Условием гиперболичности для двумерных отображений $x_{n+1}=f(x_n, y_n)$, $y_{n+1}=g(x_n, y_n)$ является выполнение неравенств

$$\|(f_x)^{-1}\|<1, \quad \|g_y\|<1, \quad \|a(x, y)\|=\max_{(x,y)\in G}|a(x, y)|,$$
$$\|(f_x)^{-1}g_x\|\cdot\|f_y\|<(1-\|(f_x)^{-1}\|)(1-\|g_y\|), \tag{5.22}$$
$$1-\|(f_x)^{-1}\|\cdot\|g_y\|>2\sqrt{\|(f_x)^{-1}g_x\|\cdot\|(f_x)^{-1}\|\cdot\|f_y\|}.$$

Они должны быть справедливы в некоторой области G, которая содержит аттрактор. Первые два неравенства говорят о наличии всюду растягивающего и всюду сжимающего направлений. Два другие свидетельствуют о существовании в их окрестности целого конуса соответственно растягивающих и сжимающих направлений [23, 54].

Для независимых переменных x и y и функций f и g в отображении Пуанкаре (5.3) неравенства (5.22) не выполняются. Производная $|\partial f/\partial x|$ оказывается меньше единицы в левой части области $ABCD$. Направление y является сжимающим всюду, за исключением малой окрестности линии PQ (см. рис. 21), на которой производные f и g имеют особенность.

Рассмотрим вместо отображения Пуанкаре его четвертую итерацию $T^4: x_{n+4}=p(x_n, y_n)$, $y_{n+4}=q(x_n, y_n)$. Расчеты показывают, что $|\partial p/\partial x|>1$ в области $G=\{0\leqslant x\leqslant 0{,}27;\ -0{,}002\leqslant \leqslant y\leqslant 0{,}005\}$, целиком содержащей аттрактор. Отметим, что соответствующее одномерное отображение $x_{n+4}=F^4(x_n)$ также является всюду растягивающим (см. рис. 28).

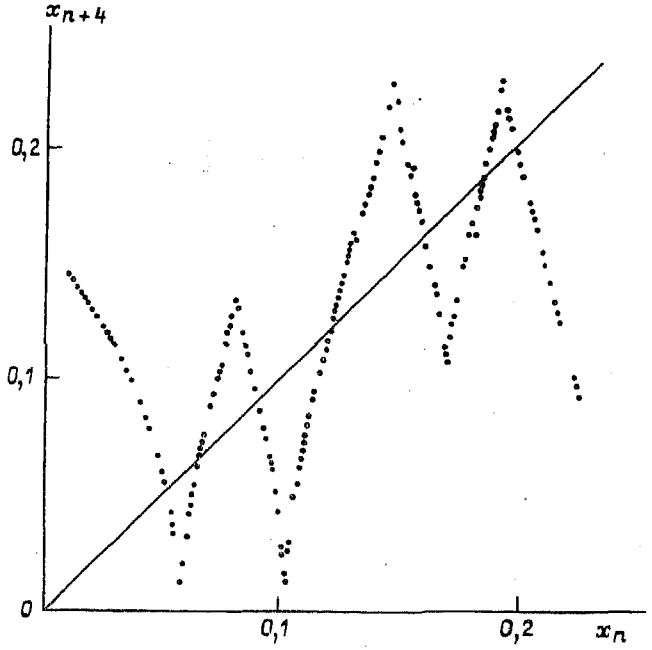


Рис. 28

Функция $q(x_n, y_n)$ имеет особеность не только на отрезке PQ, как $q(x, u)$ в формулах (5.3), но и на нескольких других линиях — $L_1, L_2, \ldots, L_5$. Производная $\partial g/\partial y$ мала в области G, если точки $\{x_n, y_n\}$ не попадает в окрестность этих линий. На линиях L_i, PQ единственным сжимающим направлением является касательное к ним. Производные по всем остальным направлениям стремятся к бесконечности. Это следует из вида функций p и q в окрестности L_i, PQ:

$$p(x_n, y_n)=p_0+B(x_n, y_n)[x_n-x_0(y_n)]^{\alpha},\qquad (5.23)$$

$$q(x_n, y_n)=q_0+A(x_n, y_n)[x_n-x_0(y_n)]^{\alpha},$$

здесь $p_0=\text{const}$, $q_0=\text{const}$, $B(x, y)$, $A(x, y)$ — достаточно гладкие функции, α определяется по формуле (5.21), $x_n=x_0(y_n)$ — уравнение дуги L_i, PQ.

Подставляя формулы (5.23) в неравенства (5.22) и считая, что ось y направлена вдоль дуги L_i, PQ, можно проверить выполнение этих условий вблизи особенности. Были проведены расчеты, в которых одна из осей выбиралась вдоль x, другая вдоль PQ. Они позволили проверить наличие сжимающего направления у отображения T в целой области, содержащей аттрактор. По-видимому, это верно и для T^4. (Численная проверка этого факта требует введения более сложной криволинейной сетки.) Можно ожидать, что из выполнения условий (5.22) вне особенности и существования сжимающих направлений вдоль них будет, как и в модели Лоренца [6, 23], следовать эргодичность системы.

5.4. Количественные характеристики странного аттрактора. Наличие странного аттрактора означает, что траектории динамической системы ведут себя стохастическим образом. Одним из проявлений стохастичности является существование в фазовом пространстве стационарного распределения вероятностей или инвариантной меры [65]. Такое распределение позволяет находить средние значения различных характеристик системы и изучать ее статистические свойства.

Обратимся к динамической системе (3.6). Будем следить за значениями координаты ξ последовательных точек пересечения траектории с плоскостью $\theta=2\pi n$, в которых $\dot{\theta}>0$. Построим гистограмму по последовательности $\{\xi_n\}$ и отнормируем ее так, чтобы площадь под кривой была равна единице. Расчеты показывают, что при увеличении длины выборки N эта кривая становится все более гладкой и перестает меняться. На рис. 29 приведена гистограмма, построенная по $N=20\,480$ точкам. Число N зависит от выбранного интервала ε вдоль оси ξ. Чем мельче шаг мы выбираем, тем больше становится значение N, при котором гистограмма практически перестает меняться. При других начальных данных была получена та же самая функция $\rho(\xi)$. Этот факт дает основание полагать, что и в трехмерном фазовом пространстве существует инвариантная мера, которая определяет статистические свойства всех траекторий, притягивающихся к странному аттрактору.

Типичным свойством странных аттракторов является чувствительность к начальным данным [46, 72, 77]. Скорость, с которой в среднем разбегаются бесконечно близкие вначале траектории, удобно характеризовать показателями Ляпунова.

Пусть $\varphi^t(x_0)$, $\varphi^t(x_0+\Delta x)$ — две близкие траектории динамической системы, выходящие из точек x_0 и $x_0+\Delta x$ (см. рис. 30). Показателем Ляпунова $\chi(x_0, \vec{\omega})$ называется величина

$$\chi(x_0, \vec{\omega})=\lim_{t\to\infty}\lim_{d(0)\to 0}\frac{1}{t}\ln(d(t)/d(0)). \qquad (5.24)$$

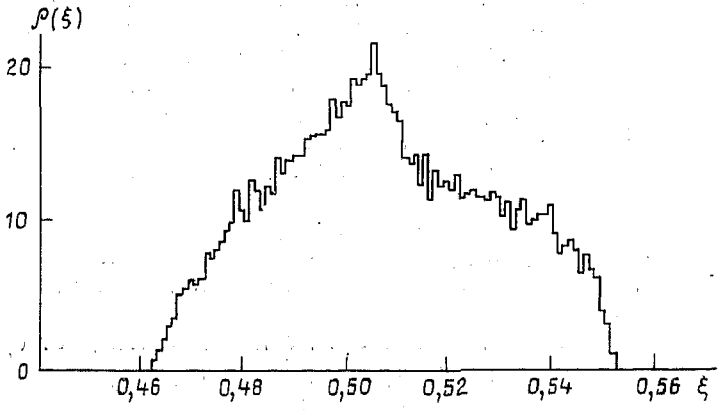


Рис. 29. Гистограмма, построенная для странного аттрактора

Можно показать, что это определение эквивалентно следующему:

$$\chi(x_0, \vec{\omega}) = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \ln(\| y^t(\vec{\omega}) \| / \| \vec{\omega} \|), \tag{5.25}$$

где $y^t(\vec{\omega})$ — решение линеаризованной в окрестности траектории $\varphi^t(x_0)$ задачи, $\vec{\omega}$ — произвольный вектор, направленный от x^0 к точке $x_0 + \Delta x$.

В n-мерной динамической системе ляпуновские показатели $\chi(x_0, \vec{\omega})$ принимают конечный набор значений $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$.

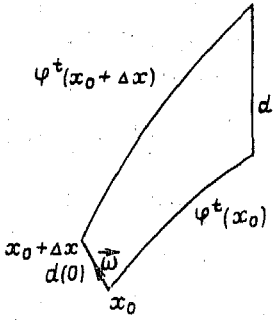


Рис. 30

Во многих задачах эти значения получаются одними и теми же почти при всех начальных данных x_0. В случае устойчивого предельного цикла $\lambda_i \leqslant 0$, $i = 1, \ldots, n$. Существование положительных показателей Ляпунова говорит о том, что близкие траектории экспоненциально расходятся, что система обладает

чувствительностью к начальным данным. Это дает основание полагать, что в системе существует странный аттрактор.

Для вычисления ляпуновских показателей удобно воспользоваться методикой, предложенной в работе [74], которая требует одновременного решения исходной системы и системы в вариациях. При этом необходима перенормировка и ортогонализация решений линеаризованной задачи через определенные промежутки времени.

Изучаемый аттрактор системы уравнений (3.6) ($c_1=7$, $c_2=-6$, $k=1$) характеризуется следующими показателями: $\lambda_1=+0{,}23$, $\lambda_3=-4{,}39$, λ_2 близок к нулю в пределах точности вычислений. Эти значения λ_i были получены в расчетах при различных начальных данных. Сумма показателей дает среднее значение величины $\Omega : \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=\langle\partial\dot{\xi}/\partial\xi+\partial\dot{\eta}/\partial\eta+\partial\dot{\theta}/\partial\theta\rangle$, которая определяет скорость изменения фазового объема при движении вдоль траектории.

Важной характеристикой аттрактора является его размерность. Зная показатели Ляпунова, пользуясь формулой Каплана — Йорке, можно оценить вероятностную размерность аттрактора (размерность естественной меры) [83]. В нашем случае эта формула дает

$$D=2+(\lambda_1+\lambda_2)/|\lambda_3|\approx 2{,}05. \tag{5.26}$$

Поскольку величина D имеет малую дробную часть, естественно ожидать, что поведение траекторий на аттракторе с высокой точностью характеризуется некоторым одномерным отображением. Это согласуется с результатами расчетов (см. рис. 23, 24, 28).

Другой количественной характеристикой странного аттрактора может служить автокорреляционная функция

$$b(t)=\frac{\langle\xi(\tau)\cdot\xi(\tau+t)\rangle-\langle\xi(\tau)\rangle^2}{\langle\xi^2(\tau)\rangle-\langle\xi(\tau)\rangle^2},$$
$$\langle a(\tau)\rangle=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T a(\tau)\,d\tau, \tag{5.27}$$

Когда $b(t)\to 0$, $t\to\infty$, в системе есть перемешивание, свидетельствующее о случайности рассматриваемого процесса. Экспоненциальное убывание корреляций оказывается одним из наиболее сильных стохастических свойств [65].

Автокорреляционная функция в нашем случае имеет осциллирующий характер, при этом период колебаний близок к среднему времени витка. Чтобы проследить убывание корреляций, отложим по оси ординат локальные максимумы функции $b(t)$, по оси абсцисс — времена, на которых они достигаются. Полученная картина показана на рис. 31.

Отметим, что вычисление $b(t)$ требует расчета средних значений по большим участкам траектории. Поясним это на сле-

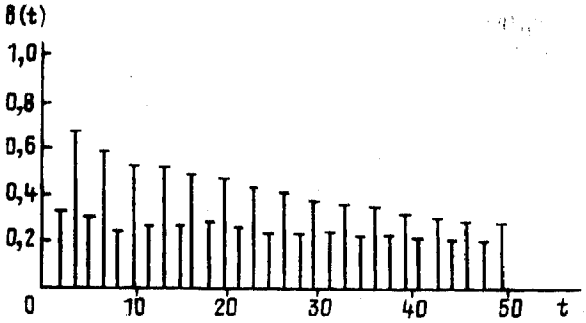


Рис. 31. Корреляционная функция, построенная для аттрактора

дующем примере. Рассмотрим последовательность $\{a_n\}$, члены которой меняют знак в среднем через r элементов. (Именно так устроена последовательность $\xi(t_n)-\langle\xi\rangle$ найденных численно точек на фазовой траектории.) Тогда

$$\langle a\rangle_N=\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}a_n=\frac{N-r-1}{N}\langle a\rangle_{N-r-1}+\frac{1}{N}\sum_{n=N-r}^{N}a_n. \quad (5.28)$$

Из этой формулы следует, что $\langle a\rangle_N$ имеет осциллирующий характер, причем амплитуда колебаний зависит от $N(\approx\langle a\rangle r/N)$. Чтобы вычислить $\langle a\rangle$ с точностью ε, нужно взять $N>\langle a\rangle r/\varepsilon$ элементов.

В нашем случае ε должно быть гораздо меньше $B(t)$, поэтому $N\gg[\langle\xi^2\rangle-\langle\xi\rangle^2]r/b(t)$. В проведенных расчетах $N=106\,496$, это не позволило определить закон убывания корреляций.

При количественном исследовании корреляционных функций удобно перейти к другому математическому объекту, связанному с динамической системой (3.6). Рассмотрим снова последовательность $\{\xi_n\}$, где ξ_n — координата n-го пересечения траектории с плоскостями $\theta=2\pi n$, $\dot\theta>0$, и соответствующую автокорреляционную функцию $B_N(k)$. Для последовательности $\{\xi_n\}$ $r=1$. На рис. 32а показана зависимость $B_N(k)$ на рис. 32б — ее логарифм. Видно, что на этом интервале $|B_N(k)|$ убывает быстрее, чем $\mathrm{const}\cdot e^{-\lambda k}$, где $\lambda\approx0{,}0675$.

В этом расчете $N=19\,456$. Важным вопросом и в этом случае является соотношение между длиной выборки N и количеством членов, которые мы можем по ней вычислить достаточно точно. Можно показать, что суммы $I_1=\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\xi_n\xi_{n+k}$ и $I_2=\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\xi_n f^k(\xi_n)$ оказываются связаны между собой. Здесь f — некоторая непрерывная функция, имеющая один экстремум (качест-

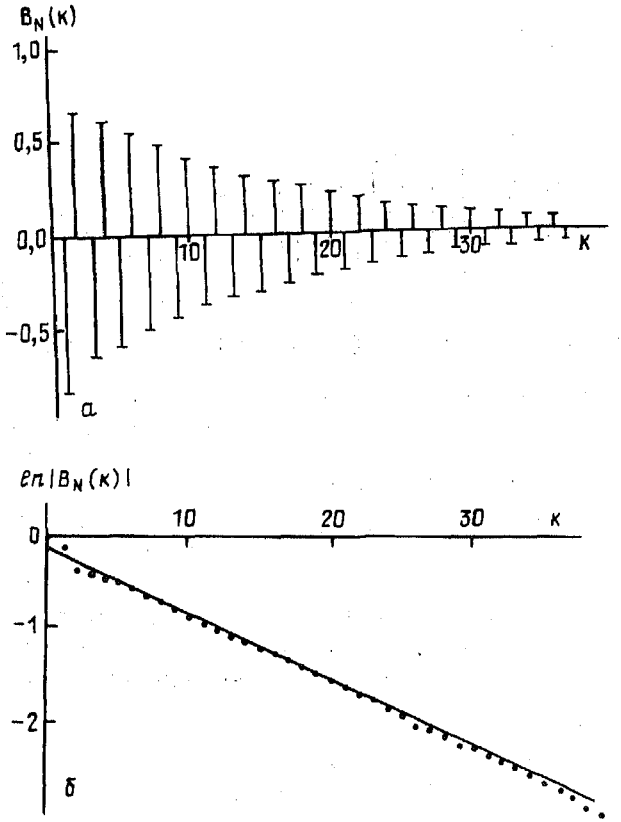


Рис. 32*а*, *б*. Корреляционная функция, построенная для отображения Пуанкаре

венно функция f аналогична зависимости $x_{n+1}=F(x_n)$, представленной на рис. 24).

Сумма I_2 аппроксимирует интеграл $I=\int\limits_{\xi_{min}}^{\xi_{max}} \xi f^k(\xi)\rho(\xi)\,d\xi$, в котором подынтегральная функция быстро осциллирует. Функция $f^k(\xi)=\underbrace{f(f(\ldots f}_{k}(\xi)))$ имеет 2^{pk} экстремумов, где $0<p<1$, $p=\text{const}$. (Это следует из вида функции f). Для численного интегрирования естественно требовать, чтобы на каждый экстремум приходилось не менее s точек, тогда $N=s\cdot 2^{pk}$. Представление о том, какова функция $\rho(\xi)$ дает рис. 29. Таким образом, число значений корреляционной функции, которые могут быть вычислены достаточно точно, зависит от длины выборки

по логарифмическому закону:

$$k_{\max}=\frac{1}{p}\log_2\frac{N}{s},\quad s=4-6. \tag{5.29}$$

Для $N=19\cdot 2^{10}$ максимальный номер $k_{\max}$ имеет порядок 30.

Обратим внимание на то, что корреляционные функции, вычисленные по траектории динамической системы и по сечению Пуанкаре, существенно отличаются. Видно, что четные максимумы корреляционной функции убывают по экспоненциальному закону, в то время как нечетные практически не убывают. По теореме Винера—Хинчина отсюда следует, что в спектре решения есть острый максимум на некоторой частоте ω. Можно ожидать, что $\omega=2\pi/\overline{T}$, где $\overline{T}$ — среднее время витка.

Большой интерес сейчас вызывает изучение таких свойств динамических систем, которые не полностью описываются сечением Пуанкаре [78]. Полезен был бы анализ этих свойств и в изучаемом аттракторе.

Мы рассмотрели поведение системы уравнений (3.6) при конкретных значениях параметров. Расчеты показывают, что в целом интервале изменения c_2 ($c_1=7$, $k=1$, $-6.4\leqslant c_2\leqslant -5.2$) близкие траектории системы экспоненциально расходятся. Один из ляпуновских показателей положителен и равен примерно 0.2. Естественно полагать, что во всем этом интервале существует странный аттрактор. Его статистические свойства, по-видимому, близки к свойствам изученного аттрактора. На это указывает, в частности, вид одномерных отображений $x_{n+1}=F(x_n)$, которые качественно очень похожи на рис. 24.

§ 6. Сравнение решений уравнения Курамото — Цудзуки и двухмодовой системы

Выше были исследованы основные свойства двухмодовой системы (3.6). Встает вопрос, обладает ли теми же свойствами задача в частных производных. Сравнение упрощенной системы (3.6) и исходной задачи удобно провести, сравнивая типы их аттракторов. Ранее мы подробно прокомментировали рис. 11, относящийся к динамической системе. На рис. 33 представлены результаты расчетов для задачи в частных производных. В обоих случаях рассматривается задача с $l=\pi$ ($k=1$). На плоскости $\{c_1, c_2\}$ удобно выделить несколько областей, в которых решения имеют один и тот же тип.

6.1. Класс автомодельных решений. Выше линии ABC обе системы обладают одинаковыми свойствами. В линейном приближении здесь устойчиво пространственно-однородное решение (2.3). На линии ABC это решение теряет устойчивость. В системе обыкновенных дифференциальных уравнений (3.6) ему соответствует решение с $\xi=1$, $\eta=0$. При переходе через линию ABC оно также теряет устойчивость и возникает новая

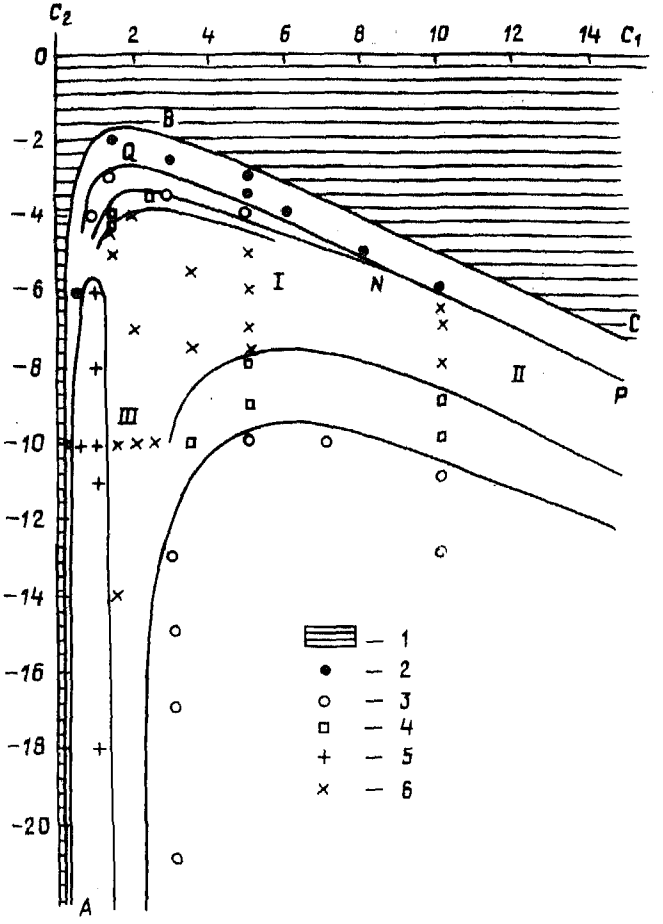


Рис. 33. Типы предельных решений (при $t \to \infty$) уравнения Курамото—Цудзуки в области $l=\pi$:

1—устойчиво пространственно-однородное решение, 2—решение, у которого величины $\rho_n(t)$ не зависят от времени, 3—решение, у которого $\rho_0(t)$ и $\rho_1(t)$ определяют простой цикл, 4—$\rho_0(t)$ и $\rho_1(t)$ определя от двойной цикл, 5—четное решение, 6—более сложные режимы. Сплошные линии приближенно указывают положение границ, на которых решение меняет свой тип

устойчивая особая точка с $\xi \neq 1$. Поэтому при $t \to \infty$ $\xi \to \text{const}$, $\eta \to \text{const}$, $\theta \to \text{const}$. Функции x_0, x_1 и y_0, y_1 в системе (3.4) меняются по гармоническому закону.

В этом же диапазоне параметров в задаче в частных производных происходит выход на решения, у которых величины ρ_n, $n=0, 1, 2, \ldots$, и величины Ψ_n, $n=0, 1, 2, \ldots$, постоянны. Здесь $a_n=\rho_n \cos \varphi_n$, $b_n=\rho_n \sin \varphi_n$, $\Psi_n=\varphi_n-\varphi_0$. Это означает, что происходит выход на автомодельное решение изучаемой задачи. В самом деле, справедлива следующая лемма.

Лемма. Пусть $W(x, t)$ — решение задачи (2.1). Необходимым и достаточным условием того, чтобы оно было автомодельным решением вида (2.12), является выполнение равенств $\rho_n(t)=\alpha_n$, $\Psi_n(t)=\beta_n$, α_n и β_n не зависят от времени.

Доказательство.

1. Необходимость. Пусть решение автомодельно, тогда

$$a_n=A_n\cos\omega t-B_n\sin\omega t,\quad b_n=B_n\cos\omega t+A_n\sin\omega t,$$

где

$$A_n=\nu_n\int_0^l R(x)\cos a(x)\cos(\pi nx/l)\,dx,$$

$$B_n=\nu_n\int_0^l R(x)\sin a(x)\cos(\pi nx/l)\,dx;\quad \nu_0=1/l,\quad \nu_n=2/l,\quad n\geqslant 1.$$

Отсюда следует, что

$$\rho_n^2=A_n^2+B_n^2,\quad \Psi_n=\{\arccos(A_n/\rho_n)-\arccos(A_0/\rho_0)\}.$$

Из этих двух равенств следует, что ρ_n и Ψ_n не зависят от времени.

2. Достаточность. Обратимся к системе (3.1) и выпишем явное выражение для величины $R^2(x, t)=u^2(x, t)+v^2(x, t)$

$$R^2(x, t)=\sum_{n=0}^{\infty} r_n(t)\cos(\pi nx/l). \tag{6.1}$$

где $r_0(t)=\rho_0^2+0.5\sum_{m=1}^{\infty}\rho_m^2$, $r_n(t)=\sum_{m=0}^{\infty}\rho_m\rho_{m+n}\cos(\psi_m-\psi_{m+n})+$ $+0.5\sum_{m=0}^{n}\rho_m\rho_{n-m}\cos(\psi_m-\psi_{n-m})$, $n\geqslant 1$. Так как r_n зависят только от ρ_m и разностей фаз Ψ_m, то величина R^2 не меняется со временем.

Обозначим $W(x, t)=R(x)e^{i\varphi}$. Можно проверить, что

$$\begin{aligned}\cos(\varphi-\varphi_0)&=\left[\sum_{n=0}^{\infty}\rho_n\cos(\pi nx/l)\cos\Psi_n\right]\Big/R(x),\\ \sin(\varphi-\varphi_0)&=\left[\sum_{n=0}^{\infty}\rho_n\cos(\pi nx/l)\sin\Psi_n\right]\Big/R(x)\end{aligned} \tag{6.2}$$

и, следовательно, $\varphi-\varphi_0=a(x)$ не зависит от времени. Из формул (3.1) можно получить значение

$$\dot\varphi_0=-c_2r_0-\frac{1}{2\rho_0}\sum_{m=1}^{\infty}\rho_m r_m(c_2\cos\Psi_m+\sin\Psi_m)=\omega, \tag{6.3}$$

которое тоже постоянно. Поэтому $\varphi=\omega t+a(x)$ и решение автомодельно.

Сравним координаты особой точки упрощенной системы с теми значениями ρ_0 и ρ_1, которые характеризуют автомодель-

ные решения задачи (2.1) вида (2.12). Из таблицы 2 видно, что эти значения совпадают с точностью до нескольких процентов. Расчеты проводились по чисто неявной разностной схеме со вторым порядком аппроксимации краевых условий. Таким образом, в этой области параметров приближенная система дает хорошее количественное описание решений задачи в частных производных.

Таблица 2

c_1	c_2	Система 3 ОДУ $k=1$		Задача в частных производных $l=\pi$			
		ρ_0	ρ_1	ρ_0	ρ_1	h/π	τ
0,3	−10	0,969	0,243	0,941	0,150	1/40	$2\cdot10^{-3}$
0,5	−6,0	0,909	0,399	0,923	0,294	1/40	$2\cdot10^{-3}$
3,0	−2,5	0,857	0,337	0,845	0,331	1/30	10^{-2}
6,0	−4,0	0,901	0,262	0,891	0,227	1/30	10^{-2}
8,0	−5,0	0,919	0,234	0,909	0,229	1/40	$2\cdot10^{-3}$
10	−6,0	0,932	0,214	0,923	0,201	1/40	$2\cdot10^{-3}$

Типичный вид функции $u(x, t)$ в автомодельном решении вида (2.12) показан на рис. 34. Видно, что это решение может описывать достаточно сложный автоволновой процесс, в ходе которого локальные экстремумы функций u и v периодически появляются и исчезают.

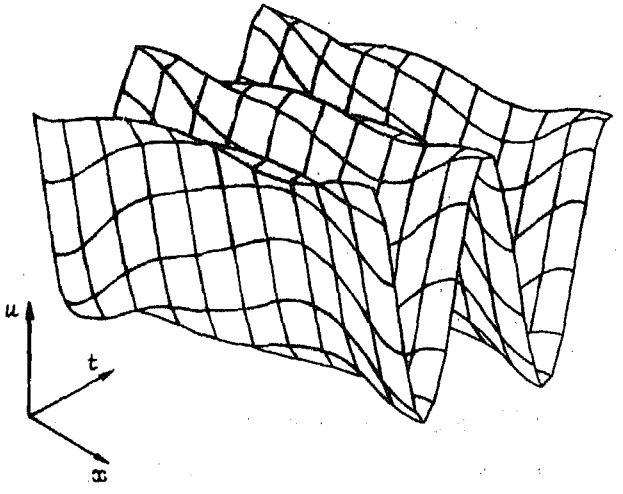


Рис. 34. Функция $u(x, t)$, соответствующая автомодельному решению вида (2.12) при $c_1=2$, $c_2=-1$, $l=18{,}6$

Нижняя граница области параметров, в которой асимптотику определяет автомодельное решение (участок QNP на рис. 33), также может быть предсказана с хорошей точностью. На этой кривой происходит бифуркация Хопфа. В приближенной системе рождается предельный цикл, в задаче (2.1) — решение, у которого функция $R^2(x, t)=u^2(x, t)+v^2(x, t)$ периодична по времени.

6.2. Четные автомодельные решения. Из упрощенной системы следует, что в области параметров AEF (см. рис. 11) также существует устойчивая особая точка. Поэтому и здесь должен происходить выход на автомодельные решения. Обратимся к результатам расчетов. Типичная картина показана на рис. 35.

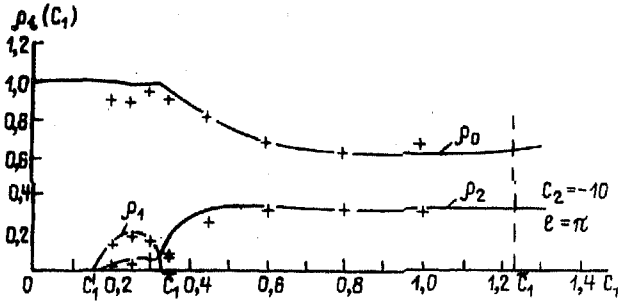


Рис. 35. Изменение параметров автомодельного решения с ростом c_1. Шаг по параметру c_1 равен 0,01. Сплошные линии соответствуют системе пяти обыкновенных дифференциальных уравнений, маркеры — расчетам в частных производных

Выделим несколько характерных областей на прямой c_1 и рассмотрим поведение решений.

1. $0<c_1<c_1'$. Как и следует из двухмодовой системы, здесь устойчиво пространственно-однородное решение. Линейный анализ его устойчивости позволяет найти значение c_1'.

2. $c_1'<c_1<\bar{c}_1$. В решении есть нулевая, первая и вторая гармоники (остальные на порядок меньше), при $t\to\infty$ оно выходит на автомодельное решение вида (2.12). Значение c_1 близко к тому, которое дает линейный анализ устойчивости пространственно-однородного решения относительно второй гармоники.

3. $\bar{c}_1<c_1<\bar{c}_1$. Вновь происходит выход на автомодельные решения того же вида. Однако они необычны. В их рядах Фурье нет гармоник с нечетными номерами. Функции u и v при $t\to\infty$ являются четными, несмотря на то, что начальные данные симметрией не обладали. Параметры этих решений также могут быть предсказаны с точностью до нескольких процентов на основе двухмодовой системы (3.6) [12]. В ней надо положить $k=2\pi/l$, так как наибольшую амплитуду имеют нулевая и вторая гармоники.

4. $c_1 \geqslant \tilde{c}_1$. При $t \to \infty$ величины ρ_n не выходят на постоянные значения. Амплитуды трех первых мод сравнимы между собой.

Для того, чтобы качественно объяснить наблюдаемую картину, нужно использовать более сложную модель, чем система (3.6). Оказывается достаточно учесть первые шесть уравнений из системы уравнений (3.1), записав их в переменных $\{\rho_0, \rho_2, \Psi_2, \rho_1, \Psi_1\}$.

Четное автомодельное решение задачи в частных производных наблюдается при $c_1 \in (\bar{c}_1, \tilde{c}_1)$. Чтобы оценить границы этого интервала, исследуем устойчивость четного решения полученной приближенной системы пяти обыкновенных дифференциальных уравнений относительно первой гармоники. Пусть величины $\{\rho_0, \rho_2, \Psi_2, 0, \Psi_1\}$ определяют особую точку этой системы для $k = \frac{\pi}{l}$. Тогда $\{\rho_0, \rho_2, \Psi_2\}$ является особой точкой системы (3.6) для $k = 2\frac{\pi}{l}$. Можно проверить, что эта точка устойчива в рассматриваемой области параметров. Матрица **A** линеаризованной системы (3.6) отрицательно определена. Значение Ψ_1 можно найти из условия $\dot{\Psi}_1 = 0$.

Линеаризованная система пяти уравнений в этом случае имеет вид

$$\begin{pmatrix} \dot{\rho}_0 \\ \dot{\rho}_2 \\ \dot{\Psi}_2 \\ \dot{\rho}_1 \\ \dot{\Psi}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & & & a_{14} & 0 \\ & \mathbf{A} & & a_{24} & 0 \\ & & & a_{34} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_1 & 0 \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho_0 \\ \rho_2 \\ \Psi_2 \\ \rho_1 \\ \Psi_1 \end{pmatrix}.$$

Три ее собственных значения совпадают с собственными значениями матрицы **A** и имеют отрицательные действительные части. Два других определяются формулами

$$\lambda_1 = P + \sqrt{Q(1 + c_2^2) - R^2}, \quad \lambda_2 = -2\sqrt{Q(1 + c_2^2) - R^2}, \qquad (6.4)$$

где

$$P = 1 - k^2 - 2\rho_0^2 - \rho_2^2 - 2\rho_0\rho_2 \cos\theta_2,$$

$$Q = \rho_0^4 + \rho_2^4/4 + 2\rho_0\rho_2 \cos\theta_2 \left[\rho_0^2 + \rho_2^2/2 + \rho_0\rho_2 \cos\theta_2\right],$$

$$R = -c_1 k^2 - c_2\rho_0^2 - 2c_2\rho_0\rho_2 \cos\theta_2 + 0{,}5\rho_2^2 \left[\sin 2\theta_2 + c_2 \cos 2\theta_2\right].$$

Значения $\bar{c}_1$ и $\tilde{c}_1$ приближенно могут быть найдены из условия $\lambda_1(c_1) = 0$. График функции $\lambda_1(c_1)$ вблизи границ интервала устойчивости показан на рис. 36 ($\lambda_1(c_1)$ вычислялись как по явной формуле, так и численно по поведению интегральных кривых в окрестности особых точек. Полученные результаты с высокой точностью совпадают.)

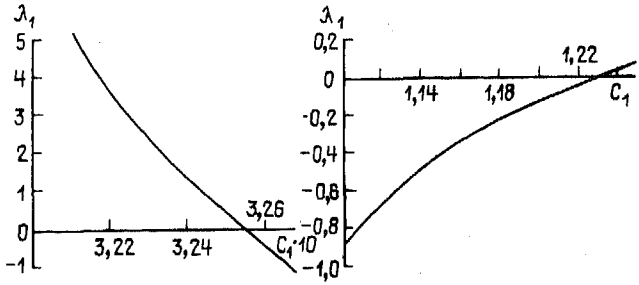


Рис. 36. Зависимость $\lambda_1(c_1)$ на границах интервала устойчивости четного решения

Рис. 35 показывает, что в точке $\bar{c}_1$ решение общего вида непрерывно переходит в четное решение, гармоники с нечетными номерами становятся равными нулю. Одновременно первое решение теряет устойчивость, а второе решение становится устойчивым.

Расчеты показывают, что решения системы пяти обыкновенных дифференциальных уравнений и исходной задачи близки (см. рис. 35). Это дает основание полагать, что и в задаче в частных производных изменение типа решения обусловлено неустойчивостью четных автомодельных решений относительно возмущений первой гармоники.

Обычно симметричные решения в задачах синергетики оказываются неустойчивыми. В изучаемой задаче это не так: существует область параметров, где устойчиво четное автомодельное решение. В отличие от большинства открытых нелинейных систем, где происходит спонтанная потеря симметрии [52, 70], здесь наблюдается спонтанное ее возникновение. При $t \to \infty$ решение обладает симметрией, которой нет у начальных данных.

В силу четности функций u и v нелинейная система распадается при $t \to \infty$ на две одинаковые невзаимодействующие подсистемы. Более сложные симметричные решения соответствуют распаду системы на большее число невзаимодействующих частей. Они могут оказаться устойчивыми в областях большей длины.

Выше мы исследовали изменение решений задачи (2.1) при различных значениях c_1, c_2, когда длина области была фиксирована. Вместе с тем во многих случаях важно представлять, как меняется решение при изменении l. Анализ такой задачи для стационарных диссипативных структур привел к обнаружению, так называемой, зонной структуры. Оказалось, что при увеличении длины области структуры могут периодически появляться и исчезать (в последнем случае пространственно-однородное решение вновь становится устойчивым) [37].

Зафиксируем параметры c_1, c_2 в изучаемой модели и по-

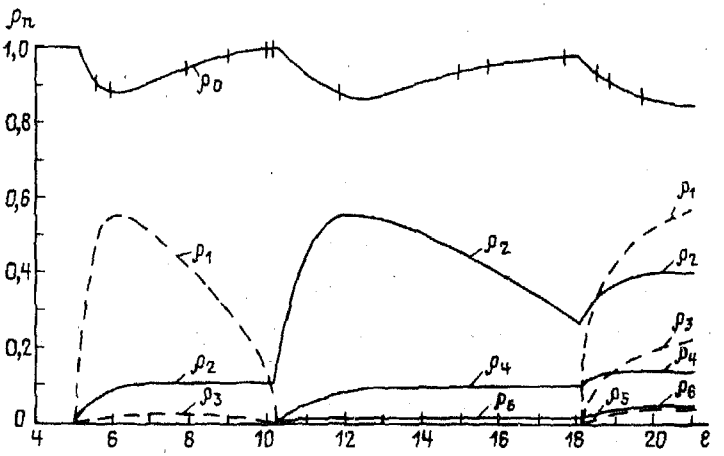


Рис. 37

смотрим, как будет меняться решение задачи (2.1) при росте l. На рис. 37 показана зависимость установившихся значений ρ_n от параметра. При $l \approx 5$ пространственно-однородное решение теряет устойчивость, и далее асимптотику определяет автомодельное решение вида (2.12). Вначале наибольшую амплитуду имеют нулевая и первая моды. Затем первая гармоника убывает, и решение становится симметричным. Начиная с $l \approx 18$, число гармоник с близкими амплитудами быстро возрастает, но решение продолжает оставаться автомодельным. При $l > 22$ в системе наблюдается сложный колебательный режим. Вопрос о простых и эффективных упрощенных моделях в этой области параметров пока остается открытым.

6.3. Двухчастотные режимы. Если с различных начальных данных происходит выход на одно и то же решение задачи в частных производных, в котором $|W|$ периодически зависит от времени, то мы будем называть такое решение циклом. Выделим в нем функции $\rho_0(t)$, $\rho_1(t)$ и будем сравнивать их с предсказаниями упрощенной системы. Здесь снова удобно использовать обозначение S^n, где n — число оборотов, которое делает проекция решения на плоскость $\{\rho_0, \rho_1\}$ за один период.

Можно убедиться в справедливости следующего утверждения [19].

Лемма IV. Пусть решение задачи (2.1) таково, что

$$\rho_n(t+T) = \rho_n(t), \; n = 0, 1, 2, \ldots, \qquad (6.5)$$
$$\Psi_n(t+T) = \Psi_n(t) + 2\pi m_n, \; m_n \in \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\},$$

$\rho_0 \neq 0$ при $t \in [0, \infty)$. Тогда его можно представить в виде

$$W(x, t) = R(x, t) \exp[i(\omega_0 t + \omega_1(t) + a(x, t))], \qquad (6.6)$$

где $R(x, t+T)=R(x, t)$, $\omega_1(t+T)=\omega_1(t)$,

$$a(x, t+T)=a(x, t)+2\pi p, \quad p\in\{0, \pm1, \pm2, \ldots\}, \quad \omega_0=\text{const}.$$

Таким образом, бифуркация Хопфа в задаче (2.1) будет связана с переходом от автомодельных решений вида (2.12) к более сложным решениям вида (6.6), в которых есть две, в общем случае независимые, частоты.

Сравнение рис. 11 и 33 показывает, что решения приближенной системы (3.6) и уравнения в частных производных качественно ведут себя одинаково при изменении параметров c_1 и c_2. В том и в другом случае плоскость параметров разбивается на похожие области, в которых решения не меняют свой тип. Однако границы областей несколько смещены. Это естественно, поскольку на этих линиях происходит бифуркация решений, то на их положение оказывают влияние высшие гармоники.

Примеры сопоставления простых циклов представлены на рис. 38. В области, расположенной выше границы перехода к сложным решениям, периоды циклов отличаются не более, чем на 10—15%. Близки и другие характеристики решений, например, величины $\rho_{0\min}$, $\rho_{0\max}$, $\rho_{1\min}$, $\rho_{1\max}$ [12].

Примеры простых циклов, у которых параметры c_1 и c_2 лежат ниже области сложных решений, показаны на рис.

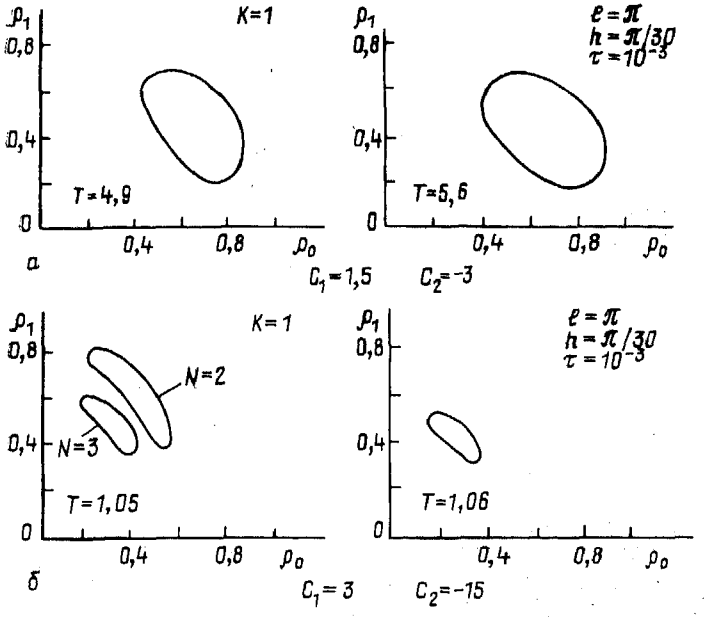


Рис. 38. Сравнение простейших периодических решений динамической системы (3.6) (слева) и задачи в частных производных (справа)

38б. Обратим внимание на то, что их периоды хорошо согласуются, хотя размеры могут отличаться в несколько раз. Причиной расхождения является влияние второй гармоники. Это показывает решение упрощенной системы, в которой учтены не только нулевая и первая, но также и вторая гармоника ($N=3$ на рис. 38б). Ее решение практически не отличается от того, что дает задача (2.1).

Рассматривая двухмодовую систему, мы обратили внимание на то, что в широком диапазоне изменения параметра c_2 период простых циклов от c_2 не зависит. (Напомним, что именно c_2 определяет период пространственно-однородных решений). Рис. 15 показывает, что в том же диапазоне параметров период $\rho_n(t)$ от c_2 практически не зависит. Значения T в упрощенной системе и в исходном уравнении хорошо согласуются между собой. Если далее уменьшать параметр c_2 ($c_2 \leqslant -35$), то решения системы (3.6) и задачи (2.1) начинают вести себя поразному. В упрощенной модели существует устойчивая особая точка, а в исходном уравнении — простой цикл. Его период медленно уменьшается с уменьшением c_2 и при $c_2 \leqslant -400$ выходит на постоянное значение.

Амплитуда цикла меняется по закону $\sim |c_2|^{-1/2}$. Решения исходного уравнения и задачи

$$W_t = W + (1+ic_1)W_{xx} - ic_2 W|W|^2, \quad 0 \leqslant x \leqslant l,$$
$$W_x(0, t) = W_x(l, t) = 0, \quad W(x, 0) = W_0(x) \tag{6.7}$$

в этой области параметров близки. Отметим, что в задаче (6.7) существенны только два параметра c_1 и l. Замена переменных $W = W' c_2^{-1/2}$ позволяет сделать $c_2 = 1$. Область применимости уравнения (6.7) ограничена. В частности, его однородные решения неограниченно возрастают при $t \to \infty$. Тем не менее его анализ может оказаться полезным.

Поскольку $|W| \to 0$ при $c_2 \to -\infty$, то в этой области параметров $\rho_0(t)$ и $\rho_1(t)$ также близки к нулю. Аналог такого решения в двухмодовой системе должен лежать вблизи начала координат, где величина Ω в формуле (4.3) строго положительна, и, следовательно, устойчивых циклов нет. Этим обусловлено различие в поведении решений исходной задачи и упрощенной модели.

Расчеты показывают, что при $c_1 = 3{,}0$, $c_2 \to -\infty$, $l = \pi$ 3—4 первых коэффициента Фурье функций u, v сравнимы между собой. Для описания таких решений в системе (3.1) нужно учитывать по крайней мере четыре гармоники. Однако в некоторых физических задачах представляет самостоятельный интерес исследование двухмодовой системы для уравнения (6.7) [55, 113]. В работе [113] проведен подробный анализ этой модели. В ней обнаружен каскад бифуркаций удвоения периода, гистерезис, странные аттракторы и переходы от стохастических к

регулярным режимам в результате касательных бифуркаций.

6.4. Некоторые методические вопросы. Вопросы методики расчетов имеют большое значение при исследовании нелинейных задач. Решения могут здесь иметь сложный, часто непериодический характер, и практически единственным источником информации о них является вычислительный эксперимент.

При численном решении задачи (2.1) использовалась чисто неявная разностная схема со вторым порядком аппроксимации краевых условий [58]. При учете нелинейности применялся метод простой итерации, для решения линейной системы — матричная прогонка. В качестве начальных данных обычно использовались функции $u_0(x)=\sum_{m=0}^{3}\cos(2\pi m x/l)$, $v_0(x)=\sum_{m=0}^{3}\cos(\pi(2m+1)x/l)$.

Очень важным фактором оказалась аппроксимация краевых условий. Использование схемы со вторым порядком аппроксимации краевых условий улучшает точность расчетов и позволяет считать с более крупным шагом по пространству. Это существенно вблизи линий бифуркации, где параметры решений могут сильно зависеть от длины области l.

Для изучаемой задачи обычно нужны большие времена расчета (сильно зависящие от c_1 и c_2 и быстро растущие с увели-

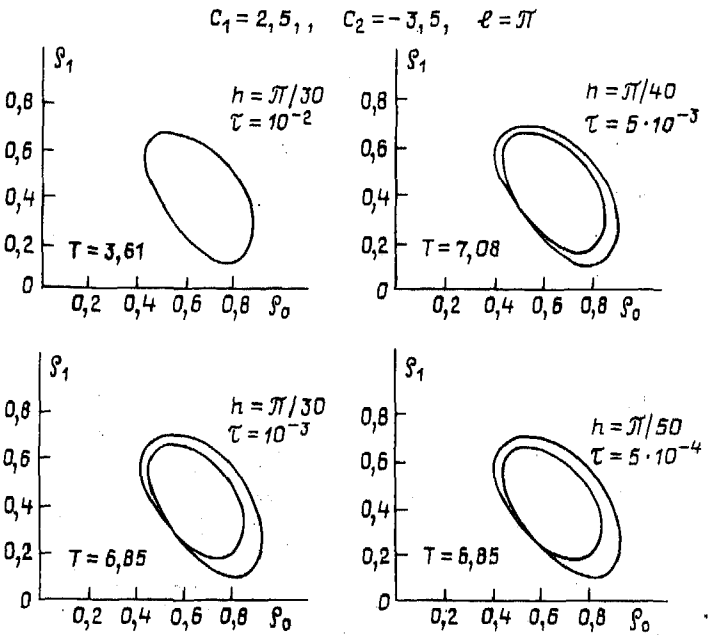


Рис. 39. Влияние шагов h и τ на результаты решения задачи (2.1)

чением длины области), за которые система успевает выйти на установившийся режим. Другая особенность — необходимость небольших шагов по времени и пространству. Жестким тестом для выбора шага по времени τ является расчет пространственно-однородного решения, период которого равен $2\pi/c_2$. Как правило, найденный шаг позволяет вычислять и другие решения, период которых обычно больше. Шаг τ должен убывать с ростом c_1. Увеличение шагов может качественно изменить картину процесса. Пример такого поведения показан на рис. 39. При $\tau=10^{-2}$, $h=\pi/30$ расчет в частных производных дает простой цикл. Уменьшение шагов h и τ приводит к изменению типа решения, поведение системы при $t\to\infty$ определяет двойной цикл. Результаты других методических расчетов приведены в работе [12].

Коэффициенты Фурье решений изучаемой задачи быстро убывают с ростом их номера. Поэтому в ряде случаев здесь удобно использовать метод Галеркина и его модификации. Именно такие методы применялись при расчете симметричных решений. На рис. 40 приведены приближенные решения системы уравнений (2.1), в которой учтены N первых гармоник.

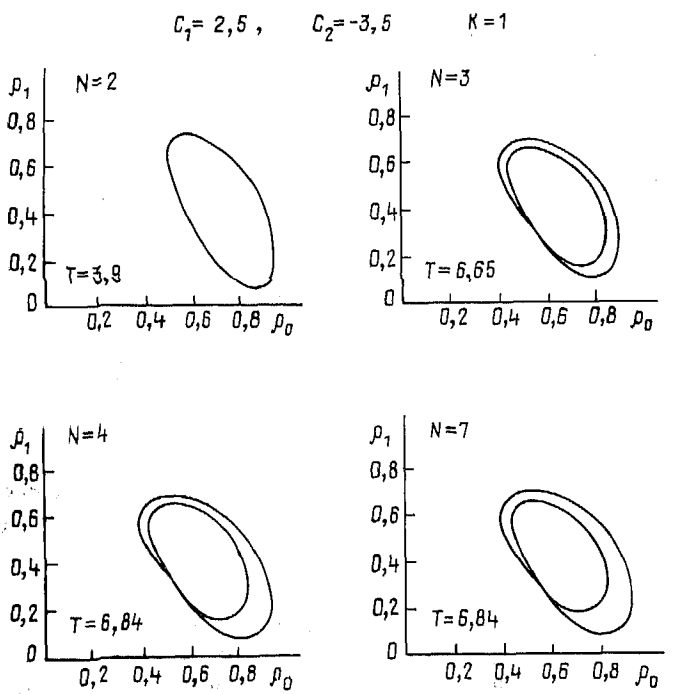


Рис. 40. Приближенные решения системы уравнений (3.1), в которой учтены N первых гармоник

Видно, что при $N \geqslant 4$ параметры цикла практически не меняются.

Возмущения, которые вносит в решение разностная схема и метод Галеркина, различны. В самом деле, при численной реализации симметричных решений различных типов эти решения сохраняют свойства симметрии при $t \to \infty$, что совпадает со свойствами исходной задачи. Применение разностной схемы приводит к другому результату: решение с симметричными начальными данными распадается. Поэтому выход на некоторое решение в этом случае говорит о его устойчивости, что особенно важно в изучаемых задачах. Похожая ситуация характерна и для сред с триггерными свойствами [45].

§ 7. Диффузионный хаос

В этом параграфе рассматриваются сложные непериодические решения уравнения Курамото — Цудзуки. В первую очередь нас будут интересовать следующие вопросы. Как происходит переход от простых решений к сложным при изменении параметров задачи? Какие бифуркации приводят к возникновению хаоса? Можно ли использовать двумерные и одномерные отображения в качестве упрощенных моделей?

Мы будем изучать одномерную задачу (2.1) для небольших областей. Этот случай особенно интересен по следующей причине. Увеличение длины области или размерности задачи должно приводить к усложнению решений. Поэтому если хаос будет обнаружен в изучаемой задаче, то его можно рассматривать как достаточно общее свойство уравнения Курамото — Цудзуки.

В этом отношении исследование задач гидродинамики, где нужно учитывать многомерные эффекты, намного сложнее, и это приводит к тому, что «...для полных уравнений Навье — Стокса мы не только не знаем ни одного турбулентного решения, но даже не известно, существует ли такое. Как должен выглядеть стохастический аттрактор у турбулентного течения, тоже неясно». [50]

Как и ранее, будем рассматривать задачу (2.1) при $l=\pi$. На плоскости $\{c_1, c_2\}$ (см. рис. 33) можно выделить три области параметров, в каждой из которых переход к сложным решениям и сами сложные решения обладают рядом интересных особенностей.

7.1. Возникновение непериодических режимов в области I, II. Их свойства. Положим $c_1=5{,}0$ и будем следить за изменением решений, когда параметр c_2 уменьшается (область параметров I). Начальные данные во всех случаях имеют вид $u_0(x)=\sum_{p=0}^{3}\cos(2\pi p x/l)$, $v_0(x)=\sum_{p=0}^{3}\cos[(2p+1)\pi x/l]$. Из расчетов,

проведенных для двухмодовой системы при $k=1$, следует, что возникновение непериодических решений в этом случае обусловлено последовательностью бифуркаций удвоения периода $S^n \to S^{2n}$. Простой цикл возникает в результате надкритической бифуркации Хопфа. Качественно та же картина наблюдается в задаче в частных производных. А именно, при $c_1=5$, $c_2=-4{,}1$, $l=\pi$ асимптотику определяет цикл S^1 с периодом $T=3{,}00$, при $c_1=5$, $c_2=-4{,}16$, $l=\pi$ в системе есть устойчивый цикл S^2, его период $T=5{,}76$.

Затем происходит переход к непериодическим решениям. Поэтому рассмотрим снова последовательность $\{M_n\}$ локальных максимумов функции $\rho_0(t)$. По оси абсцисс отложим значения n-го максимума, по оси ординат — $(n+1)$-го. Во многих случаях точки $\{M_n, M_{n+1}\}$ лежат на кривой $M_{n+1}=f(M_n)$, которая в пределах точности расчетов оказывается непрерывной и однозначной. Она определяет одномерное отображение отрезка в себя.

Будем считать, что элементы последовательности $\{M_n\}$ различны, если они отличаются более чем на ε (ε определяется точностью расчетов и для задачи в частных производных составляет $\sim 10^{-3}$). Характерное время расчета сильно зависит от типа решения. Для сложных циклов обычно строилась последовательность 50—80 максимумов. Решения, содержащие 100—300 различных максимумов, считались непериодическими. Как правило, такой последовательности достаточно, чтобы выяснить особенности функции $f(M)$. Для исследования статистических свойств решения, например, построения гистограммы $N(\rho_0)$, показывающей, как часто максимумы $\rho_0(t)$ принимают то или иное значение, нужно более 10^4 значений.

Обратимся к результатам численного решения задачи в частных производных для $c_1=5{,}0$. Вначале картина оказывается точно такой же, как в двухмодовой системе (см. рис. 41а, рис. 17). Функция f по-прежнему имеет один острый максимум, который смещается влево при уменьшении c_2. Количественного соответствия здесь тем не менее нет — масштабы на этих рисунках различны.

При дальнейшем уменьшении c_2 начинается перестройка функции f, которой нет в упрощенной модели (см. рис. 41б). Сначала у кривой f появляется минимум. Решение здесь тоже непериодично. Однако наличие участка с малой производной вблизи гладкого минимума говорит о возможности появления устойчивых предельных циклов. И действительно, при $c_2=-5{,}6$ в системе устойчив предельный цикл S^8. Далее у функции f появляются два острых максимума.

Во всех рассмотренных выше случаях отображение f было однозначным. При $c_2=-6{,}3$ однозначность теряется, решение по-прежнему непериодично.

Потом происходит еще одна перестройка, после которой

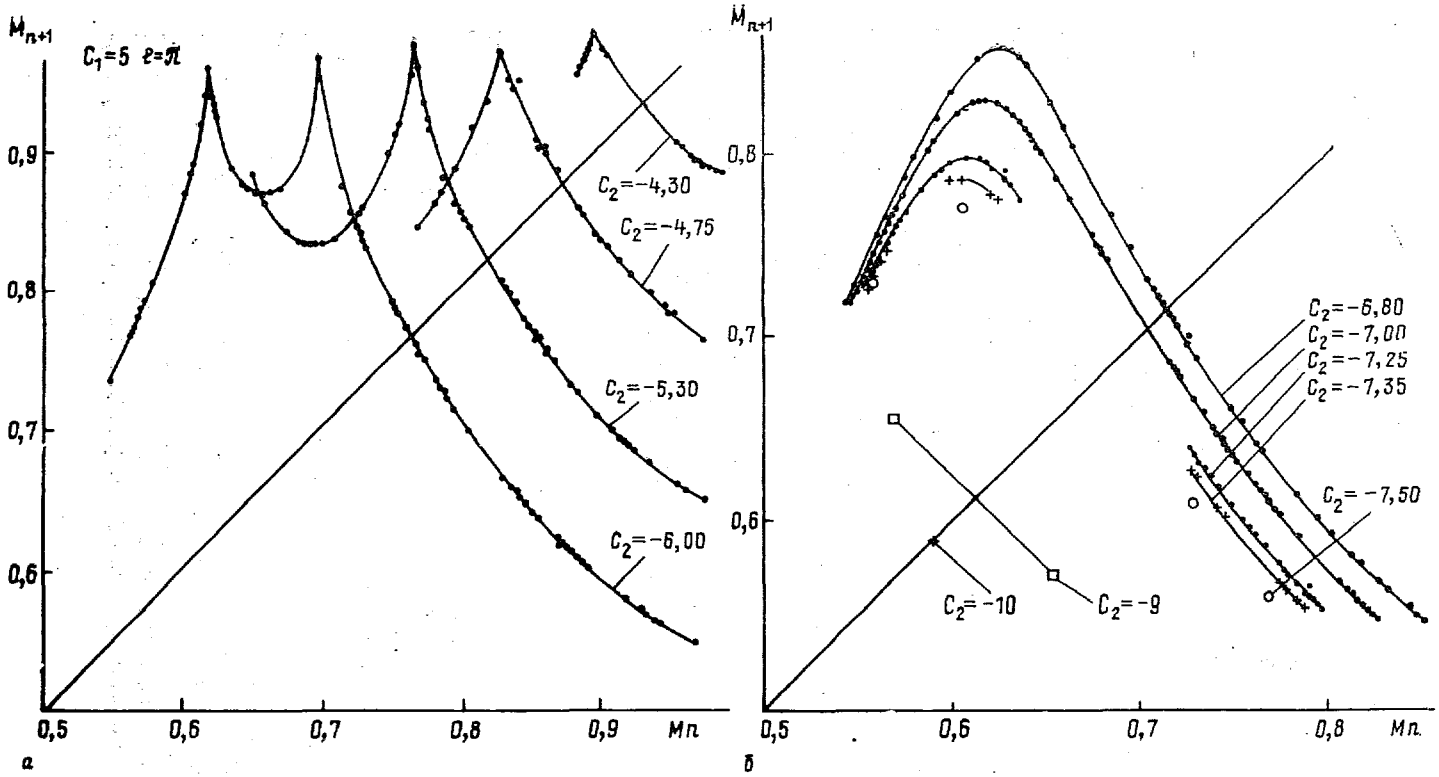


Рис. 41*а*, *б*. Изменение одномерных отображений $M_{n+1}=f(M_n)$ в зависимости от параметра c_2. Задача в частных производных решалась при $c_1=5{,}0$, $l=\pi$

функция f становится гладкой и однозначной (см. рис. 41б). Вновь наблюдается сложный непериодический режим. Точки при этом лежат в пределах нескольких «островов». Такие режимы, получившие название полупериодических решений или шумящих циклов, интенсивно исследуются в настоящее время [77]. Порядок обхода островов в них фиксирован, но в пределах каждого из них траектория ведет себя стохастическим образом. Для решения с n островами в работе [119] было введено обозначение χ^n. На рисунке 41б мы видим, что в исследуемой системе происходят переходы $\chi^1 \to \chi^2$ и $\chi^2 \to \chi^4$. Исследование семейства одномерных отображений

$$x_{n+1} = \lambda x_n (1 - x_n) \tag{7.1}$$

показало, что в окрестности шумящих циклов должны существовать сложные периодические решения. Естественно ожидать, что они есть и в изучаемом случае.

Если считать функцию $f(M)$ непрерывной и однозначной, то ее можно рассматривать в качестве полезной упрощенной модели. При ее анализе можно воспользоваться результатами теории одномерных отображений. В частности, здесь применимы теоремы А. Н. Шарковского [71], Ли и Йорке [106] о сосуществовании циклов различных типов, а также ряд теорем эргодической теории [73, 77, 93]. Из вида функции $f(M)$ ясно (см. рис. 41б), что вблизи вершины она может быть приближена квадратичной параболой. По-видимому, здесь в полной мере применима теория Фейгенбаума [27, 84, 85]. С ее помощью можно предсказать значения c_2, при которых происходят последовательные бифуркации удвоения.

При $c_1 = 5$, $c_2 = -10$ асимптотику решений задачи (2.1) определяет простой цикл. Если увеличивать параметр c_2, двигаясь к области диффузионного хаоса снизу, то в системе также будут наблюдаться бифуркации удвоения периода. Циклы S^1, S^2, S^4 показаны на рис. 42. При $c_2 = -7{,}4$ устойчив цикл S^8, при $c_2 = -7{,}35$ — S^{16}.

Основное отличие области параметров II от области I связано с тем, как происходит в ней переход к непериодическим решениям при уменьшении параметра c_2. Вдали от кривой QNP поведение решений в области I и II качественно одинаково как для исходной системы, так и для упрощенной модели. Это показывает и сравнение соответствующих одномерных отображений [13].

В упрощенной системе при уменьшении параметра c_2 скачком происходил переход от особых точек к непериодическим решениям. Проведенные расчеты показывают, что аналогичная картина наблюдается и в исходной задаче. От автомодельных решений скачком происходит переход к непериодическим режимам.

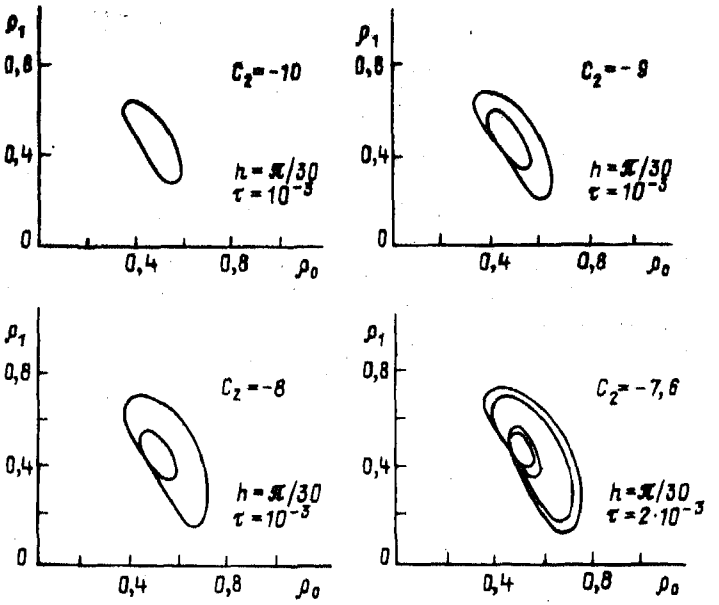


Рис. 42. Усложнение решений задачи (2.1) на линии $c_1=5$, $l=\pi$

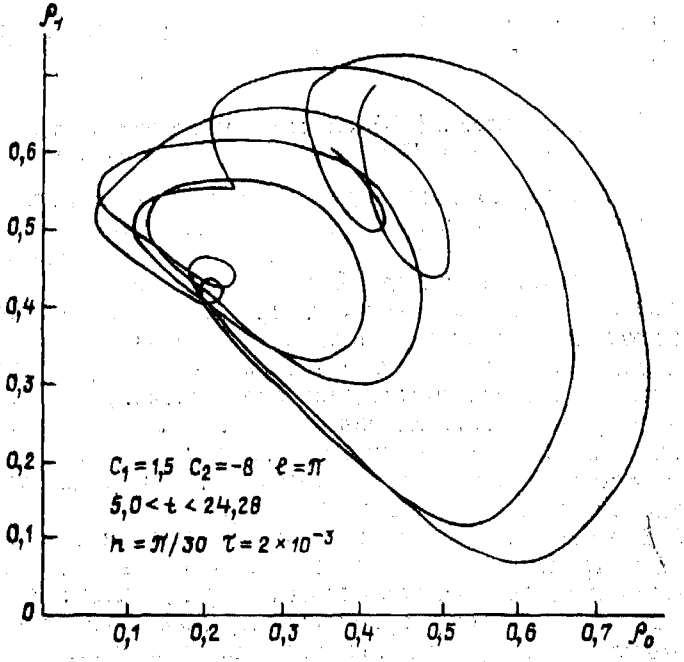


Рис. 43. Часть непериодического решения уравнения Курамото—Цузуки в проекции на плоскость $\{\rho_0, \rho_1\}$. Область параметров III

7.2. Особенности решений в области параметров III. Поведение решений Курамото—Цудзуки и упрощенной модели в области III во многом сходно. На рисунке 43 показана проекция одного из непериодических решений задачи в частных производных на плоскость $\{\rho_0, \rho_1\}$. Видно, что разные витки отличаются размерами, числом и расположением петель, чего не наблюдалось в областях I и II.

Рассмотрим снова зависимость $M_{n+1}(M_n)$. Она может определять одномерное отображение (см. рис. 44а), которое однако сильно отличается от вида функции $f(M)$, полученной в упрощенной модели [13]. При уменьшении c_2 однозначность теряется (см. рис. 44б). Это означает, что в системе возникает аттрактор более высокой размерности.

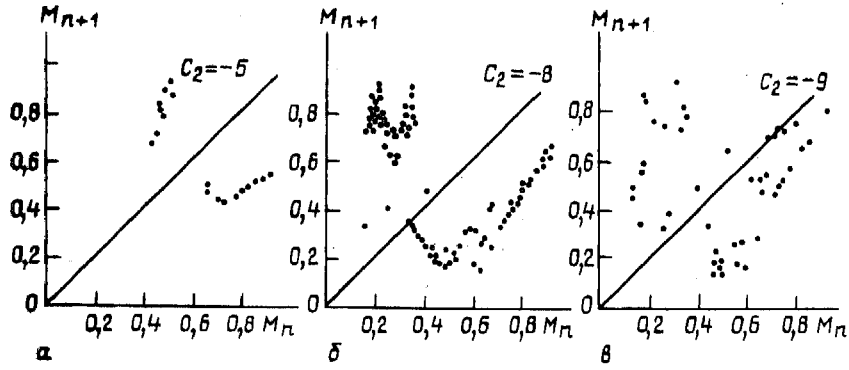


Рис. 44. Последовательности $\{M_n\}$, соответствующие непериодическим решениям уравнения в частных производных; $c_1=1{,}5$, $l=\pi$

Во многих случаях выходу на установившееся решение предшествует сложный переходный процесс. Это подтверждает расчет, показанный на рисунке 44в. Последовательные максимумы здесь не лежат на одной кривой. При $0<t<100$ решение меняется нерегулярным образом. При $t\gtrsim 100$ происходит выход на автомодельное решение вида (2.12) с $\rho_0=0{,}6905$, $\rho_1=0{,}0275$, $\rho_2=0{,}2939$. По-видимому, оно появилось в результате потери устойчивости четного автомодельного решения, определяющего асимптотику при меньшем значении c_1. Похожее поведение наблюдалось в системе Лоренца и было названо метастабильным хаосом. Это явление подробно изучалось и в ряде случаев наблюдалось экспериментально [38, 114].

7.3. Другие задачи, связанные с диффузионным хаосом. Выше рассматривались результаты решения задачи (2.1) для $l=\pi$. Возникает вопрос, возможны ли при других значениях параметров иные пути от упорядоченных решений к хаосу? Расчеты показывают, что при увеличении длины области происходят последовательные бифуркации Хопфа [109]. Если снова выде-

лить локальные максимумы $\rho_0(t)$ и построить график $M_{n+1}(M_n)$, то его типичный вид после двух бифуркаций будет таким, как показано на рис. 45. Возникновение непериодических решений в результате нескольких бифуркаций Хопфа было рассмотрено Рюэлем и Такенсом [57, 72]. Проведенные расчеты позволяют предположить, что и во многих других случаях усложнение решений задачи (2.1) будет идти в соответствии с этим механизмом.

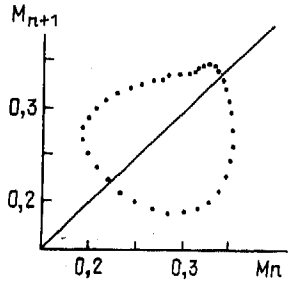


Рис. 45

Мы рассмотрели качественные особенности непериодических решений уравнения в частных производных. Важной задачей представляется оценка их количественных характеристик. В настоящее время появились алгоритмы, позволяющие оценить размерность аттракторов в бесконечномерных системах [82, 87, 117]. Было показано, что для этого достаточно измерять одну из переменных в одной точке в дискретные моменты времени [117]. Представляет большой интерес использование этих методов при исследовании задачи (2.1).

Численные расчеты, проведенные для уравнения Курамото — Цудзуки, показали, что существует несколько областей параметров, где задача (2.1) имеет непериодические решения. При их исследовании оказываются полезными упрощенные модели различных типов: система трех обыкновенных дифференциальных уравнений, семейство одномерных отображений. Теперь мы можем ответить на вопрос о связи диффузионного хаоса с наличием странного аттрактора в конечномерной системе. Такая связь существует. Предсказать многие важные свойства непериодических решений уравнения Курамото — Цудзуки позволяет двухмодовая система (3.6).

Среди них можно выделить следующие. 1. Наличие трех областей, где по-разному происходит переход к непериодическим режимам. 2. Последовательность бифуркаций, приводящая к хаосу. 3. Вид одномерных отображений, соответствующих сложным решениям задачи в частных производных, в широком диапазоне параметров c_1 и c_2. Все это приводит к тому, что исследование странных аттракторов в упрощенной модели дает

важную информацию о диффузионном хаосе, который описывается исходным уравнением.

В настоящее время экспериментально исследуются десятки химических реакций, в которых возможны колебательные и хаотические режимы [25, 31, 112]. Для моделирования их основных черт обычно используют сложные математические модели. Как правило, все они описывают поведение системы вдали от точки потери устойчивости термодинамической ветви. Их детальное исследование оказывается очень сложной задачей.

Исследование задачи (2.1) показывает, что диффузионный хаос может наблюдаться в окрестности точки первой бифуркации. Вероятно, многие качественные особенности колебательных реакций, в которых распределения реагентов пространственно-неоднородны, можно будет объяснить на основе более простой модели (2.1). Поэтому теоретическое и экспериментальное исследование открытых диссипативных систем в окрестности точки бифуркации является естественным и необходимым шагом в их анализе. Особенный интерес представляет экспериментальное изучение сложных периодических по времени процессов и явления диффузионного хаоса.

§ 8. Простейшие типы упорядоченности в двухкомпонентных системах в двумерном случае

Во многих математических моделях большой интерес представляет двумерный аналог уравнения Курамото — Цудзуки

$$W_t = W + (1+ic_1)(W_{xx}+W_{yy}) - (1+ic_2)|W^2|W. \qquad (8.1)$$

К ним можно отнести теорию возникновения ветровых волн на воде [2], исследования диссипативных структур в активных средах и в колебательных химических реакциях [90], некоторые модели морфогенеза [21]. Отметим, что уравнение (8.1) описывает более узкий класс двухкомпонентных систем, чем уравнение Курамото — Цудзуки в одномерных задачах. Поскольку в двумерном случае существенна не только длина, но и направление волнового вектора, то неустойчивых мод становится больше, возникают более сложные модели, чем уравнение (8.1).

Ранее большое внимание было уделено исследованию задачи Коши для этого уравнения. При этом обычно рассматривались спиральные волны или другие решения, имеющие особенности фазы [121]. Вместе с тем полезно было бы изучить поведение решений уравнения (8.1) для случая небольших двумерных областей. Это позволило бы провести более полный анализ, не ограничиваясь одним выделенным классом решений, выяснить основные типы упорядоченности, которые представляли бы интерес и в более сложных задачах.

Рассмотрим следующую краевую задачу

$$W_t = W + (1+ic_1)(W_{xx}+W_{yy}) - (1+ic_2)|W|^2 W,$$
$$0 \leqslant x \leqslant l,\ 0 \leqslant y \leqslant l,\ W(x, y, 0) = W_0(x, y), \qquad (8.2)$$
$$W_x(0, y, t) = W_x(l, y, t) = W_y(x, 0, t) = W_y(x, l, t) = 0.$$

Мы будем рассматривать поведение ее решений при разных значениях c_1 и c_2 в случае небольших областей. В приводимых ниже численных расчетах $l=\pi$.

Остановимся на следующих вопросах. Будут ли устойчивы одномерные решения задачи (8.2) относительно двумерных возмущений ? Имеет ли эта задача решения, у которых нет одномерного аналога? Как происходит усложнение двумерных структур при изменении параметров c_1 и c_2?

Мы будем рассматривать решения краевой задачи в квадрате со стороной l. Коэффициенты диффузии и перекрестной диффузии выбраны одинаковыми по обоим направлениям. Это приводит к тому, что задача (8.2) имеет широкий класс симметричных решений. Например, четных или нечетных относительно осей симметрии квадрата. Эволюция таких решений может качественно отличаться от поведения решений общего вида, как это было в случае одномерной задачи. Далее они рассматриваться не будут. Во всех расчетах начальные данные несимметричны и имеют вид

$$u(x, y, 0) = 0{,}1 \sum_{m,n=0}^{4} \cos(\pi m x/l)\cos(\pi n y/l),$$

$$v(x, y, 0) = 0{,}1 \sum_{m,n=0}^{4} \cos(\pi m x/l)\cos(\pi n y/l)/(m+1).$$

В такой постановке существенны только простейшие симметричные решения. А именно

а) пространственно-однородное решение

$$W(x, y, t) = \exp(-ic_2 t); \qquad (8.3)$$

б) одномерные решения $W(x, y, t) = W(x, t)$ или $W(x, y, t) = W(y, t)$;

в) решения, симметричные относительно диагоналей квадрата $W(x, y, t) = W(y, x, t)$ или $W(x, y, t) = W(l-y, l-x, t)$.

8.1. Упрощенная конечномерная система. При исследовании одномерной задачи (2.1) важную роль играет анализ различных упрощенных моделей. Для построения таких моделей в двумерной задаче удобно представить ее решения в виде $u(x, y, t) = \sum_{m,n=0}^{\infty} a_{mn}(t)\cos\left(\frac{\pi m x}{l}\right)\cos\left(\frac{\pi n y}{l}\right)$, $v(x, y, t) = \sum_{m,n=0}^{\infty} b_{mn}(t) \times$

$\times\cos\left(\frac{\pi m x}{l}\right)\cos\left(\frac{\pi n y}{l}\right)$ и записать систему уравнений, связывающую коэффициенты Фурье a_{mn} и b_{mn}:

$$\begin{aligned}\dot{a}_{mn}&=a_{mn}-(a_{mn}-c_1 b_{mn})\,k^2(m^2+n^2)-(u_{mn}-c_2 v_{mn}),\\ \dot{b}_{mn}&=b_{mn}-(c_1 a_{mn}+b_{mn})\,k^2(m^2+n^2)-(c_2 u_{mn}+v_{mn}),\quad k=\pi/l,\end{aligned}\tag{8.4}$$

где u_{mn} и v_{mn} — известные функции $\{a_{ij}\}$, $\{b_{ij}\}$. В дальнейшем будем также пользоваться обозначением $\rho^2_{mn}=a^2_{mn}+b^2_{mn}$. Упрощенные модели можно получить из этой бесконечной системы, оставляя в ней конечное число уравнений. Это можно сделать разными способами, например, отбрасывая гармоники с номерами, у которых $m\geqslant p$ или $n\geqslant p$. Полученную таким образом упрощенную систему мы будем называть системой с $N=p$, она содержит $2p^2$ уравнений.

Система (8.4) может оказаться полезной при численном решении задачи (8.2). Как показывают методические исследования, в ряде случаев применение метода Галеркина оказывается более эффективным, чем использование разностной схемы. Особенно важным это может стать при изучении решений в больших областях.

Далее мы будем рассматривать упрощенную модель с $N=2$. Число входящих в нее уравнений можно на единицу уменьшить, если перейти к переменным ρ_{mn}, θ_{mn} по формулам $a_{mn}=\rho_{mn}\times\cos\varphi_{mn}$, $b_{mn}=\rho_{mn}\sin\varphi_{mn}$, $\theta_{mn}=\varphi_{mn}-\varphi_{00}$. Уравнение для φ_{00} можно решать отдельно. Это означает, что функции $a_{mn}(t)$, $b_{mn}(t)$ изменяются более сложно, чем $\rho_{mn}(t)$ и $\theta_{mn}(t)$. В частности, особым точкам $\rho_{mn}=\mathrm{const}$, $\theta_{mn}=\mathrm{const}$ соответствуют периодические решения в переменных a_{mn}, b_{mn}, предельным циклам — двухчастотные режимы. Поэтому в дальнейшем мы будем называть решения упрощенной системы, у которых $\rho_{mn}=\mathrm{const}$, особыми точками, решения, у которых ρ_{mn} периодичны, — предельными циклами.

В упрощенной модели с $N=2$ есть аналог простейших симметричных решений. Однородному решению (8.3) соответствует особая точка $\rho_{00}=1$, $\rho_{mn}=0$, $m+n\neq 0$. Одномерным по оси y решениям задачи (8.2) — такие решения упрощенной системы, у которых $a_{mn}=0$, $b_{mn}=0$ при $n\neq 0$.

Решениям задачи (8.2), симметричным относительно диагонали квадрата $x=y$, можно сопоставить интегральные кривые, на которых $a_{mn}=a_{nm}$, $b_{mn}=b_{nm}$. Их мы также будем называть симметричными.

Проследим, как меняется тип решений упрощенной системы при уменьшении параметра c_2. Рассмотрим линию $c_1=1.5$. В одномерной задаче последовательность переходов была такой, как показано на схеме 1. (Здесь представлены только простейшие аттракторы.)

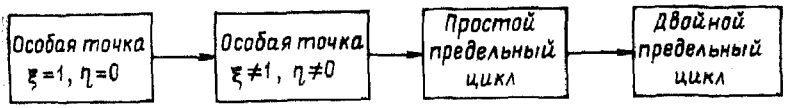


Схема 1

В модели с $N=2$ точка с $\rho_{00}=1$, $\rho_{mn}=0$, $m+n\neq 0$ (она соответствует решению (8.3)) также теряет устойчивость, при этом появляется устойчивая точка с $\rho_{00}\neq 1$. Значение c_2, при котором происходит эта бифуркация, совпадает с критическим значением параметра для задачи в частных производных. В появившейся особой точке $\rho_{mn}=0$ при $m\neq 0$. Заметим, что одновременно в системе появляется и другая особая точка, у которой $\rho_{mn}=0$, если $n\neq 0$. В этом случае система с $N=2$ упрощается и переходит в динамическую систему (3.6).

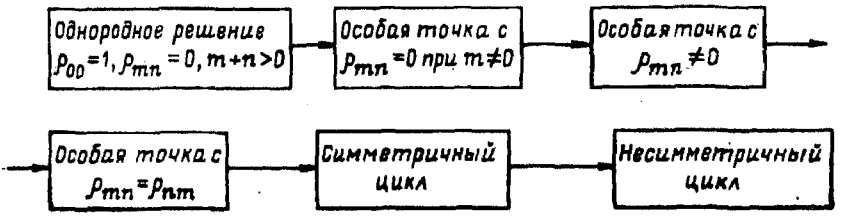


Схема 2

Дальнейшее усложнение решений показано на схеме 2. При уменьшении c_2 точка, у которой $\rho_{mm}=0$ при $m\neq 0$ также теряет устойчивость, и асимптотику определяет особая точка с $\rho_{mn}\neq 0$ (см. рис. 46). Затем при некотором значении c_2 ρ_{01} становится в точности равным ρ_{10}, и далее в расчетах наблюдается выход на симметричное решение с $a_{01}=a_{10}$, $b_{01}=b_{10}$. При $c_2\approx -3.3$ происходит бифуркация Хопфа, и рождается симметричный предельный цикл ($\rho_{01}(t)=\rho_{10}(t)$). Положение особой точки, потерявшей устойчивость, и примеры симметричных циклов представлены на рис. 47а. При $c_2\cong -3.7$ цикл теряет симметрию. Большинство бифуркаций на схеме 2 связано с потерей или возникновением симметрии, что существенно отличает двумерную задачу от одномерной.

Первый переход в этой последовательности связан с возникновением особой точки с $\rho_{mn}=0$, $m\neq 0$. Критическое значение параметра, как и в одномерном случае, определяется равенством (3.12). Однако ситуация может быть более сложной. В этом можно убедиться, проследив за изменением решений на линии $c_1=3{,}0$ (см. рис. 46). Схема усложнения решений, определяющих асимптотику упрощенной системы с $N=2$, будет следующей. Вначале появляется точка с $\rho_{01}=\rho_{10}$ и далее симметричный цикл (см. схему 3). Точка и пример цикла показаны на

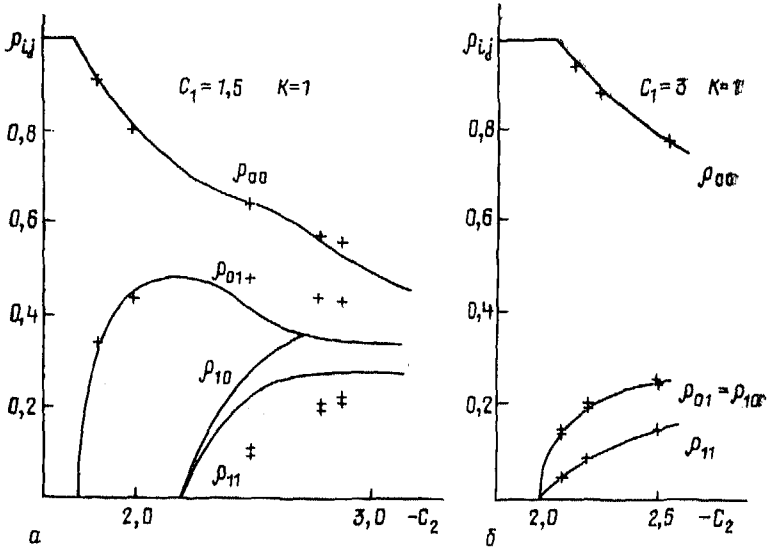


Рис. 46. Устойчивые особые точки в упрощенной модели с $N=2$

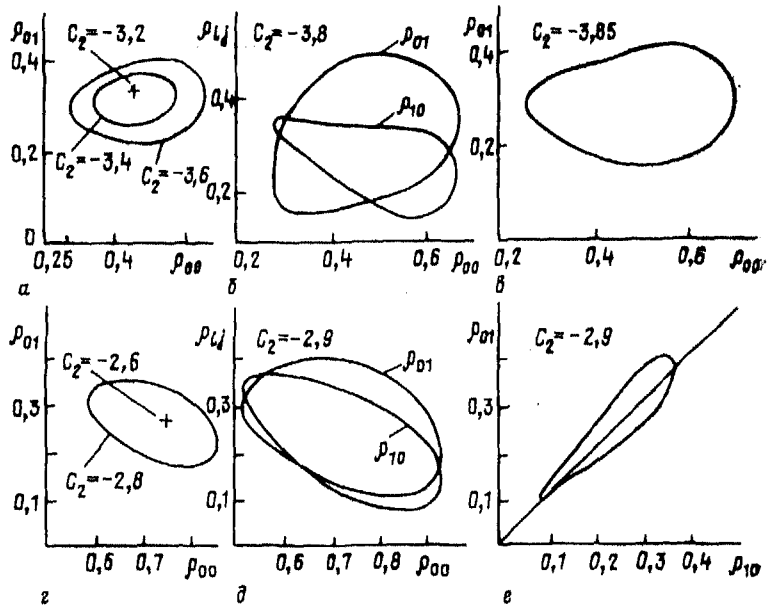


Рис. 47. Устойчивые предельные циклы в упрощенной системе. Сверху — на линии $c_1=1,5$, снизу — $c_1=3,0$

рис. 47г. После потери симметрии проекции цикла на плоскости $\{\rho_{01}, \rho_{00}\}$ и $\{\rho_{10}, \rho_{00}\}$ близки (см. рис. 47д), а проекция на плоскость $\{\rho_{01}, \rho_{10}\}$ близка к прямой.

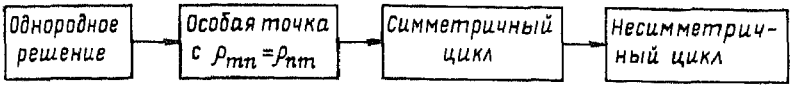


Схема 3

Важно отметить, что особая точка с $\rho_{01}=\rho_{10}$ появляется при том же значении параметра c_2, где могут появиться точки с $\rho_{mn}=0$, $m\neq 0$. Выход на симметричное решение происходит с начальных данных общего вида. Интересно выяснить, есть ли такое явление в исходной задаче и каковы его причины.

8.2. Потеря устойчивости пространственно-однородного решения. Рассмотрим задачу (8.2) вблизи критических значений параметров, при которых однородное решение (8.3) теряло устойчивость. Результаты соответствующих расчетов показаны маркерами на рис. 46. При $t\to\infty$ асимптотику определяют решения с $\rho_{mn}=\text{const}$, m, $n=0, 1, 2, \ldots$. На линии $c_1=1{,}5$, как и предсказывает упрощенная модель с $N=2$, возникающее решение одномерно, на линии $c_1=3$ оно оказывается симметричным. Совпадает не только тип решений этих двух задач, близки оказываются и их количественные характеристики.

Аналогом особых точек упрощенной модели являются периодические решения задачи в частных производных. Справедлива следующая лемма.

Лемма. Если автомодельное решение вида

$$W(x, y, t)=R(x, y)\exp[i\omega t+ia(x, y)] \tag{8.5}$$

удовлетворяет задаче (8.2), то величины ρ_{mn} и θ_{mn}, m, $n=0, 1, 2, \ldots$ у него постоянны; (ρ_{mn} и θ_{mn} определяются по коэффициентам Фурье a_{mn}, b_{mn} так же, как в упрощенной системе). Верно и обратное утверждение: если амплитуды гармоник и сдвиги фаз между ними в решении задачи (8.2) постоянны, то его можно представить в виде (8.5).

В том, что решения вида (8.5) могут удовлетворять задаче (8.2), легко убедиться непосредственной подстановкой. Первое утверждение леммы можно проверить, разложив решение (8.5) в ряд Фурье по системе функций $\{\cos(\pi mx/l)\cdot\cos(\pi ny/l);\ m, n=0, 1, 2, \ldots\}$ и вычислив явно величины ρ_{mn}, θ_{mn}. Обратное утверждение следует из соотношений, которые связывают $R(x, y, t)=|W(x, y, t)|$ и $a(x, y, t)$ с модулями гармоник и сдвигами фаз. Если в системе уравнений (8.4) перейти к переменным $\{\rho_{mn}, \varphi_{mn}\}$, то $\dot{\varphi}_{00}=\omega$. Вычисления здесь будут такими же, как в одномерном случае.

Автомодельные решения, возникающие после потери устойчивости однородного решения, близки к нему. Поэтому для их

анализа естественно воспользоваться асимптотическими методами.

Запишем уравнения (8.2) в переменных ρ, φ: $u=\rho\cos\varphi$, $v=\rho\sin\varphi$:

$$\begin{gathered}\rho_t=\rho-\rho^3+(\rho_{xx}-\rho\varphi_x^2+\rho_{yy}-\rho\varphi_y^2)-\\ -c_1(2\rho_x\varphi_x+\rho\varphi_{xx}+2\rho_y\varphi_y+\rho\varphi_{yy}),\\ \rho\varphi_t=-c_2\rho^3+(2\rho_x\varphi_x+\rho\varphi_{xx}+2\rho_y\varphi_y+\rho\varphi_{yy})+\\ +c_1(\rho_{xx}-\rho\varphi_x^2+\rho_{yy}-\rho\varphi_y^2).\end{gathered} \tag{8.6}$$

Решение будем искать в виде ряда по малому параметру ε, характеризующему отклонение c_2 от критического значения $\bar{c}_2$, при котором решение (8.3) теряет устойчивость

$$\begin{gathered}\rho=1+\varepsilon r_1(x,\ y)+\varepsilon^2 r_2(x,\ y)+\varepsilon^3 r_3(x,\ y)+\ldots,\\ \varphi=(-\bar{c}_2+\varphi_1\varepsilon+\varphi_2\varepsilon^2+\varphi_3\varepsilon^3+\ldots)t+\varepsilon a_1(x,\ y)+\varepsilon^2 a_2(x,\ y)+\ldots,\\ c_2=\bar{c}_2+\omega_1\varepsilon+\omega_2\varepsilon^2+\omega_3\varepsilon^3+\ldots,\ \varphi_i,\ \omega_i=\mathrm{const}.\end{gathered} \tag{8.7}$$

Подставим формулы (9.7) в уравнения (9.6) и приравняем члены при одинаковых степенях ε. Это даст системы уравнений для последовательного определения $r_n(x,\ y)$, $a_n(x,\ y)$. В нулевом порядке по ε уравнения удовлетворяются тождественно. В первом порядке их можно привести к виду

$$\begin{gathered}\Delta r_1+k^2 r_1=c_1(\varphi_1+\omega_1)/(1+c_1^2),\\ \Delta a_1=2Lr_1+(\varphi_1+\omega_1)/(1+c_1^2),\end{gathered} \tag{8.8}$$

где $k^2=-2(1+c_1\bar{c}_2)/(1+c_1^2)$, $L=(\bar{c}_2-c_1)/(1+c_1^2)$. Структура уравнений n-го порядка аналогична: r_n и a_n входят в них так же, как r_1 и a_1 в формулы (8.8), но правые части гораздо сложнее.

Из граничных условий задачи (8.2) следуют равенства

$$\left.\frac{\partial r_n}{\partial x}\right|_{x=0,l}=0,\quad \left.\frac{\partial r_n}{\partial y}\right|_{y=0,l}=0,\quad \left.\frac{\partial a_n}{\partial x}\right|_{x=0,l}=0,\quad \left.\frac{\partial a_n}{\partial y}\right|_{y=0,l}=0. \tag{8.9}$$

Можно проверить, что задача (8.8), (8.9) разрешима только при условии $\varphi_1+\omega_1=0$. Ее решение имеет вид

$$\begin{gathered}r_1=\sum_{m,n}A_{mn}\cos(\pi mx/l)\cos(\pi ny/l),\\ a_1=-2Lr_1/k^2,\quad \pi^2(m^2+n^2)/l^2=k^2,\end{gathered} \tag{8.10}$$

где m, n — целые числа. Из формулы для k^2 следует, что в точке первой бифуркации $m=0$, $n=1$, либо $m=1$, $n=0$. В даль-

нейшем будем считать, что $k=\pi/l$, r_1 и a_1 имеют вид

$$r_1=A\cos kx+B\cos ky,$$
$$a_1=-2Lr_1/k^2+\text{const}. \tag{8.11}$$

Уравнения высших порядков будут разрешимы, если их правые части ортогональны ко всем нетривиальным решениям соответствующих однородных уравнений (альтернатива Фредгольма). Рассматривая условия разрешимости для уравнений второго порядка, получим

$$\omega_1=0,\quad \varphi_2+\omega_2=L(A^2+B^2)(1+c_1^2)[2L^2/k^2+k^2/2]. \tag{8.12}$$

Решения этих уравнений будут таковы

$$r_2=C\cos kx+D\cos ky+Q_1\cos 2kx+Q_2\cos 2ky+$$
$$+Q_3\cos kx\cos ky+Q_4, \tag{8.13}$$
$$a_2=-\frac{2L}{k^2}[C\cos kx+D\cos ky]+E_1\cos 2kx+$$
$$+B_2\cos 2ky+B_3\cos kx\cos ky,$$

где

$$Q_1=A^2[0{,}25+2L^2/(3k^4)],\quad Q_2=B^2[0{,}25+2L^2/(3k^4)],\quad Q_3=3AB,$$
$$Q_4=-(A^2+B^2)(L^2/k^2+k^2/4+5/4],\quad B_1=A^2[L/(4k^2)-L^3/(3k^6)],$$
$$B_2=B^2[L/(4k^2)-L^3/(3k^6)],\quad B_3=-4ABL/k^2,$$

C и D — новые неизвестные константы.

Условия разрешимости для уравнений третьего порядка позволяют определить значения A и B. Малый параметр ε ранее был определен с точностью до множителя. Далее мы будем считать, что

$$\varepsilon=|c_2-\bar{c}_2|^{1/2}+\ldots. \tag{8.14}$$

Это упростит соотношения для A и B:

$$A(XA^2+YB^2-\alpha Z)=0,$$
$$B(YA^2+XB^2-\alpha Z)=0, \tag{8.15}$$

где

$$X=\frac{2L^4}{3k^6}-\frac{3L^2}{2k^2}+L^2+\frac{5k^2}{4}+\frac{k^4}{4},\quad Z=\frac{|c_1|}{1+c_1^2},$$
$$Y=\frac{4L^2}{k^2}+L^2-k^2+\frac{k^4}{4},\quad \alpha=\operatorname{sign}c_1\cdot\operatorname{sign}(\bar{c}_2-c_2).$$

Из формул (8.15) ясно, что $X+Y>0$, $Z>0$, можно убедиться также, что $X>0$.

Легко проверить, что при $\alpha=-1$ система уравнений (8.15) имеет только тривиальные решения. Это соответствует той области параметров, где устойчиво пространственно-однородное

решение (8.3). Поэтому бифуркация в изучаемой системе всегда надкритична [39]. При $\alpha=+1$ система уравнений (8.16) имеет девять решений

$$\begin{aligned}
&\text{а) } A=B=0,\\
&\text{б) } A=0,\ B=\pm(Z/X)^{1/2},\\
&\text{в) } B=0,\ A=\pm(Z/X)^{1/2},\\
&\text{г) при } X\neq Y\ A^2=B^2=Z/(X+Y).
\end{aligned} \tag{8.16}$$

Случай $X=Y$ является вырожденным (система (8.15) имеет бесконечно много решений, у которых $A^2+B^2=Z/X$), далее он рассматриваться не будет.

Соотношения (8.16) показывают, что в общем случае ($X\neq Y$) решения, возникающие после ветвления, будут либо одномерными, либо симметричными. Этот вывод подтверждается расчетами.

Рассмотрим вопрос об устойчивости возникших автомодельных решений. Пусть $\bar{r}(x, y, t)$ и $\bar{\Psi}(x, y, t)$ — малые возмущения

$$\rho=R(x, y)+\bar{r}(x, y, t);\quad \varphi=\omega t+a(x, y)+\bar{\Psi}(x, y, t). \tag{8.17}$$

Устойчивость решения определяется из линеаризованной относительно $\bar{r}$ и $\bar{\Psi}$ задачи в частных производных. Решения ее будем искать в виде $\bar{r}=e^{\lambda t}r(x, y)$, $\bar{\Psi}=e^{\lambda t}\Psi(x, y)$. В результате получится задача на собственные значения, которую можно привести к виду

$$\begin{gathered}
\Delta r+r\left[\frac{1-c_1\omega}{1+c_1^2}-3\frac{1+c_1c_2}{1+c_1^2}R^2-(a_x^2+a_y^2)\right]-\\
-2R(a_x\Psi_x+a_y\Psi_y)=\lambda\frac{(1+c_1R\Psi)}{1+c_1^2},\\
R\Delta\Psi+r\left[\frac{-\omega-c_1}{1+c_1^2}+3\frac{c_1-c_2}{1+c_1^2}R^2+\Delta a\right]+2a_xr_x+2a_yr_y+\\
+2R_x\Psi_x+2R_y\Psi_y=\lambda\frac{R\Psi-c_1r}{1+c_1^2}.
\end{gathered} \tag{8.18}$$

Краевые условия для $r(x, y)$ и $\Psi(x, y)$ будут такими же, как в формуле (8.9).

Поскольку нас интересуют решения в окрестности критического значения $\bar{c}_2$, будем полагать

$$\begin{gathered}
R=1+\varepsilon r_1+\varepsilon^2r_2+\varepsilon^3r_3+\ldots,\quad \varphi=\omega t+\varepsilon a_1+\varepsilon^2a_2+\varepsilon^3a_3+\ldots,\\
\omega=-\bar{c}_2+\varphi_2\varepsilon^2+\varphi_3\varepsilon^3+\ldots,\quad c_2=\bar{c}_2+\omega_2\varepsilon^2+\omega_3\varepsilon^3+\ldots
\end{gathered} \tag{8.19}$$

Пусть сначала $\varepsilon=0$, то есть $R=1$, $\varphi=-c_2t$. Будем искать решение задачи (8.18) в виде

$$\begin{pmatrix} r\\ \Psi\end{pmatrix}=\sum_{m,n=0}^{\infty}\begin{pmatrix} r_{mn}\\ \Psi_{mn}\end{pmatrix}\cos\frac{\pi mx}{l}\cos\frac{\pi ny}{l},$$

чтобы выполнялись граничные условия. В результате для каждой пары r_{mn}, Ψ_{mn} получим систему двух однородных уравнений, которая будет разрешима при условии

$$\lambda^2+2\lambda[\pi^2m^2/l^2+\pi^2n^2/l^2+1]+[\pi^2m^2/l^2+ \\ +\pi^2n^2/l^2]\times[(1+c_1^2)\pi^2(m^2+n^2)/l^2+2(1+c_1c_2)]=0. \quad (8.20)$$

Задача (8.18) имеет собственное значение, равное нулю при условии

$$(1+c_1^2)\pi^2(m^2+n^2)/l^2+2(1+c_1c_2)=0. \quad (8.21)$$

Именно оно определяет c_2, если положить $m^2+n^2=1$.

Пусть теперь $\varepsilon\neq0$, выполнены соотношения (8.19) и при этом

$$\frac{\lambda}{1+c_1^2}=\varepsilon\lambda_1+\varepsilon^2\lambda_2+\ldots,\quad r=\rho_0+\varepsilon\rho_1+\varepsilon^2\rho_2+\ldots, \\ \Psi=\Psi_0+\varepsilon\Psi_1+\varepsilon^2\Psi_2+\ldots. \quad (8.22)$$

Подставим разложения (8.19) и (8.22) в уравнения (8.18) и приравняем члены при одинаковых степенях ε. Уравнения нулевого порядка дают

$$\rho_0=E\cos kx+F\cos ky,\quad \Psi_0=-2L\rho_0/k^2+\text{const}. \quad (8.23)$$

Условия разрешимости уравнений первого порядка приводят к равенствам

$$\lambda_1=0,\ AE+BF=0, \quad (8.24)$$

где A и B определяются формулами (8.16). Их решения имеют вид

$$\rho_1=\xi_1\cos 2kx+\xi_2\cos 2ky+\xi_3\cos kx\cos ky+\xi_4\cos kx+\xi_5\cos ky \quad (8.25)$$

$$\Psi_1=\eta_1\cos 2kx+\eta_2\cos 2ky+\eta_3\cos kx\cos ky+\eta_4\cos kx+\eta_5\cos ky,$$

где $\xi_1=AE[0{,}5+4L^2/(3k^4)]$, $\xi_2=BF[0{,}5+4L^2/(3k^4)]$, $\xi_3=3(AF+BE)$,

$$\eta_1=LAE[1/(2k^2)-2L^2/(3k^6)],\ \eta_2=LBF[1/(2k^2)-2L^2/(3k^6)], \\ \eta_3=-4L(AF+BE)/k^2,\ \eta_4=-2L\xi_4/k^2,\ \eta_5=-2L\xi_5/k^2,$$

ξ_4 и ξ_5 — неизвестные константы. Условия разрешимости для уравнений второго порядка по параметру ε приводят к следующим соотношениям

$$E\left[\lambda_2\frac{1+k^2}{k^2}\right]=E\left[PA^2+QB^2+\alpha\frac{|c_1|}{1+c_1^2}\right], \quad (8.26)$$

$$F\left[\lambda_2\frac{1+k^2}{k^2}\right]=F\left[QA^2+PB^2+\alpha\frac{|c_1|}{1+c_1^2}\right], \quad (8.27)$$

где

$$P=\frac{25L^2}{2k^2}-\frac{2L^4}{k^6}-L^2-\frac{k^4}{4}-\frac{23k^2}{4},$$

$$Q=k^2-L^2-4L^2/k^2-k^4/4=-Y.$$

Рассмотрим одномерное решение. Пусть $A=0$, тогда $B\neq 0$, $F=0$, $E\neq 0$. Уравнение (8.27) выполнено тождественно, а из уравнения (8.26) с учетом формул (8.15), (8.16) следует

$$\lambda_2\frac{1+k^2}{k^2}=(X-Y)B^2. \tag{8.28}$$

Знак λ_2 определяется знаком величины $K=X-Y$. Если $K>0$, то одномерное решение неустойчиво, если $K<0$, то устойчиво.

Пусть решение симметрично: $A^2=B^2=Z/(X+Y)$. При этом $E\neq 0$, $F\neq 0$ и уравнения (8.26) и (8.27) совпадают. После алгебраических преобразований получаем

$$\lambda_2\frac{1+k^2}{k^2}=(X+P)A^2=-2KA^2. \tag{8.29}$$

Симметричное решение неустойчиво при $K<0$ и устойчиво при $K>0$. Величина K связана с параметрами задачи следующим образом

$$K=\frac{2L^4}{3k^6}-11\frac{L^2}{2k^2}+\frac{9k^2}{4},\quad L=\frac{-2-k^2}{2c_1},\quad k=\pi/l. \tag{8.30}$$

Можно сделать вывод, что при отрицательном K будет устойчиво одномерное, а при положительном — симметричное автомодельное решение.

Сравним полученные результаты с проведенными двумерными расчетами. Из формул (8.7), (8.11)—(8.16) следует, что в окрестности точки бифуркации $\bar{c}_2$ выполняются соотношения

$$\begin{gathered}\rho_{00}=1-|c_2-\bar{c}_2|(A^2+B^2)[L^2/k^4+L^2/k^2+k^2/4+5/4]+\ldots,\\ \rho_{10}=|c_2-\bar{c}_2|^{1/2}|A|[1+4L^2/k^4]^{1/2}+\ldots,\\ \rho_{01}=|c_2-\bar{c}_2|^{1/2}|B|[1+4L^2/k^4]^{1/2}+\ldots,\\ \rho_{11}=|c_2-\bar{c}_2|\cdot|AB|[9+40L^2/k^4+16L^4/k^8]^{1/2}+\ldots\end{gathered} \tag{8.31}$$

Для $c_1=1{,}5$, $k=1$, $\bar{c}_2=-1{,}75$ и $L=-1$. При $c_2=-1{,}85$, то есть $\varepsilon^2=0{,}1$, формулы (8.31) дают $\rho_{00}=0{,}903$, $\rho_{01}=0{,}372$. Заметим, что в этом случае $K=-31/32$, поэтому устойчивым должно быть одномерное решение. В расчетах для задачи в частных производных получено $\rho_{00}=0{,}908$, $\rho_{01}=0{,}334$, гармоники ρ_{mn}, $m>0$ быстро убывают и стремятся к нулю при $t\to\infty$. В системе восьми обыкновенных дифференциальных уравнений $\rho_{00}=0{,}911$, $\rho_{01}=0{,}333$, $\rho_{10}=0$, $\rho_{11}=0$.

При $c_1=3$, $k=1$ $K=11/12$, здесь должно быть устойчиво симметричное автомодельное решение. Критическое значение c_2

равно -2, $L=-0{,}5$. Для $c_2=-2{,}1$, $\varepsilon^2=0{,}1$. Формулы (8.31) предсказывают значения $\rho_{00}=0{,}937$, $\rho_{01}=\rho_{10}=0{,}177$, $\rho_{11}=0{,}070$. В задаче в частных производных получено $\rho_{00}=0{,}942$, $\rho_{01}=0{,}162$, $\rho_{10}=0{,}156$, $\rho_{11}=0{,}057$, в упрощенной системе с $N=2$: $\rho_{00}=0{,}945$, $\rho_{01}=\rho_{10}=0{,}157$, $\rho_{11}=0{,}055$. Это означает, что формулы (8.31) хорошо описывают решения задачи (8.2) в окрестности точки бифуркации, когда $\varepsilon=\sqrt{0,1}\sim 0.316$.

Из соотношения (8.30) следует, что при малых значениях c_1 в момент потери устойчивости однородного решения также должны появляться симметричные решения. Расчеты подтверждают это. Такая картина наблюдается, например, при $c_1=0.4$, $k=1$. Можно сделать вывод, что полученные выше разложения хорошо согласуются с решениями задачи в частных производных и упрощенной системы.

8.3. Двумерные автомодельные решения. Простейшему аттрактору системы обыкновенных дифференциальных уравнений — устойчивой особой точке — в исходной задаче соответствует сложный автоколебательный процесс, который описывается автомодельным решением вида (8.5). Отметим, что частным случаем этого решения является спиральная волна. Формула (8.5) определяет спиральную волну, если $R(x, y)=R(\rho)$, $a(x, y)=S(\rho)+m\varphi$, $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$. Каждая из компонент $u(x, y, t)$, $v(x, y, t)$ в автомодельном решении периодична по времени, причем $u(x, y, t)=v(x, y, t+T/4)$, где T — период. Вместе с тем, функция $R=(u^2+v^2)^{1/2}$ от времени не зависит. На рис. 48 показаны ее линии уровня и видовая проекция для несимметричного решения.

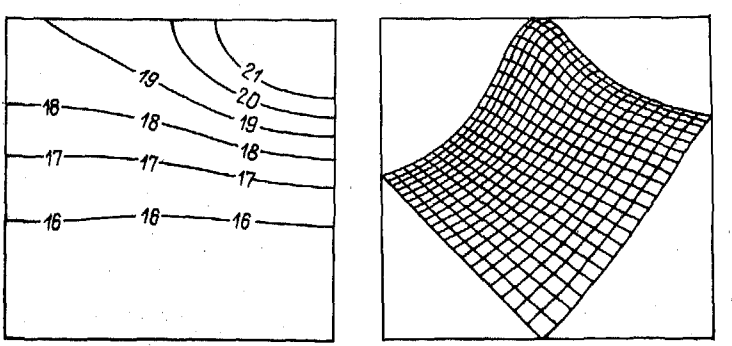


Рис. 48. Функция R, соответствующая несимметричному автомодельному решению $c_1=1{,}5$, $c_2=-2{,}9$, $l=\pi$, $h=\pi/20$, $\tau=10^{-2}$

Здесь и далее линия уровня с номером p соответствует значению функции $f_p=-1+(p-1)/10$, ось абсцисс направлена горизонтально, ось ординат — по вертикали вверх. Все двумерные расчеты в этом параграфе проводились с использованием

метода переменных направлений [58]. Шаги по времени τ и по пространству h указаны на рисунках. Они определялись после проведения тестовых расчетов. В тех случаях, когда в двумерной задаче асимптотика определяется одномерным решением, последнее практически совпадает с решением, построенным для одномерной задачи по другой методике [12].

Процесс выхода на автомодельное решение показан на рис. 49. Функция $\rho_{mn}(t)$ стремятся к постоянным значениям при $t \to \infty$, причем $\rho_{01} \neq \rho_{10}$.

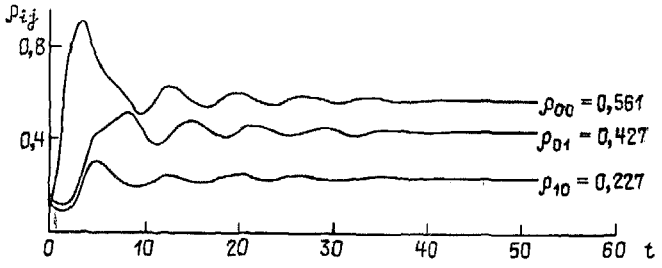


Рис. 49. Процесс выхода на автомодельное решение

На линии $c_1 = 3$, как показано выше, после потери устойчивости однородного решения возникают симметричные решения вида (8.5). На рис. 50 приведены результаты соответствующего расчета. Показана функция R, которая при достаточно больших значениях t не зависит от времени. Функция $u(x, y, t)$ сложно меняется со временем, сохраняя симметрию относительно диагонали квадрата (см. рис. 51). Видно, что значения максимумов и минимумов функции u изменяются в широких пределах и могут быть как положительными, так и отрицательными.

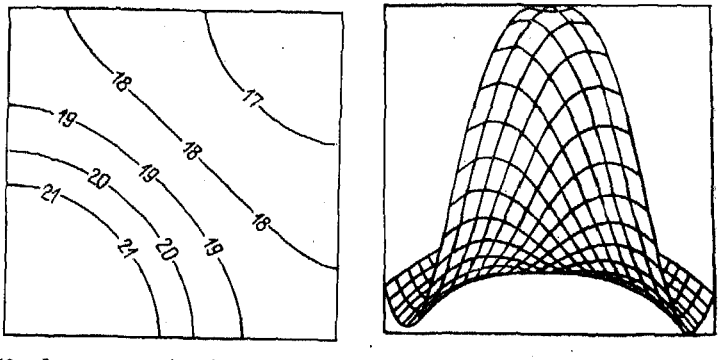


Рис. 50. Функция $R(x, y)$, соответствующая симметричному автомодельному решению; $c_1 = 3$, $c_2 = -2{,}5$, $l = \pi$, $h = \pi/20$, $\tau = 10^{-2}$

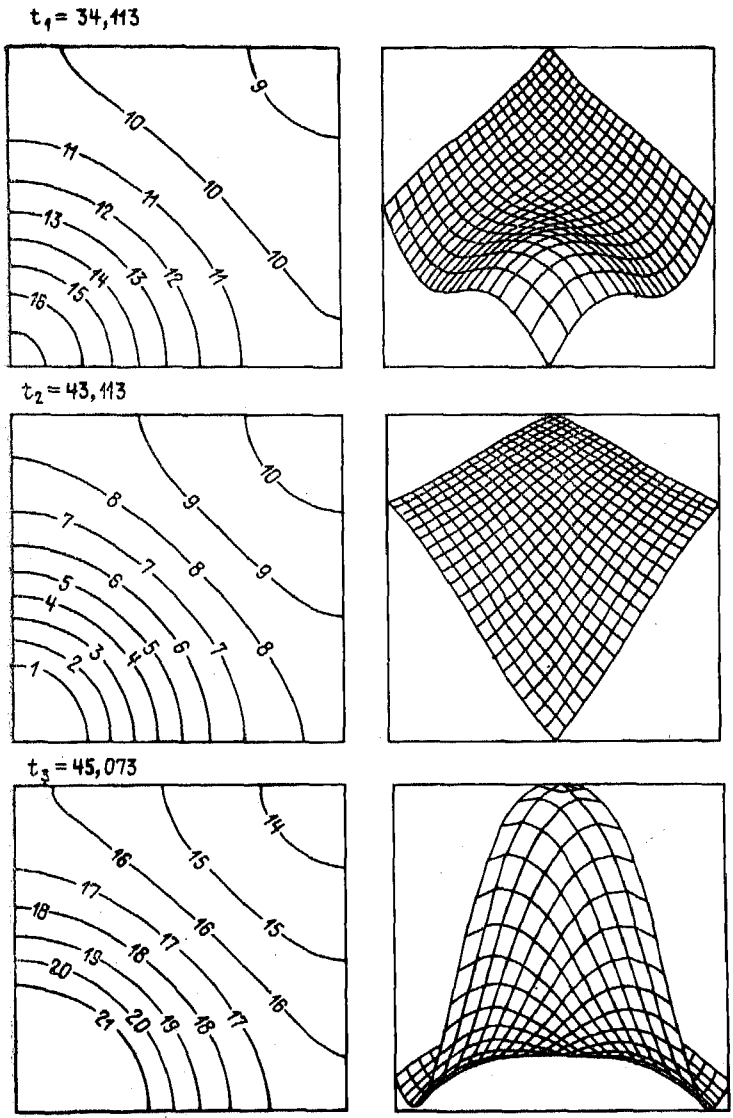


Рис. 51. Изменение функции $u(x, y, t)$ в симметричном автомодельном решении; $c_1=3$, $c_2=-2{,}5$, $l=\pi$, $h=\pi/20$, $\tau=10^{-2}$

Посмотрим, как происходит усложнение решений задачи в частных производных. Последовательность на линии $c_1=1{,}5$ представлена на схеме 4. Первые две бифуркации совпадают с бифуркациями в упрощенной системе. При этом параметры особой точки, у которой $\rho_{mn}=0$, $m\neq 0$, с точностью до нескольких процентов совпадают с характеристиками одномерных автомодельных решений. Однако в целом в задаче (8.2) последовательность переходов проще: в ней нет аналогов особых точек с $\rho_{mn}=\rho_{nm}$ и симметричных предельных циклов.

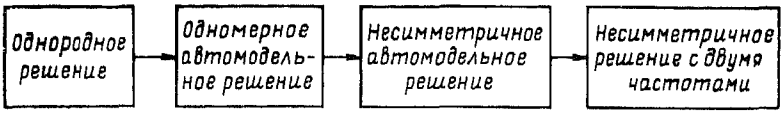


Схема 4

На линии $c_1=3$ последовательность бифуркаций в упрощенной системе и исходной задаче одна и та же — такая, как на схеме 3. Параметры автомодельных решений и особых точек здесь также хорошо согласуются между собой (см. рис. 46).

8.4. Двухчастотные режимы. Рассмотрим такие решения задачи в частных производных, у которых функции R и $\dot{a}$ периодичны по времени. Можно убедиться, что в этом случае $\rho_{mn}(t)$ также периодичны: $\rho_{mn}(t+T)=\rho_{mn}(t)$, $\theta_{mn}(t+T)=\theta_{mn}(t)+$ $+2\pi p_{mn}$, $p_{mn}=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Такие решения являются аналогами предельных циклов в системе с $N=2$. Отметим, что функции u и v не являются периодическими — в системе будет наблюдаться установившийся двухчастотный режим. Аналогичная ситуация имела место и в одномерной задаче.

Двумерные решения такого типа являются достаточно сложными. Для того чтобы выяснить характер их качественной перестройки, необходимо рассматривать их проекции на некоторые конечномерные пространства. В рассматриваемом случае наиболее показательны проекции на плоскость $\{\rho_{10}, \rho_{01}\}$. Они представлены на рисунках 52, 53 вместе с графиками функций $\rho_{mn}(t)$.

Решение, изображенное на рис. 52, проектируется на кривую, целиком лежащую выше диагонали $\rho_{10}=\rho_{01}$. В течение всего периода направления x и y «неравноправны». Назовем его решением типа I. В решении, показанном на рис. 53, проекция представляет собой замкнутую кривую, которая лежит по обе стороны от диагонали. Эта линия почти симметрична относительно прямой $\rho_{10}=\rho_{01}$. Направления x и y через время $T/2$ «меняются местами»: $R(x, y, t+T/2)\approx R(y, x, t)$. Это видно и на рис. 54, где показаны видовые проекции функции $R(x, y)$ на моменты времени $t_1=30{,}963$ и $t_2=37{,}333$ ($t_2-t_1\approx T/2$). Будем называть такое решение решением типа II.

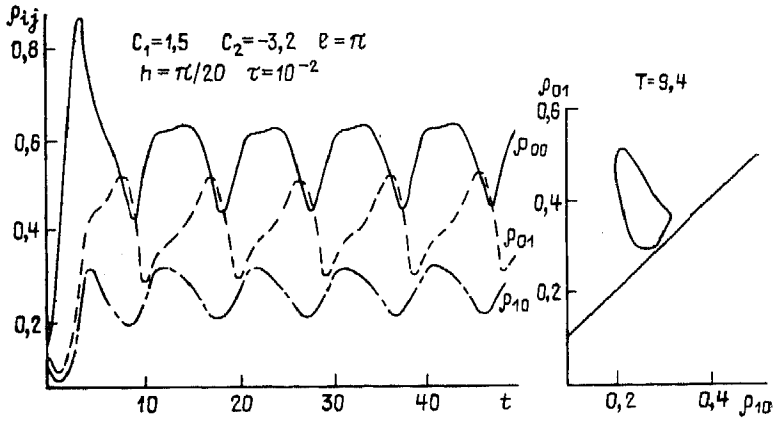


Рис. 52

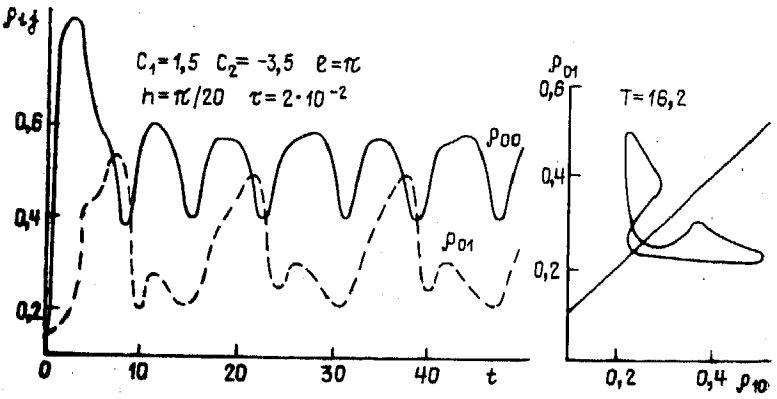


Рис. 53

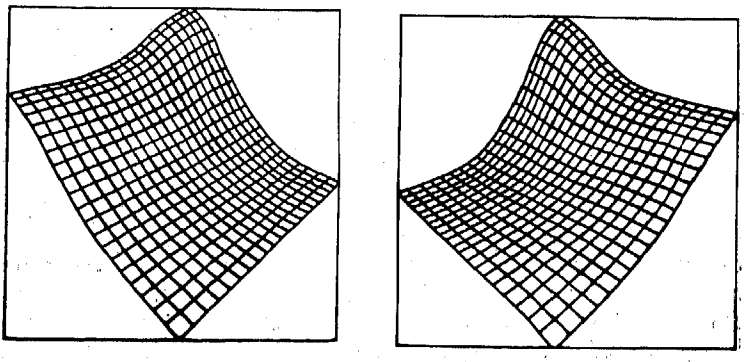


Рис. 54

Важно подчеркнуть, что решения типа I и типа II качественно отличаются друг от друга. На рис. 52 и 53 видно, что функция $\rho_{00}(t)$ близка к $\rho_{00}(t+T/2)$. Однако $\rho_{01}(t)$ и $\rho_{10}(t)$ ведут себя иначе: часть периода функция $\rho_{10}(t)$ на нижнем рисунке (решение типа II) повторяет ход $\rho_{10}(t)$ на верхнем, оставшуюся часть — ход функции $\rho_{01}(t)$. При приближении к точке перехода период циклов резко возрастает. При малом изменении параметра c_2 период решения увеличился примерно в два раза (см. рис. 52, 53).

В упрощенной системе такие переходы не наблюдались. Однако причину их появления можно пояснить, исходя из представлений о конечномерной модели.

Пусть при некотором значении параметра c_2 у системы с достаточно большим числом N есть две устойчивые особые точки, расположенные симметрично относительно плоскости $\rho_{mn}=\rho_{mn}$, но не лежащие на ней. При уменьшении c_2 происходит бифуркация Хопфа, появляются два предельных цикла, переходящие друг в друга при отражении относительно той же плоскости. По мере уменьшения c_2 амплитуда колебаний будет возрастать, и циклы с разных сторон будут приближаться к плоскости симметрии. В силу единственности решений они могут коснуться друг друга, а значит, и плоскости $\rho_{mn}=\rho_{mn}$, только в особой точке.

Период каждого из циклов при приближении к этому значению параметра $c_2=c_2^*$ должен неограниченно расти. После перехода $c_2<c_2^*$ циклы качественно перестраиваются. Если раньше, находясь на предельном цикле, точка вращалась вокруг одного состояния равновесия, то теперь поочередно она бывает в окрестности каждого из них.

Обратим внимание на то, что при $c_2=c_2^*$ в конечномерной системе возникает гомоклиническая траектория, а сама система обладает специальной симметрией (если $\{\rho_{mn}(t), \theta_{mn}(t)\}$ — решение, то и $\{\rho_{mn}(t), \theta_{mn}(t)\}$ будет решением). Это позволяет предположить, что здесь эффективно могут быть использованы методы, развитые при анализе системы Лоренца [114].

Напомним, что, наряду с решением, показанным на рис. 53, существует симметричное ему решение $\widetilde{W}(x, y, t)=W(y, x, t)$. Поэтому усложнение решений задачи (8.2) может и дальше идти по тому же пути, существенно связанному с симметрией.

Совершенно другая картина наблюдается при $c_1=3$. Это связано с тем, что бифуркацию Хопфа в этом случае претерпевает симметричное автомодельное решение, как это было и в упрощенной системе с $N=2$. Затем симметрия теряется. На рисунках 55, 56 показано несимметричное решение с периодической функцией R, которое нельзя отнести ни к типу I, ни к типу II.

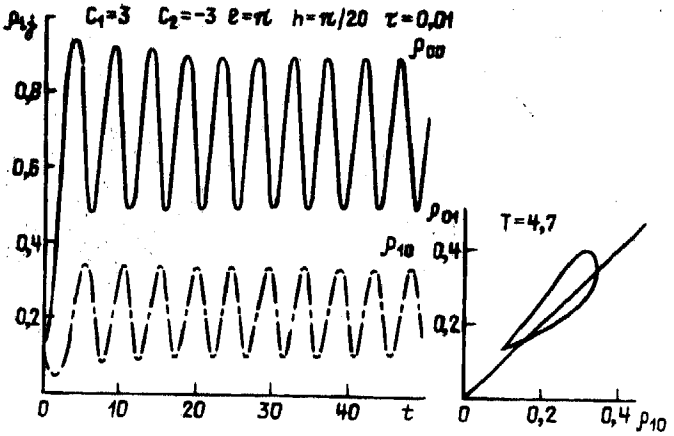


Рис. 55

То обстоятельство, что асимптотику двумерной задачи (8.2) могут определять аналоги предельных циклов, является очень важным. В самом деле, широко распространено представление о том, что основными формами упорядоченности в активных средах являются ведущие центры и спиральные волны. В задаче (8.2) они являются частным случаем двумерного автомодельного решения, в котором еще раз разделились переменные. И действительно, в определенном диапазоне параметров именно автомодельные решения определяют асимптотику процесса. Однако в большой области значений c_1, c_2 и l они неустойчивы, здесь возникает более сложная упорядоченность. Ее описывают решения с периодически меняющимися функциями R и $\dot{a}$. Естественно ожидать, что такие решения будут наблюдаться во многих открытых диссипативных системах вблизи точки бифуркации.

Можно ожидать, что двухчастотные режимы будут наблюдаться и в тех случаях, когда решение имеет особенность фазы. По-видимому, такие решения были бы похожи на спиральные волны, у которых функция $R=(u^2+v^2)^{1/2}$ и частота вращения периодически зависит от времени.

Спиральные волны характерны не только для автоколебательных, но и для возбудимых сред [34, 36]. Поэтому следует обратить внимание на вычислительные эксперименты, где в случае возбудимых сред наблюдались режимы, при которых мгновенный радиус вращения спирали периодически изменялся со временем [35]. Модель, изучаемая в этой работе, возникла при моделировании процессов в сердечной мышце. Интересно было бы исследовать такие решения в случае уравнения (8.2) при больших значениях параметра l и в других моделях, обладающих автоколебательными свойствами.

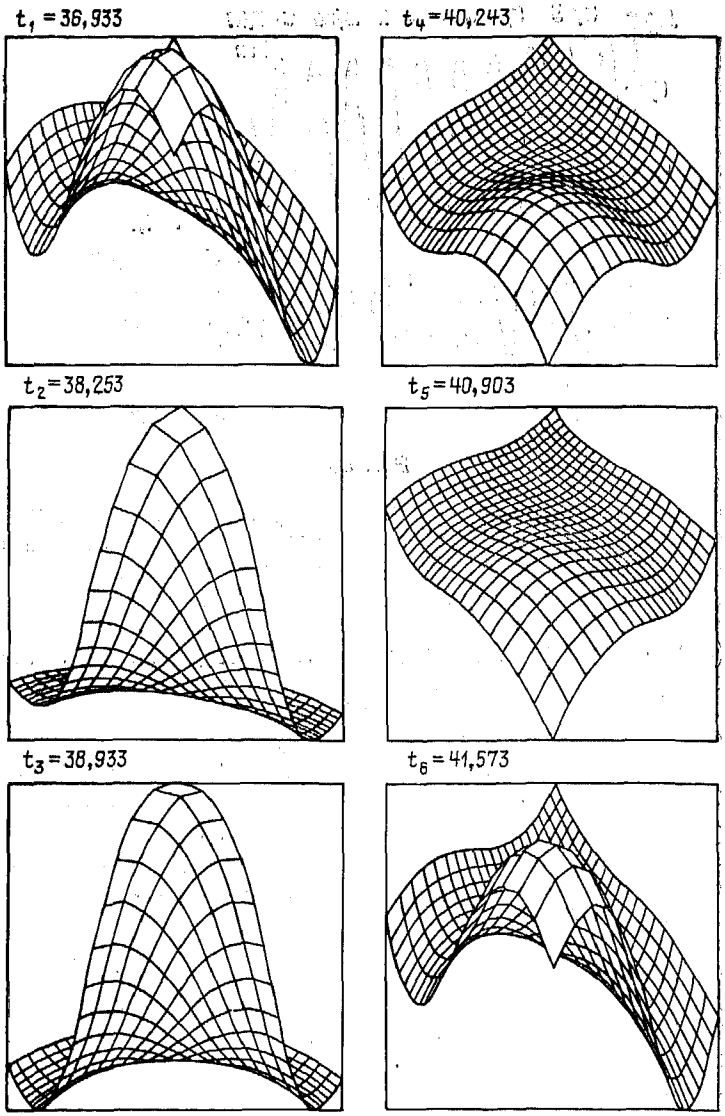


Рис. 56. Изменение функции $R(x, y, t)$. Параметры расчета указаны на рисунке 55

При дальнейшем уменьшении параметра l решения одномерной и двумерной задачи становятся непериодическими. В одномерном случае как на линии $c_1=1{,}5$, так и на линии $c_1=3$, усложнение было связано с последовательностью бифуркаций удвоения периода. В двумерной задаче также наблюдались решения, в которых за время расчетов не удается обнаружить никакой упорядоченности. Однако механизм возникновения стохастических режимов и их свойства требуют дальнейшего изучения.

Сформулируем основные результаты, касающиеся двумерной задачи.

После потери устойчивости однородного решения (8.3), как показывает аналитическое исследование и проведенные расчеты, в широком диапазоне параметров c_1, c_2, l в двумерной задаче устойчиво одномерное решение. Такое поведение решений должно наблюдаться и в области прямоугольной формы. Следовательно, решения одномерной и двумерной задачи при некоторых значениях параметров совпадают.

Упорядоченность в двумерной задаче обладает такими особенностями, у которых нет одномерного аналога. Появляются новые классы симметричных решений, которые могут определять асимптотику процессов в случае начальных данных общего вида. Например, решения, симметричные относительно диагоналей квадрата. Возникают также более сложные, чем в одномерном случае, колебательные процессы.

Упрощенная система с $N=2$ в некоторых случаях правильно передает последовательность бифуркаций, приводящую к усложнению решений задачи в частных производных. Для автомодельных решений есть не только качественное, но и хорошее количественное соответствие с особыми точками в упрощенной модели. В некотором диапазоне параметров (например на линии $c_1=3$) предельные циклы в системе восьми обыкновенных дифференциальных уравнений хорошо описывают двухчастотные решения задачи (8.2).

Усложнение решений в двумерной задаче существенно отличается от одномерного случая. Важную роль в нем играют переходы между симметричными и несимметричными решениями. Линии, на которых происходят бифуркации, лежат здесь гораздо ближе друг к другу в пространстве параметров.

Проведенный анализ показал, что в двумерной задаче существуют аналоги пространственно-временных структур, которые были изучены в одномерной постановке. Это периодические автомодельные решения и двухчастотные режимы. Важно отметить, что несмотря на сложность двумерной задачи в частных производных, большую помощь в ее исследовании оказывают упрощенные конечномерные модели.

§ 9. Другие задачи, связанные с анализом диссипативных систем в окрестности точки бифуркации

При исследовании двухкомпонентных систем в окрестности точки бифуркации широко применялись упрощенные модели. Их взаимосвязь показана на схеме 5. Мы видим, что анализ каждой из них требует проведения численных расчетов и применения различных аналитических методов. В иерархии моделей, представленной на схеме, есть несколько уровней. Работу над изучением большинства моделей нельзя считать завершенной. Обратим внимание на некоторые вопросы, требующие дальнейшего исследования.

При изучении двумерной задачи большую роль играли двумерные автомодельные решения. В ряде случаев именно они определяли поведение системы при $t \to \infty$. В настоящее время появилось много других нелинейных уравнений, где они играют принципиальную роль [43, 45]. Их построение связано с решением эллиптической краевой задачи, зависящей от параметра. Эффективные методы их численного анализа даже для случая простейших областей практически не разработаны.

В одномерной задаче интересно было бы выяснить, как меняется число автомодельных решений и их свойства при изменении параметров. Неясно, каким образом можно было бы построить полную бифуркационную диаграмму. Построение такой диаграммы для стационарных структур в ряде систем вида (1.2) привело к интересным результатам [37].

Выше мы рассмотрели простейшие решения динамической системы (3.6) и один пример странного аттрактора. Большинство представлений о стохастических режимах в системах обыкновенных дифференциальных уравнений связано с результатами изучения системы Лоренца. Было бы полезно иметь еще несколько динамических систем со стохастическим поведением. В модели (3.6) интересно выяснить, как возникает странный аттрактор при изменении параметров системы, каковы свойства сложных непериодических решений в области параметров III.

Большинство результатов, полученных к настоящему времени, относятся к случаю областей небольшой длины, когда решения задачи (2.1) и динамической системы (3.6) хорошо согласуются между собой. Увеличение l приводит к необходимости изучать упрощенные модели с большим числом степеней свободы. Например, в трехмодовой системе можно исследовать странные аттракторы, у которых два ляпуновских показателя положительны. Анализ структуры аттрактора, проведенный для одного из обобщений уравнений Лоренца [107], показывает, что здесь есть ряд содержательных задач.

Для класса систем, возникающих в химической кинетике, получены аналитические оценки размерности аттрактора [20]. Было бы интересно применить эти результаты к анализу зада-

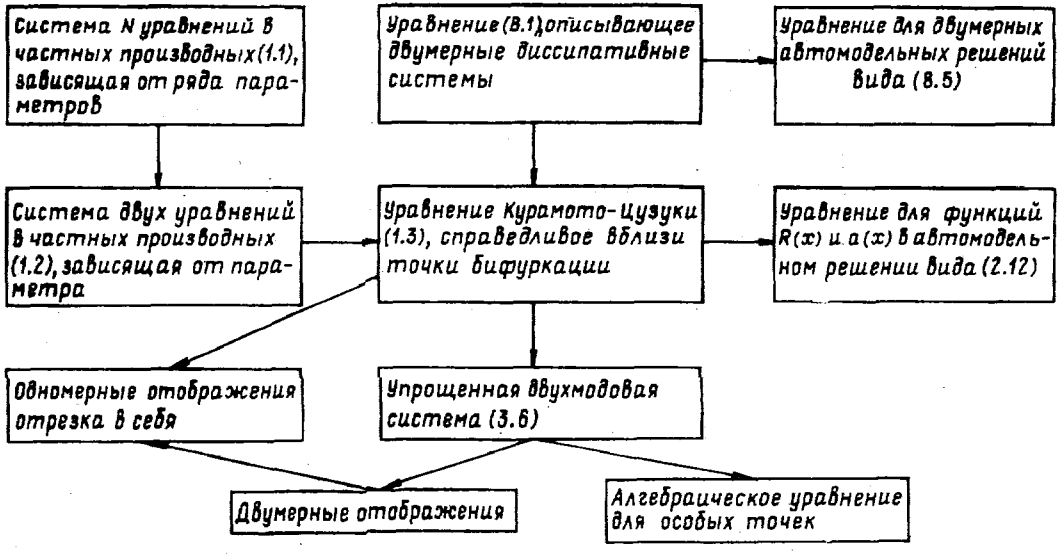

Система N уравнений в частных производных (1.1), зависящая от ряда параметров
Уравнение (8.1) описывающее двумерные диссипативные системы
Уравнение для двумерных автомодельных решений вида (8.5)
Система двух уравнений в частных производных (1.2), зависящая от параметра
Уравнение Курамото-Цузуки (1.3), справедливое вблизи точки бифуркации
Уравнение для функций R(x) и a(x) в автомодельном решении вида (2.12)
Одномерные отображения отрезка в себя
Упрощенная двухмодовая система (3.6)
Двумерные отображения
Алгебраическое уравнение для особых точек

Схема 5

чи (2.1), а также выяснить с помощью различных численных алгоритмов, каков закон роста размерности при увеличении l.

Метод многомасштабных разложений, с помощью которого было получено уравнение (1.3), успешно применялся при исследовании конвективной неустойчивости жидкости [110], при анализе задач физики плазмы [94], в теории нелинейных волн [118]. Этот метод использовался и для анализа самого уравнения (1.3). В предположении о близости решения уравнения (1.3) к пространственно-однородному было получено уравнение [104]

$$\dot{v}=\nu\Delta v-\mu\nabla^2\nabla^2 v-\lambda v(\nabla v). \tag{9.1}$$

Здесь v — градиент фазы W, $\nu=1+c_1c_2$, $\lambda=2(c_1-c_2)$, $\mu=(1+c_1^2)/2$. В работе [100] была поставлена задача о неустойчивости волн в активных средах в двумерном случае при переходе с одного устойчивого фона на другой. Применение метода многомасштабных разложений и в этом случае приводит к уравнению (9.1). При таком подходе v интерпретируется как локальная фазовая скорость бегущей волны. В работе [100] было найдено аналитическое решение уравнения (10.1) типа бегущей волны.

Когда $\nu>0$, по свойствам (9.1) близко к уравнению Бюргерса [68]. При $\nu<0$ это уравнение может иметь сложные, по-видимому, непериодические решения [122]. В самом деле, в отсутствие члена $\mu\nabla^2\nabla^2 v$ его решения могут существовать в течение ограниченного времени. Заменой Хопфа — Коула при $\nu<0$ оно сводится к линейному уравнению с отрицательной диффузией. Член $\mu\nabla^2\nabla^2 v$ обеспечивает стабилизацию решений, он описывает диссипацию гармоник $\exp(i\omega t+ikx)$ при больших k. Уравнение (9.1) вызывает интерес как одно из простейших модельных уравнений, которое в одномерном случае может описывать хаотические процессы.

Вместе с тем расчеты показывают, что во многих областях параметров функция $|W(x, t)|$ существенно неоднородна по пространству, поэтому область применения уравнения (9.1) гораздо меньше, чем исходного, на что обращалось внимание в работах [98, 99].

При выводе уравнения (1.3) считалось, что в системе (1.2) происходит бифуркация Хопфа или бифуркация Тьюринга при $k_c\neq 0$. Анализ более сложных случаев, когда $k_c=0$ или более двух собственных значений пересекают мнимую ось, приводит к другим уравнениям [111].

Одно из обобщений уравнения Курамото — Цудзуки связано с учетом следующих членов в разложениях по малому параметру в задаче (1.2). Пусть нелинейные источники в этой системе зависят от двух параметров λ и μ. Запишем уравнение (1.3) в виде

$$W_t=d_0W_{xx}+(a_1+a_2|W|^2)W. \tag{9.2}$$

Пусть при $\mu<\mu_0$ $\mathrm{Re}\,a_2<0$, при $\mu>\mu_0$ $\mathrm{Re}\,a_2>0$. В последнем слу-

чае уравнение (9.2) неприменимо: при изменении параметра λ амплитуда решения скачком меняется на конечную величину. Пример такого поведения дает модель Фиц — Хью — Нагумо [66] и другие модели, где существенную роль играют пороговые эффекты. Чтобы описать эти эффекты, нужен учет следующих членов и переход к уравнению

$$W_t = d_0 W_{xx} + (a_1 + a_2 |W|^2 - a_3 |W|^4) W, \tag{9.3}$$

где d_0, a_1, a_2, a_3, — комплексные постоянные [124]. Возможность такого перехода связана с наличием еще одного малого параметра $\sim (\mu - \mu_0)^{1/2}$. Поэтому уравнение (10.3) не обладает такой общностью, как уравнение (1.3), и имеет гораздо меньшую область приложений.

При переходе от исходной системы (1.2) к уравнению (1.3) существенна одномерность задачи: из линеаризованного уравнения можно однозначно определить вид функций f в формуле (1.4). В многомерном случае ситуация сложнее — у линеаризованной задачи может быть несколько решений, их число существенно зависит от геометрии области. Например, для квадрата $f_1 = \exp(ikx)$, $f_2 = \exp(iky)$, $f_3 = \alpha f_1 + \beta f_2$.

Уравнения, описывающие двухкомпонентные системы, для бифуркации Тьюринга были получены в двумерном и трехмерном случае в работе [111]. Для областей различной геометрии эти уравнения могут составлять системы не двух, как (1.3), а большего числа уравнений. Их подробный анализ также был бы очень полезен.

В некоторых физических задачах используется модель, связанная с дискретным аналогом уравнения (1.3). Система обыкновенных дифференциальных уравнений получается в результате замены W_{xx} на $[W(x+h) - 2W(x) + W(x-h)]/h^2$ [3].

Ряд обобщений уравнения Курамото — Цудзуки возникает в задачах гидродинамики. В теории ветровых волн на воде используется двумерное уравнение, в которое производные по направлениям x и y входят с разными коэффициентами [2]. В ряде случаев нужно учитывать влияние малого шума [80, 111]. Исходя из метода многомасштабных разложений, были выведены уравнения, позволяющие описать систему конвективных валов при небольших числах Прандтля [79]. Эта задача также представляет интерес.

Выше мы рассматривали наиболее простой способ построения упрощенных моделей для задачи (1.2) и уравнения (1.3). В ряде гидродинамических экспериментов оказалось возможным оценить размерность аттрактора, показать, что число степеней свободы невелико [76, 108]. Однако построить достаточно простую модель, связывающую эти переменные, обычно не удается. Метод Галёркина часто дает системы высокой размерности. Для многих конкретных систем вопрос о построении эффективных упрощенных моделей остается открытым.

Обратим внимание на класс задач, возникающих в нелинейной оптике, где диссипативные члены являются малыми добавками к слагаемым ic_1W_{xx} и $ic_2W|W|^2$ [75]. Естественно ожидать, что решения уравнений такого типа будет на определенных временах близки к солитонам огибающей [66, 68]. В ряде случаев здесь удается проследить последовательность бифуркаций, приводящих к усложнению решений и хаотическим режимам [75].

Таким образом, результаты исследования двухкомпонентных систем в окрестности точки бифуркации могут найти приложения во многих других задачах. Ряд нерешенных теоретических вопросов, касающихся классификации двухкомпонентных систем, представляет большой интерес. Это дает основание считать, что в этой области в дальнейшем могут быть получены новые интересные результаты.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С.*, Теория колебаний *М.*, Наука, 1981, 568 с.
2. *Андронов А. А. (мл.), Фабрикант А. Л.*, Затухание Ландау, ветровые волны и свисток. В сб. «Нелинейные волны». М.: Наука, 1979, 68—104
3. *Арансон И. С., Гапонов—Грехов А. В., Рабинович М. И.*, Развитие хаоса в ансамблях динамических структур. ЖЭТФ, 1985, 89, вып. 1(7), 92—105
4. *Арнольд В. И.*, Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978, 304 с.
5. —, Теория катастроф. М.: МГУ, 1983, 80 с.
6. *Афраймович В. С., Быков В. В., Шильников Л. П.*, О притягивающих множествах типа аттрактора Лоренца. Тр. Моск. мат. о-ва, 1982, *44*, 150—212 (РЖМат, 1982, 6Б230)
7. *Ахромеева Т. С., Курдюмов С. П., Малинецкий Г. Г.*, Парадоксы мира нестационарных структур. М.: Знание, 1985, 48 с.
8. —, —, —, *Самарский А. А.*, О классификации двухкомпонентных систем в окрестности точки бифуркации. Докл. АН СССР, 1984, *279*, № 3, 591—595 (РЖМат, 1985, 5Б488)
9. —, —, —, —, О диффузионном хаосе в нелинейных диссипативных системах. Докл. АН СССР, 1984, *279*, № 5, 1091—1096 (РЖМат, 1985, 7Б637)
10. —, *Малинецкий Г. Г.*, Колебательные процессы в нелинейных диссипативных средах. О некоторых упрощенных моделях. Ин-т прикл. мат. АН СССР. Препр. 1982, № 53, 30 с. (РЖМат, 1982, 12Б756)
11. —, —, Двухкомпонентные системы в окрестности точки бифуркации. Поведение решений в малых областях. Ин-т прикл. мат. АН СССР. Препр. 1983, № 29, 28 с. (РЖМат, 1983, 10Б301)
12. —, —, О новых свойствах нелинейных диссипативных систем. Ин-т прикл. мат. АН СССР. Препр., 1983, № 118, 28 с.
13. —, —, О диффузионном хаосе. Ин-т прикл. мат. АН СССР. Препр., 1983, № 140, 28 с. (РЖМат, 1984, 9Б434)
14. —, —, О симметричных решениях уравнения Курамото — Цудзуки. Дифференц. уравнения, 1984, *20*, № 7, 1281—1283 (РЖМат, 1985, 1Б755)
15. —, —, Простейшие типы упорядоченности в двумерных диссипативных системах. Ин-т прикл. мат. АН СССР. Препр., 1984, № 112, 28 с. (РЖМат, 1985, 4Б784)
16. —, —, Простейшие типы упорядоченности в открытых диссипативных

системах. Дифференц. уравнения, 1985, *21*, № 4, 657—668 (РЖМат, 1985, 9Б483)
17. —, —, О странном аттракторе в одной задаче синергетики. Ин-т прикл. мат. АН СССР. Препр., 1985, № 89, 28 с.
18. —, —, О неединственности одного класса автомодельных решений уравнения Курамото — Цудзуки. Дифференц. уравнения, 1985, *21*, № 9, 1577—1582
19. —, —, Периодические режимы в нелинейных диссипативных системах вблизи точки бифуркации. Ж. вычисл. мат. и мат физ., 1985, *25*, № 9, 1314—1326
20. *Бабин А. В., Вишик М. И.*, Аттракторы эволюционных уравнений с частными производными и оценки их размерности. Успехи мат. наук, 1983, *38*, № 4, 133—187 (РЖМат, 1984, 1Б571)
21. *Белинцев Б. Н.*, Диссипативные структуры и проблемы биологического формообразования. Успехи физ. наук, 1983, *141*, № 1, 55—101
22. *Берман В. С., Данилов Ю. А.*, О групповых свойствах обобщенного уравнения Ландау — Гинзбурга. Докл. АН СССР, 1981, *258*, № 1, 67—70
23. *Бунимович Л. А., Синай Я. Г.*, Стохастичность аттрактора в модели Лоренца. В сб. «Нелинейные волны». М.: Наука, 1979, 212—226
24. *Васильев В. А., Романовский Ю. М., Яхно В. Г.*, Автоволновые процессы в распределенных кинетических системах. Успехи физ. наук, 1979, *128*, № 4, 625—666
25. *Видаль К.*, Динамические неустойчивости, наблюдаемые в реакции Белоусова — Жаботинского. В сб. «Синергетика», М.: Мир, 1984, 109—125
26. *Вильямс Р.*, Структура аттракторов Лоренца. В сб. «Странные аттракторы», М., Мир, 1981, 58—72 (РЖМат, 1981, 7Б939)
27. *Вул Е. Б., Синай Я. Г., Ханин К. М.*, Универсальность Фейгенбаума и термодинамический формализм. Успехи мат. наук, 1984, *39*, № 3, 3—37 (РЖМат, 1984, 10В234)
28. *Галактионов В. А., Курдюмов С. П., Михайлов А. П., Самарский А. А.*, Локализация тепла в нелинейных средах. Дифференц. уравнения, 1981, *17*, № 10, 1826—1841 (РЖМат, 1982, 2Б422)
29. *Гимор Р.*, Прикладная теория катастроф. I, II, М., Мир, 1984, 352 с., 288 с. (РЖМат, 1984, 9Б386)
30. *Еленин Г. Г., Курдюмов С. П., Самарский А. А.*, Нестационарные диссипативные структуры в нелинейной теплопроводящей среде. Ж. вычисл. мат. и мат. физ., 1983, *23*, № 3, 19—28 (РЖМат, 1983, 9Б580)
31. *Жаботинский А. М.*, Концентрационные автоколебания. М.: Наука, 1974, 178 с.
32. *Змитренко Н. В., Курдюмов С. П.*, *N*- и *S*-режимы сжатия конечной массы плазмы и особенности режимов с обострением. Прикл. мех. и тех., 1977, № 1, 3—23
33. —, *Михайлов А. П.*, Инерция тепла М.: Знание, 1982, 64 с.
34. *Зыков В. С.*, Моделирование волновых процессов в возбудимых средах. М.: Наука, 1984, 166 с. (РЖМат, 1984, 10Б532)
35. —, *Морозова О. А.*, Циклоидная циркуляция спиральных волн в различных моделях возбудимых сред. Пущино, тезисы докладов Всесоюзного семинара «Математические и вычислительные методы в биологии», 1985, 76—77
36. *Иваницкий Г. Р., Кринский В. И., Селыков Е. Е.*, Математическая биофизика клетки. М.: Наука, 1978, 166 с.
37. *Иванова А. Н., Маганова Н. Е.*, О нелокальном характере поведения диссипативных структур. Ж. вычисл. мат. и мат. физ., 1984, *24*, № 8, 1217—1230 (РЖМат, 1984, 11Г15)
38. *Йорке Дж., Йорке Е.*, Метастабильный хаос: переход к устойчивому хаотическому поведению в модели Лоренца. В сб. «Странные аттракторы». М.: Мир, 1981, 193—212 (РЖМат, 1981, 7В287)
39. *Йосс Ж., Джозеф Д.*, Элементарная теория устойчивости и бифуркаций., М.: Мир, 1983, 304 с.

40. *Кадомцев Б. Б.*, Коллективные явления в плазме. М.: Наука, 1976, 240 с.
41. *Колмогоров А. Н., Петровский И. Г., Пискунов Н. С.*, Исследование уравнения диффузии, соединенной с возрастанием количества вещества, и его применение к одной биологической проблеме. М.: МГУ, 1937, сек. А, *т. 1*, вып. 6, 1—27
42. *Курдюмов С. П.*, Собственные функции горения нелинейной среды и конструктивные законы построения ее организации. В сб. «Современные проблемы математической физики и вычислительной математики». М.: Наука, 1982, 217—243 (РЖМат, 1982, 11Б605)
43. —, *Курюина Е. С., Потапов А. Б., Самарский А. А.*, Архитектура многомерных тепловых структур. Докл. АН СССР, 1984, *274*, № 5, 1071—1075 (РЖМат, 1984, 8Б670)
44. —, *Малинецкий Г. Г.*, Синергетика — теория самоорганизации. Идеи, методы, перспективы. М.: Знание, 1983, 64 с.
45. —, —, *Повещенко Ю. А., Попов Ю. П., Самарский А. А.*, Диссипативные структуры в триггерных средах. Дифференц. уравнения, 1981, *17*, № 10, 1875—1886 (РЖМат, 1982, 2Б553)
46. *Ланфорд О. Е.*, Странные аттракторы и турбулентность. В сб. «Гидродинамические неустойчивости и переход к турбулентности». М., Мир, 1984, 22—46
47. *Лоренц Э.*, Детерминированное непериодическое течение. В сб. «Странные атракторы». М.: Мир, 1981, 88—116 (1981, 6Б685)
48. *Марри Дж.*, Нелинейные дифференциальные уравнения в биологии. Лекции о моделях. М., Мир, 1983, 400 с. (РЖМат, 1983, 10Б375 К)
49. *Марсден Дж., Мак-Кракен М.*, Бифуркация рождения цикла и ее приложения. М.: Мир, 1980, 368 с. (РЖМат, 1981, 4Б991 К)
50. —, Попытки установить соотношение между уравнениями Навье—Стокса и турбулентностью. В сб. «Странные аттракторы». М., Мир, 1981, 7—20 (РЖМат, 1984, 7В284)
51. *Моисеев Н. Н.*, Математика ставит эксперимент. М., Наука, 1979, 224 с. (РЖМат, 1980, 1А1К)
52. *Николис Г., Пригожин И.*, Самоорганизация в неравновесных системах. М.: Мир, 1979, 512 с.
53. *Овсянников Л. В.*, Групповой анализ дифференциальных уравнений М.: Наука, 1978, 400 с. (РЖМат, 1978, 11Б883 К)
54. *Песин Я. Б.*, Общая теория гладких гиперболических динамических систем. Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Совр. пробл. матем. Фундам. направления. 1985, 123—172
55. *Рабинович М. И., Фабрикант А. Л.*, Стохастическая автомодуляция волн в неравновесных средах. ЖЭТФ, 1979, 77, вып. 2 (8), 617—629
56. *Романовский Ю. М., Степанова Н. В., Чернавский Д. С.*, Математическая биофизика. М.: Наука, 1984, 304 с.
57. *Рюэль Д., Такенс Ф.*, О природе турбулентности. В сб. «Странные аттракторы». М.: Мир, 1981, 117—151 (РЖМат, 1981, 7В290)
58. *Самарский А. А.*, Теория разностных схем. М.: Наука, 1977, 656 с. (РЖМат 1977, 11Б1015 К)
59. —, Математическое моделирование и вычислительный эксперимент. Вестн. АН СССР, 1979, № 5, 38—49 (РЖМат, 1979, 12А2)
60. —, *Еленин Г. Г., Змитренко Н. В., Курдюмов С. П.*, Горение нелинейной среды в виде сложных структур. Докл. АН СССР, 1977, *237*, № 6, 1330—1333
61. —, *Змитренко Н. В., Курдюмов С. П., Михайлов А. П.*, Тепловые структуры и фундаментальная длина в средах с нелинейной теплопроводностью и объемным источником тепла. Докл. АН СССР, 1976, *227*, № 2, 321—324 (РЖМат, 1976, 8Б565)
62. —, *Курдюмов С. П.*, Нелинейные процессы в плотной плазме и их роль в проблеме лазерного УТС. Тр. кафедры волновой и газовой динамики механико-математического факультета МГУ. М., МГУ, 1979, № 3, 19—28

63. —, —, *Ахромеева Т. С., Малинецкий Г. Г.*, Нелинейные явления и вычислительный эксперимент. Вестн. АН СССР, 1985, № 9, 64—77
64. —, *Попов Ю. П.*, Разностные схемы газовой динамики. М.: Наука, 1975, 352 с.
65. *Синай Я. Г.*, Стохастичность динамических систем. В сб. «Нелинейные волны», М.: Наука, 1979, 192—211
66. *Скотт Э.*, Волны в активных и нелинейных средах в приложении к электронике. М.: «Советское радио», 1977, 368 с.
67. *Тихонов А. Н., Самарский А. А., Заклязьминский Л. А., Волосевич П. П., Дегтярев Л. М., Курдюмов С. П., Попов Ю. П., Соколов В. С., Фаворский А. П.*, Нелинейный эффект образования самоподдерживающегося высокотемпературного электропроводного слоя газа в нестационарных процессах магнитной гидродинамики. Докл. АН СССР, 1967, *173*, № 4, 808—811
68. *Уизем Дж.*, Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977, 624 с.
69. *Филлипс О.*, Взаимодействие волн — эволюция идеи. В сб. «Современная гидродинамика. Успехи и проблемы». М.: Мир, 1984,297—314
70. *Хакен Г.*, Синергетика. М.: Мир, 1980, 404 с.
71. *Шарковский А. Н.*, Сосуществование циклов непрерывного преобразования прямой в себя. Укр. мат. ж., 1964, *16*, № 1, 61—71 (РЖМат, 1964, 10Б48)
72. *Экман Ж. П.*, Переход к турбулентности в диссипативных динамических системах. В сб. «Синергетика», М.: Мир, 1984, 190—219
73. *Якобсон М. В.*, Эргодическая теория одномерных отображений Совр. пробл. матем. Фунд. направления. Итоги науки и техн. ВИНИТИ, 1985, *2*, 204—226
74. *Benettin G., Calgani L., Giorgilli A., Strelcin J. M.*, Lyapunov characteristic exponents for smooth dynamical systems: a method for computing all of them. Meccanica, 1980, *15*, № 1, 9—30
75. *Blow K. J., Doran N. J.*, Global and local chaos in the pumped nonlinear Schrodinger equation. Phys. Rev. Letters, 1984, *52*, № 7, 526—529
76. *Brandstater A., Swift J., Swinney H. L., Wolf A., Farmer I. D., Jen E., Crutchfield.*, Low-dimensional chaos in hydrodynamic system. Phys. Rev. Letters, 1983, *51*, № 16, 1442—1445
77. *Collet P., Eckmann J. P.*, Iterated maps on the interval as dynamical systems. Basel-Boston-Stuttgart, Birkhauser, 1980
78. *Crawford J. D., Omohundro S.*, On the global structure of period doubling flows. Physica D., 1984, *13*, № 1, 2, 161—180 (РЖМат, 1985, 5Б305)
79. *Cross M. C., Newell A. C.*, Convection pattern in large aspect ratio systems. Physica D, 1984, *10*, № 3, 229—338
80. *Deissler R. J.*, Noise strained structure, intermittency and the Ginzburg—Landau equation. J. Stat. Phys., 1985, *40*, № 3/4, 371—395
81. *Farmer J. D.*, Sensitive dependence on parameters in nonlinear dynamics. Phys. Rev. Letters, 1985, 55, № 4, 351—354
82. —, Chaotic attractors of an infinite-dimensional system. Physica D, 1982, *4*, № 3, 366—393
83. —, *Ott E., Yorke J. A.*, The dimension of chaotic attractors. Physica D, 1983, *7*, № 1, 2, 153—180
84. *Feigenbaum M. J.*, Quantitative universality for a class of nonlinear transformations. J. Stat. Phys., 1978, *19*, № 1, 25—52 (РЖМат, 1979, 6В297)
85. —, The universal metric properties of nonlinear transformations. J. Stat. Phys., 1979, *21*, № 6, 669—706
86. *Gierer A., Meinhardt H.*, A theory of biological pattern formation. Kybernetic, 1972, № 12, 30—39
87. *Crassberger P., Procaccia I.*, Measuring the strangeness of strange attractors. Physica D, 1983, *9*, № 1, 2, 189—208.

88. *Grebogy C., Ott E., Yorke J. A.,* Crises sudden changes in chaotic attractors and transient chaos. Physica D., 1983, *7*, № 1, 2, 181—200
89. *Guckenheimer J., Holmes P.,* Nonlinear oscillations, dynamical systems, and biburcations of vector fields. New-York-Berlin, Heidelberg, Tokyo: Springer-Verlag, 1983, 453 p.
90. *Hagan P. S.,* Spiral waves in reaction-diffusion equations. SIAM J. Appl. Math. 1982, *42*, № 4, 762—786 ((РЖМат, 1983, 2Б481)
91. *Henon M.,* On the numerical computation of Poincare maps. Physica D, 1982, *5*, № 2, 3, 412—414 (РЖМат, 1983, 4Б1116)
92. *Hocking L. M., Stewartson K.,* On the nonlinear response of a marginally unstable plane parrallel flow to a two dimensional disturbance. Proc. Roy. Soc. London A, 1972, 326, 289—312
93. *Jakobson M. V.,* Absolutely continuous invariant measures for one parameter families of one-dimensional maps. Commun. Math. Phys., 1981, *81*, № 1, 39—88 (РЖМат, 1982, 2В264)
94. *Kakutani T.,* Plasma waves in the long wave approximation. Suppl. Progr. Theor. Phys., 1974, *55*, 97—119
95. *Koga S.,* Rotating spiral waves in reaction-diffusion systems. Progr. Theor. Phys., 1982, *67*, № 1, 167—178
96. —, Schrodinger equation approach to rotating spiral waves in reaction-diffusion systems. Progr. Theor. Phys., 1982, *67*, № 2, 454—463
97. *Koppell H., Howard L. N.,* Plane wave solutions to reaction-diffusion equation. Stud. Appl. Math., 1973, *52*, № 4, 291—328
98. *Kuramoto Y.,* Chemical waves and chemical turbulence. In «Synergetics. A Workshop». New-York-Berlin-Heidelberg: Springer-Verlag, 1977, 164—173
99. —, Diffusion-induced chaos in reaction systems. Suppl. Progr. Theor. Phys., 1978, *64*, 346—367
100. —, Diffusion-induced chemical turbulence, In «Dynamics of Synergetic Systems». Berlin-Heidelberg-New-York: Springer-Verlag, 1980, 134—153
101. —, *Koga S.,* Turbulized rotating chemical waves. Progr. Theor. Phys., 1981, *66*, № 3, 1081—1083
102. —, *Tsuzuki T.,* Reductive perturbation approach to chemical instabilities. Progr. Theor. Phys., 1974, *52*, № 4, 1399—1401
103. —, —, On the formation of dissipative structures in reaction-diffusion systems. Progr. Theor. Phys., 1975, *54*, № 3, 687—699
104. —, —, Persistant propogation of concentration waves in dissipative media far from thermal equilibrium. Progr. Theor. Phys., 1976, *55*, № 2, 356—369
105. —, Yamada T., Turbulent state in chemical reactions. Progr. Theor. Phys., 1976, *56*, № 2, 679—681
106. *Li T. Y., York J.,* Period three implies chaos. Amer. Math. Month, 1975, *82*, № 10, 982—985
107. *Lorenz E. N.,* The local structure of a chaotic attractor in four dimensions. Physica D, 1984, *13*, № 1, 2, 90—104 (РЖМат, 1985, 5Б271)
108. *L'vov V. S., Predtechensky A. A.,* On Landau and stochastic attractor pictures in the problem of transition to turbulence. Physica D, 1981, *2*, № 1, 38—51
109. *Moon H. T., Huerre P., Redekopp L. G.,* Transition to chaos in the Ginzburg-Landau equation. Physica D, 1983, *7*, № 1, 2, 135—150
110. *Newell A. C., Whitehead J. A.,* Finite bandwidth, finite amplitude convection. J. of Fluid Mech., 1969, *38*, 279—303
111. *Nitzan A., Ortoleva P.,* Scaling and Ginzburg criteria for critical bifurcations in nonequilibrium reacting system. Phys. Rev. A, 1980, *21*, № 5, 1735—1755
112. *Roux J. C.,* Experimental studies of bifurcations leading to chaos in the Belousof—Zhabotinsky reaction. Physica D, 1983, *7*, № 1, 2, 57—68
113. *Russell D. A., Ott E.,* Chaotic (strange) and periodic behaviour in satu-

ration by the oscillating two-stream instability. The Physics of Fluids, 1981, *24*, № 11, 1976—1988
114. *Sparrow C.*, The Lorenz equations: bifurcations, chaos, and strange attractors. New-York-Heidelberg-Berlin: Springer-Verlag, 1982, 269 p. (РЖМат, 1983, 7Б254К)
115. *Stewartson K., Stuart J. A.*, A non-linear instability theory for a wave system in plane Poisseuille flow. J. of Fluid Mech., 1971, *48*, part 3, 529—545
116. *Swinney H. L.*, Observations of order and chaos in nonliner systems. Physica D, 1983, *7*, № 1, 2, 3—15
117. *Takens F.*, Detecting strange attractors in turbulence. In «Dynamical Systems and Turbulence, Warwick 1980» Berlin-Heidelberg-New-York: Springer-Verlag, 1980, 366—381
118. *Taniuti T.*, Reductive perturbation method and far fieldes of wave equations. Suppl. Progr. Theor. Phys., 1974, *55*, 1—35
119. *Tomita K., Tsuda I.*, Towards the interpretation of the global bifurcation structure of the Lorenz system. Suppl. Progr. Theor. Phys., 1980, *69*, 183—199
120. *Turing A.*, The chemical basis of morphogenesis. Phyl. Trans. Roy. Soc. London B, 1952, *237*, 37—72
121. *Winfree A. T.*, The geometry of biological time. Berlin-Heidelberg-New York, Springer-Verlag, 1980, 530 p.
122. *Yamada T., Karamoto Y.*, A reduced model showing chemical turbulence. Progr. Theor. Phys., 1976, *56*, № 2, 681—682
123. —, —, Breakdown of synchronized state in a self-oscillatory chemical reaction systems. Progr. Theor. Phys., 1978, *60*, № 6, 1935—1936
124. *Yamafuji K., Toko K., Nitta J., Urahama K.*, Reductive perturbation approach to hard-mode instabilities of inverted-type bifurcations. Progr. Theor. Phys., 1981, *66*, № 1, 143—153
125. *Zabusky N. J.*, Computational synergetics and mathematical innovation. J. of Computat. phys., 1981, *43*, № 2, 195—249