УДК 517.956.45+517.958

КВАЗИЛИНЕЙНОЕ УРАВНЕНИЕ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ С ИСТОЧНИКОМ: ОБОСТРЕНИЕ, ЛОКАЛИЗАЦИЯ, СИММЕТРИЯ, ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ, АСИМПТОТИКИ, СТРУКТУРЫ

В. А. Галактионов, В. А. Дородницын, Г. Г. Еленин, С. П. Курдюмов, А. А. Самарский

ВВЕДЕНИЕ

Процессы спонтанного нарушения высокой степени симметрии макроскопического состояния сложной системы являются одним из удивительных феноменов окружающего нас мира.

Эти процессы приводят к возникновению так называемых диссипативных структур — упорядоченных образований с характерными пространственно-временными формами. Для возникновения процессов самопроизвольного нарушения симметрии с понижением ее степени система с необходимостью должна быть *открытой*, а ее математическая модель *нелинейной* [29, 64, 80].

В настоящее время явления образования структур находятся в поле пристального внимания исследователей различных специальностей. Биологов эти явления интересуют в связи с вопросом происхождения жизни, проблемами предбиологической эволюции, морфогенеза [49, 71, 75, 80, 81], экологов с точки зрения познания законов образования и стабильного функционирования биоценозов [75], физиков и химиков в связи с возможностью создания принципиально новых приборов и установок. Интерес технологов вызван возможностью повышения производительности старых и созданием новых интенсивных технологий [77]. Философов эти явления привлекают как примеры нетривиального проявления категории «часть и целое», диалектики самодвижения [78].

Несмотря на различную природу систем, при переходе от неупорядоченного состояния к упорядоченному они ведут себя аналогичным образом, что свидетельствует о существовании фундаментальных принципов их функционирования. Изучением этих принципов занимаются представители различных дисциплин в рамках синергетического подхода [59, 64, 79].

Вполне естественно, что одно из самых мощных орудий современного естествознания — математическое моделирование

средствами вычислительного эксперимента [72] используется при изучении структур в нелинейных средах. Сочетание традиционных методов математической физики, современных численных методов и методов обработки информации позволяет всесторонне анализировать рассматриваемое явление, накапливать о нем информацию, создавать новые понятия и методы, адекватные качественным особенностям нелинейных явлений. В создании базисных понятий и построении математических моделей существенную пользу приносит представление о симметрии-асимметрии.

При изучении любого явления исследователь имеет дело с иерархической последовательностью моделей, которая, как правило, составляется путем последовательного учета различных факторов. В такой иерархии моделей всегда можно проследить иерархию симметрии. При этом модель самого низкого уровня подробности описания имеет максимальную симметрию.

Наличие богатой симметрии позволяет сформулировать «атомарные» понятия, в значительной степени адекватные изучаемому классу явлений. По существу, почти все известные к настоящему времени диссипативные структуры с математической точки зрения являются инвариантными или частично-инвариантными решениями феноменологических нелинейных уравнений, то есть наиболее симметричными решениями. Так, стационарные диссипативные структуры являются частным случаем инвариантных решений — стационарными решениями [39]. Автоволновые структуры с хорошей точностью представимы с помощью другого частного случая инвариантных решений — так называемых бегущих волн [38, 49, 56]. Наконец, рассматриваемые в этой работе и других работах авторов [32, 40, 41, 45, 59, 73, 74] нестационарные диссипативные структуры режимов с обострением *непосредственно связаны со степенными автомодельными решениями*. Симметрия-асимметрия является тем глубинным свойством материи, которое не только используется для формулировки базисных понятий, а может быть положено в основу математического моделирования. Имеется в виду создание иерархии моделей на основе иерархии симметрии.

Предлагаемая работа посвящена изучению диссипативных структур режимов с обострением, которые образуются в диссипативной активной нелинейной среде. В качестве содержательной математической модели минимальной размерности выбрано квазилинейное уравнение теплопроводности:

$$u_t = \operatorname{div}(K(u)\operatorname{grad} u) + Q(u). \qquad (1)$$

В этом уравнении $u \geqslant 0$ является температурой среды, $K(u) \geqslant 0$ — нелинейным коэффициентом теплопроводности, $Q(u) \geqslant 0$ — нелинейным источником тепла. Предполагается, что $K(u)$ и $Q(u)$ определены и гладки для всех $u > 0$ и обращаются в нуль лишь в абсолютно холодной среде ($K(0) = 0$, $Q(0) = 0$).

Объектом исследования являются решения задачи Коши для уравнения (1) при различных типах пары коэффициентов $\{K(u), Q(u)\}$.

Особый интерес представляют $K(u)$ и $Q(u)$, удовлетворяющие условиям:

$$\int_0^1 K(u)\,u^{-1}du < +\infty \tag{2}$$

и

$$\int_1^\infty [Q(u)]^{-1}du < +\infty. \tag{3}$$

Выполнение условия (2) при отсутствии источника тепла в среде ($Q(u) \equiv 0$) обеспечивает в случае финитного начального распределения волновой режим распространения теплового возмущения в абсолютно холодной среде с конечной скоростью фронта [43, 68] (см. рис. 1).

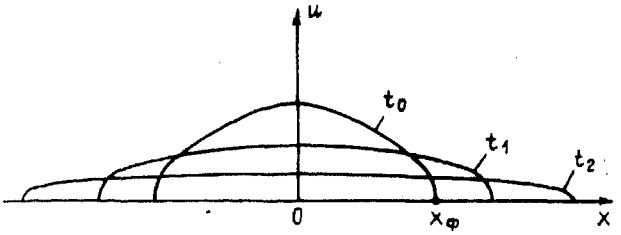

Рис. 1. Эволюция начального теплового возмущения в среде без источника. Фронт тепловой волны распространяется с конечной скоростью

3

Выполнение условия (3) при отсутствии теплопроводности в среде ($K(u) \equiv 0$) приводит к несуществованию в целом решения задачи Коши. В этом случае нагрев среды происходит в режиме с обострением: за ограниченный промежуток времени $t \in [0, \tau]$ в некоторой области пространства температура достигает бесконечности. Существенным является локализация области высоких температур в пространстве при неоднородном ограниченном начальном тепловом возмущении (см. рис. 2).

Представляет интерес изучение решения задачи при одновременном действии диссипативного фактора ($K(u) \not\equiv 0$) и объемного источника тепла ($Q(u) \not\equiv 0$).

Исследования неограниченных решений (режимов с обострением) занимают особое место в теории нелинейных эволюционных уравнений. В общей теории нелинейные задачи, допускающие неограниченные решения, являются глобально (по времени) неразрешимыми. Долгое время они рассматривались как экзотические примеры, показывающие степень оптимальности

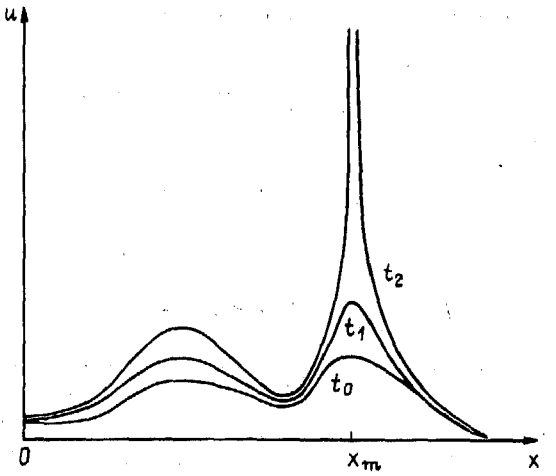

Рис. 2. Эволюция начального теплового возмущения в среде без теплопроводности. Температура достигает бесконечного значения за конечное время τ в одной точке пространства

тех ограничений, которые обеспечивают глобальную разрешимость.

Успешные попытки вывода условий неограниченности решений нелинейных параболических задач были предприняты более двадцати лет назад [93, 97, 108]. Предложенные в этих работах методы оказались весьма плодотворными и получили дальнейшее развитие.

Новый импульс развитию теории неограниченных решений дали возможности практических приложений, например, проблемы самофокусировки световых пучков в нелинейных средах, эффект *T*-слоя в низкотемпературной плазме, проблемы безударного сжатия и т. п. (см. об этом в [59] и других статьях настоящего тома). Число математических публикаций, в которых изучались неограниченные решения нелинейных эволюционных уравнений, в последние полтора десятилетия резко возросло.

Однако в математических исследованиях неограниченных решений в основном отдается заметное предпочтение вопросам общей теории, главным образом, выводу условий глобальной неразрешимости нелинейных задач. Конструктивные методы исследования пространственно-временной структуры неограниченных решений продвинуты еще недостаточно далеко. Основная причина этого, по-видимому, состоит в том, что широкому кругу специалистов в области нелинейных эволюционных уравнений неизвестны те существенно нестационарные эффекты и явления физического характера, которые могут возникать в нелинейной среде и стабильно эволюционировать в течение ограниченного

промежутка времени. Эти эффекты необычны и представляют значительный как теоретический, так и практический интерес.

В частности, режимы с обострением приводят к локализации в пространстве областей высокой температуры и к образованию нестационарных диссипативных структур.

§ 1. Необычные эффекты режимов с обострением

Свойства режимов с обострением проще всего продемонстрировать на одномерной среде с определенной парой $\{K(u), Q(u)\}$.

В качестве такой пары выберем степенные функции

$$K(u)=u^{\sigma}, \quad \sigma>0, \qquad Q(u)=u^{\beta}, \quad \beta>1. \tag{4}$$

При ограничениях $\sigma>0$, $\beta>1$ функции $K(u)$ и $Q(u)$ удовлетворяют условиям (2), (3). Выбор степенных функций не случаен. Ниже с помощью методов группового анализа будет показано, что на классе таких функций симметрия математической модели в определенном смысле максимальна. С другой стороны, степени σ и β являются удобной мерой интенсивности нагрева и диссипативного фактора. Соотношения между σ и β определяют пространственно-временной порядок в рассматриваемой среде. Представление о пространственно-временной структуре можно получить на основе предварительного анализа инвариантных решений.

При специальном выборе начального теплового возмущения $u(x, 0)=\theta(x)$ его дальнейшая эволюция

$$u(x, t)=g(t, \tau)\,\theta(x\varphi^{-1}(t, \tau)) \tag{5}$$

определяется функциями

$$g(t, \tau)=(1-t\tau^{-1})^{-\gamma}, \quad \varphi(t, \tau)=(1-t\tau^{-1})^{\alpha},$$

где

$$\gamma=(\beta-1)^{-1}, \quad \alpha=0{,}5\,(\beta-\sigma-1)\,(\beta-1)^{-1}.$$

Функция $\theta(\xi)$ удовлетворяет при этом соответствующей краевой задаче (см. § 3) для нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка

$$(\theta^{\sigma}\theta'_{\xi})'_{\xi}-\frac{\alpha}{\tau}\xi\theta'_{\xi}+\theta^{\beta}-\frac{\gamma}{\tau}\theta=0. \tag{6}$$

Хотя инвариантное решение (5) является частным решением задачи Коши, тем не менее оказывается, что при практически любых начальных возмущениях решение исходной задачи «выходит» на это решение на развитой стадии процесса нагрева. Таким образом наиболее симметричное решение описывает асимптотику эволюционного процесса. С помощью анализа

уравнения (6) устанавливаются базисные асимптотические режимы нагрева среды [40, 41, 45, 73, 74].

Тепловая волна. *HS*-режим с обострением. В рассматриваемой среде возможен волновой, так называемый *HS*-режим с обострением. Волновой режим развития начального возмущения возможен при $1<\beta<\sigma+1$. Последнее неравенство, грубо говоря, означает, что с ростом температуры диффузия тепла происходит более интенсивно, чем нагрев среды. В этом случае за конечное время все пространство нагревается до бесконечной температуры (см. рис. 3).

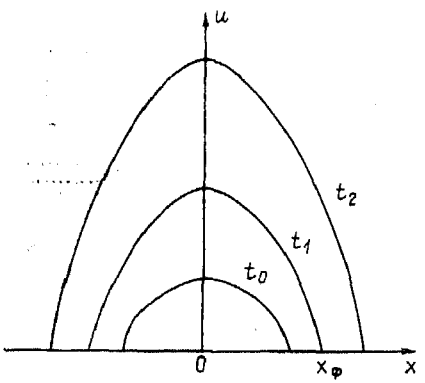

Рис. 3. Тепловая волна *HS*-режима с обострением

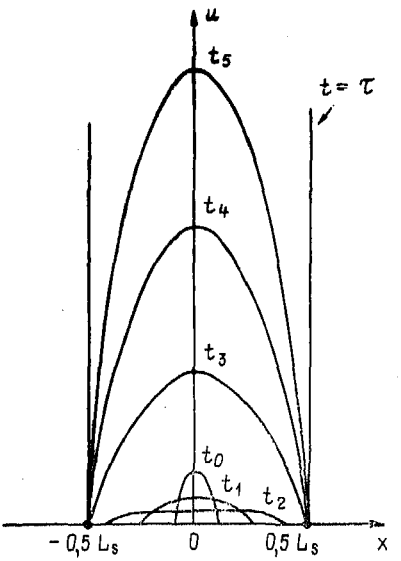

Рис. 4. Формирование диссипативной структуры *S*-режима с обострением. Структура локализована на фундаментальной длине L_s

Локализация тепла в *S*-режиме. При $\beta=\sigma+1$ интенсивность нагрева и диффузии тепла уравниваются, что приводит к парадоксальному эффекту: нагрев среды до бесконечной температуры за ограниченный промежуток времени происходит на так называемой фундаментальной длине L_s (см. рис. 4). Несмотря на наличие диффузии, тепло не распространяется в холодное пространство за пределы фундаментальной длины. Имеет место эффект локализации области интенсивного нагрева. Более того, образуется нестационарная диссипативная структура, распределение температуры в которой не зависит от начального возмущения. От начального возмущения зависит лишь время существования структуры. Такой режим нагрева был на-

зван S-режимом [45, 74]. Подчеркнем, что в случаях HS- и S-режимов на развитой стадии нагрева температурное возмущение имеет единственную структурно-устойчивую пространственно-временную форму, определяемую единственным решением краевой задачи для (6) с определенным значением времени существования решения $\tau>0$.

Диссипативные структуры LS-режима с обострением. При более интенсивной работе источника по сравнению с диффузией тепла ($\sigma+1<\beta<\sigma+3$) в среде образуется конечное число диссипативных структур LS-режима с обострением. Число N качественно различных структур определяется по формуле [40]:

$$N=-[-a]-1,$$

где $a=(\beta-1)(\beta-\sigma-1)^{-1}$.

Число структур связано с числом нулей в решении $y=y(x)$ следующей линейной задачи [40]:

$$y''-0{,}5(\beta-\sigma-1)xy'+(\beta-1)y=0,$$
$$y'(0)=0,\ y(0)=1.$$

Решение этой задачи имеет вид:

$$y(x)=\Phi(-(\beta-\sigma)(\beta-\sigma-1)^{-1},\ 0{,}5,\ 0{,}25(\beta-\sigma-1)x^2),$$

где $\Phi(a, b, \xi)$ вырожденная гипергеометрическая функция [7].

Каждая структура имеет свою пространственно-временную форму, определяемую решением одной и той же краевой задачи для уравнения (6) (см. рис. 5). Эти структуры существуют

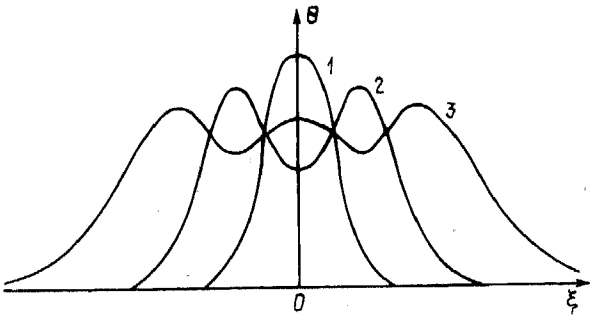

Рис. 5. Собственные функции автомодельной задачи в случае LS-режима с обострением: $\theta=\theta_i(\xi)$, $i=\overline{1,3}$. Собственные функции определяют распределение температуры в простой (1) и сложных (2, 3) диссипативных структурах.

в течение одного и того же промежутка времени $\tau>0$. В момент обострения при $t=\tau$ каждая структура оставляет в среде след — предельное распределение

$$u(x,\tau)=c_i|x|^{-2(\beta-\sigma-1)^{-1}},\quad i=\overline{1,N},\quad c_i>0.$$

Предельные распределения для различных структур различаются значениями постоянных c_i.

Значения c_i являются собственными числами нелинейной краевой задачи для (6), а ее решения — собственными функциями.

При заданном времени обострения имеется N изохронических (существующих в течение одного и того же промежутка времени) структур, «содержащих» в начальный момент времени определенное количество «тепловой энергии»

$$Q_i=\int_0^\infty \theta_i(\xi)\,d\xi, \quad Q_i>Q_{i-1}, \quad i=\overline{2,N}.$$

Таким образом, собственные функции определяют конечное число «энергетических уровней», существующих в течение одного и того же промежутка времени τ.

С другой стороны, любое заданное в начальный момент времени количество «энергии», благодаря профилированию по пространству начальной температуры, в соответствии с конечным числом собственных функций может существовать в виде конечного числа изоэнергетических структур. Времена существования таких структур различны: минимальное «время жизни» у самой простой структуры; максимальное — у самой сложной. Степень сложности структуры определяется характером ее немонотонности при $x\geqslant 0$. Простой структуре соответствует монотонно убывающее распределение температуры, самой сложной — распределение с максимально возможным числом локальных экстремумов.

Исследования показали [41], что самой стабильной структурой является самая простая структура. На рис. 6а, 6б представлены результаты расчета превращения сложных структур θ_2 и θ_3 в простую структуру θ_1. Сложные тепловые структуры сохраняются в течение почти всего времени обострения. В течение достаточно короткого промежутка времени непосредственно перед моментом обострения происходит вырождение сложной структуры в простую.

Существование «игольчатых» предельных распределений (8) свидетельствует о локализации в пространстве области интенсивного нагрева (см. рис. 7).

На основе рассмотренных выше примеров создается впечатление, что локализация области интенсивного нагрева имеет место при более интенсивном действии источника, по сравнению с диффузией. Действительно, при $1<\beta<\sigma+1$ локализация отсутствует, при $\beta=\sigma+1$ область локализации определяется фундаментальной длиной L_s. При $\sigma+1<\beta<\sigma+3$ чем выше температура u_0, тем меньше область пространства, где $u\geqslant u_0$.

Если для $1<\beta<\sigma+3$ при любых начальных данных всегда реализуется режим с обострением, то при $\beta>\sigma+3$ существует

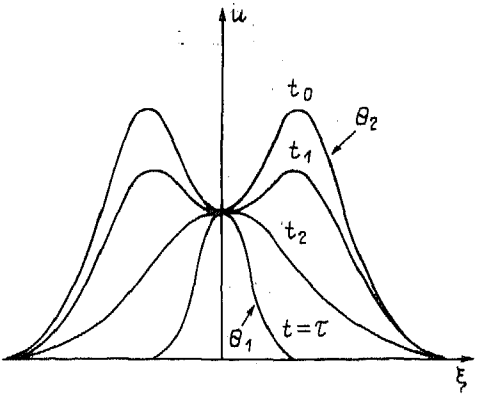

Рис. 6а. Распад сложной диссипативной структуры, соответствующей второй собственной функции

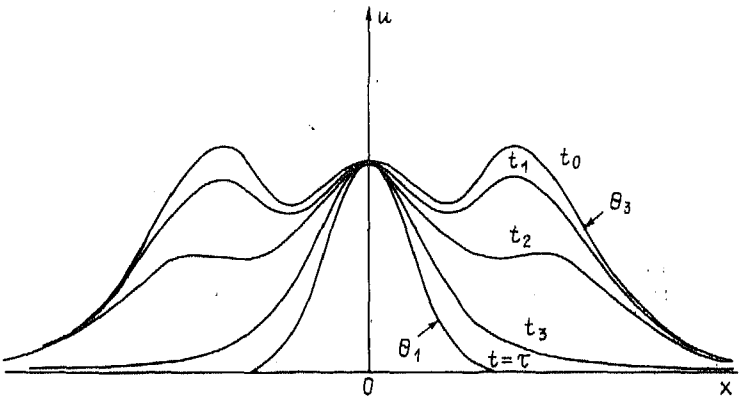

Рис. 6б. Распад сложной диссипативной структуры, соответствующей третьей собственной функции

два типа режимов — HS-режим остывания без обострения ($\tau<0$) и LS-режим с обострением ($\tau>0$).

Инвариантное решение HS-режима без обострения структурно неустойчиво и является границей двух классов начальных данных. Если начальное распределение минорируется распределением температуры инвариантного решения HS-режима остывания, то имеет место LS-режим с обострением (см. рис. 8а). Если начальное распределение мажорируется при совпадении значений максимальных температур, то образуется затухающая волна (см. рис. 8б). Волна существует в течение достаточно большого промежутка времени. На рис. 8 распределение HS-режима без обострения обозначено штриховой линией.

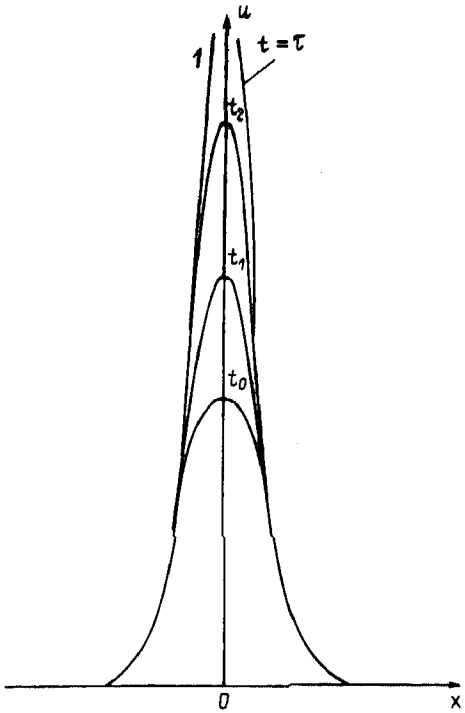

Рис. 7. Формирование диссипативной структуры *LS*-режима с обострением. 1—предельное распределение температуры

Следует отметить, что существование перечисленных режимов при степенных зависимостях $K(u)$, $Q(u)$ от u можно предсказать на основе метода осреднения, предложенного в [42].

Предварительный анализ инвариантного решения (5) для частного случая степенных зависимостей $K(u)$ и $Q(u)$ [40, 41, 42, 45, 59, 73, 74] позволил определить и сформулировать ряд понятий, характерных для рассматриваемого класса задач. Это прежде всего понятия обострения, локализации, эффективной локализации, предельного распределения температуры, сложных и простых диссипативных структур, их структурной устойчивости. С точными определениями этих понятий можно ознакомиться в § 3.

Для доказательства существования обострения и локализации в случае более общих зависимостей $K(u)$ и $Q(u)$ важную роль играют методы группового анализа, качественные методы теории обыкновенных дифференциальных уравнений (о. д. у.), численные методы и методы сравнения решений параболических уравнений, в том числе вырождающихся.

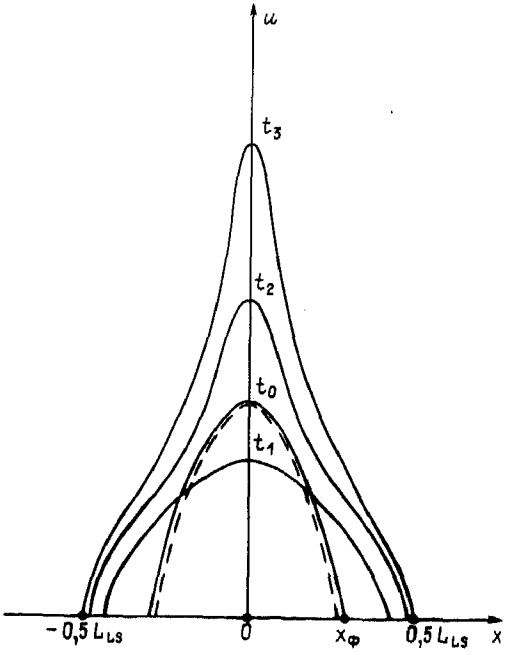

Рис. 8а. Формирование диссипативной структуры LS-режима с обострением при $\beta > \sigma + 3$. Структура локализована на фундаментальной длине. 1 — критическое распределение температуры

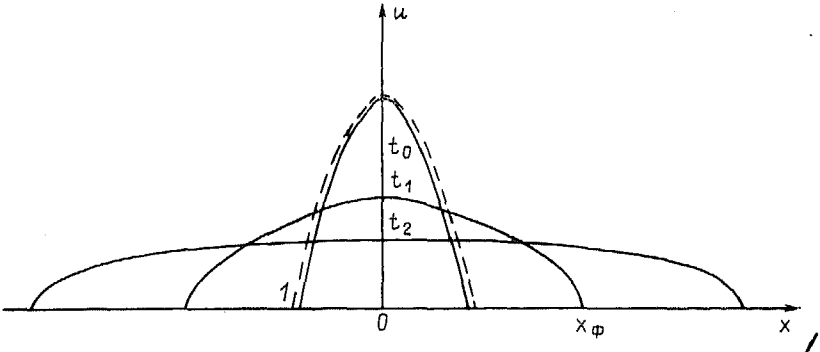

Рис. 8б. Образование тепловой волны HS-режима без обострения

Методы группового анализа позволяют указать, для каких пар $\{K(u), Q(u)\}$ имеется достаточно богатый набор инвариантных решений и определить их конкретный тип.

С помощью методов качественной теории о. д. у. удается установить особые свойства инвариантных решений и сформулировать основные понятия. Численные методы позволяют по-

лучить информацию о конкретном инвариантном решении и его устойчивости относительно возмущений.

С помощью метода приближенных автомодельных решений (ПАР, см. [23]) удается поставить в соответствие исходным уравнениям некоторые другие, — базисные уравнения. Эти уравнения могут иметь более богатый набор инвариантных решений, по сравнению с исходными уравнениями. Замечательным является то обстоятельство, что эти уравнения могут отличаться от исходных, и тем не менее, решение исходной задачи на асимптотической стадии эволюционного процесса стремится к инвариантным решениям базисных уравнений. Это обстоятельство делает особенно важным исследование спектра инвариантных решений, которые определяют различные финальные формы процессов в нелинейных средах.

Достаточный запас инвариантных решений необходим для успешного применения методов операторного сравнения. В методе операторного сравнения эти решения используются в качестве опорных носителей определенных свойств общего решения (см. [14]).

Одним из интересных результатов исследования в многомерном случае является установление существования разных типов инвариантно-групповых решений по различным координатам: степенной автомодельности по радиусу и бегущей волны по углу. Такие решения определяют хорошо известные спиральные волны [49]. Примечательно, что такого рода решения существуют для одного уравнения теплопроводности с источником.

Мы не касаемся в настоящей работе важной и трудной проблемы построения и изучения архитектуры многомерных собственных функций нелинейной среды. Укажем, что существенные конструктивные шаги в этом направлении сделаны в работах [60]. Проблема построения многомерных автомодельных решений приводит к необходимости численного решения нелинейных эллиптических уравнений. Проблема начального приближения решается на основе метода линеаризации в окрестности так называемого гомотермического решения и фундаментального решения. Такой подход позволяет строить многомерные структуры и в триггерных средах.

Установление асимптотик эволюционных процессов, приводящих к возникновению определенного числа типов метастабильно устойчивых диссипативных структур, пространственно-временная структура которых описывается инвариантно-групповыми решениями играет роль аналога второго начала в открытых нелинейных системах.

§ 2. Симметрия уравнения теплопроводности

2.1. Что дает групповой анализ? Современный групповой анализ представляет собой общепризнанный метод описания симметрии непрерывных математических моделей.

Это направление опирается на теорию непрерывных групп, развитую Софусом Ли в конце прошлого века, и представляет собой синтез алгебраических идей с идеями анализа. Понятие непрерывной группы интенсивно развивалось и привело к созданию целого направления в математике: теория групп и алгебр Ли, теория представлений групп и т. д. При этом подход Ли к проблеме интегрирования (изначальной целью Ли было создание теории полного интегрирования дифференциальных уравнений) был основательно забыт в теории дифференциальных уравнений. Это было вызвано тем, что методы интегрирования, развитые Ли, не явились универсальным математическим аппаратом, — произвольная система дифференциальных уравнений не обязана допускать нетривиальную группу преобразований (обсуждение этих вопросов можно найти в [66]). Кроме того, теория Ли является локальной теорией, неспособной, вообще говоря, непосредственно дать решение краевой задачи.

Тем не менее позднее подход Ли к дифференциальным уравнениям был по достоинству оценен прикладниками, поскольку математические модели, используемые в физике и механике, обладают, как правило, существенной симметрией, описываемой широкой группой преобразований. Знание такой группы представляет исследователю значительную информацию для изучения математической модели. В частности, групповое свойство системы дифференциальных уравнений позволяет выделять классы инвариантно-групповых решений, нахождение которых представляет собой более простую задачу по сравнению с общим решением, генерировать новые решения из уже известных и т. д. Это обстоятельство приобретает особую ценность при изучении нелинейных моделей, где каждое точное решение играет важную роль и где алгоритмы группового анализа действуют столь же эффективно, как для линейных. Заметим также, что в отличие от традиционных методов исследования (например, метода малого параметра и др.), групповые методы не используют линеаризации исходной модели. По-видимому, с этими обстоятельствами связано широкое исследование групповых свойств множества моделей математической физики, проведенное в 60-х годах. После работ Биркгофа, Л. В. Овсянникова, Л. И. Седова и их последователей возникло новое самостоятельное направление, называемое групповым анализом дифференциальных уравнений.

Вопреки распространенному мнению, групповой анализ не исчерпывается методами построения частных решений системы дифференциальных уравнений. Еще в начале нашего столетия связь симметрии математической модели с законами сохранения получила конструктивное оформление в виде теоремы Нётер. Поскольку законы сохранения в большинстве случаев являются основой для построения математических моделей, то теорема Нётер указала на фундаментальную роль симметрии при мате-

матическом моделировании. Нелишне напомнить, что соображения симметрии сыграли решающую роль при создании квантовой механики, теории элементарных частиц и в др. областях.

Развитие группового анализа привело и ко многим другим путям использования симметрии математической модели. При этом, однако, современные задачи математической физики поставили ряд вопросов, не нашедших решения в рамках классической теории Ли. Были найдены отдельные преобразования неточечного характера, сохраняющие дифференциальные уравнения; преобразования, связывающие решения нелинейных уравнений с решениями линейных; найдены решения, не являющиеся классическими инвариантными (например, многосолитонные решения уравнения КдФ). Вполне выкристализовалась так называемая проблема Бэклунда, хотя ее конструктивная формулировка была дана сравнительно недавно [48].

Все это явилось предпосылкой развития и обобщения теории Ли. Первые обобщения были даны самим Ли — это его теория касательных преобразований первого порядка. Однако дальнейшее продвижение в этом направлении наталкивалось на трудности принципиального характера. Лишь недавно [47] удалось создать удовлетворительную теорию — теорию групп Ли — Бэклунда, нетривиальным образом обобщающую классическую теорию Ли. Новая теория позволила разрешить ряд вопросов, нерешенных классической теорией, и, главное, дала возможность обнаружить «скрытую симметрию» математических моделей, недоступную для классического подхода. В рамках теории групп Ли—Бэклунда удается получить ряд конструктивных теорем при изучении консервативных свойств систем дифференциальных уравнений, сформулировать проблему Бэклунда и дать эффективные методы ее решения [48].

В настоящий момент групповой анализ находится, безусловно, на новой стадии подъема и становится эффективным методом исследования нелинейных дифференциальных уравнений.

В этой части работы мы приведем некоторые результаты группового анализа и его приложений в рамках модели нелинейной теплопроводности. Симметрия уравнения нелинейной теплопроводности с источником здесь нас будет интересовать в основном с точки зрения структур — возможности существования устойчивых диссипативных структур в теплопроводной среде. Понятие структурной устойчивости, т. е. сохранение во времени характерной для данной структуры формы, скорости роста, локализованности в пространстве и т. д., тесно связано с понятием инвариантности решения при преобразованиях, затрагивающих время. Есть основания считать, что именно инвариантные решения во многих случаях образуют «аттракторы» эволюции диссипативных структур определенного типа нелинейных задач. С этих позиций инвариантно-групповые решения являются не экзотическими, вырожденными представителями многообразия

тепловых образований, а структурами, которые характеризуют важные внутренние свойства нелинейной диссипативной среды.

2.2. Групповая классификация уравнения нелинейной теплопроводности с источником: группа точечных преобразований.

2.2.1. В этом пункте мы рассмотрим групповые свойства уравнения нелинейной теплопроводности с источником (стоком) в одномерном случае

$$u_t = (k(u)\,u_x)_x + Q(u). \tag{1}$$

При конкретных функциях $K(u)$ и $Q(u)$ алгоритмы группового анализа позволяют найти группы преобразований (образующих локальные группы Ли), допускаемые уравнением (1). Естественное обобщение этой задачи (групповая классификация уравнения (1)) — перечисление групп преобразований при всех возможных видах $K(u)$, $Q(u)$, точнее, нахождение допустимой группы преобразований при произвольной паре (k, Q) (ядра основных групп) и перечисление всех тех частных видов (k, Q), при которых происходит расширение группы преобразований, допустимых уравнением (1).

Известно (см. [67]), что критерием инвариантности дифференциального уравнения, — в нашем случае уравнения (1), — относительно группы точечных преобразований зависимых и независимых переменных вида

$$\begin{aligned} t^* &= f(t, x, u;\ a_1, \ldots, a_r), \\ x^* &= g(t, x, u;\ a_1, \ldots, a_r), \\ u^* &= \varphi(t, x, u;\ a_1, \ldots, a_r), \end{aligned} \tag{2}$$

где $a_1, \ldots, a_r$ — параметры r — параметрической группы Ли, является выполнение условия

$$\widetilde{X}\,(u_t - (k(u)\,u_x)_x - Q(u))\,|_{(1)} = 0, \tag{3}$$

где линейный оператор

$$\widetilde{X} = \tilde{t}\,\frac{\partial}{\partial t} + \tilde{x}\,\frac{\partial}{\partial x} + \tilde{u}\,\frac{\partial}{\partial u} + \zeta_{u_t}\frac{\partial}{\partial u_t} + \zeta_{u_x}\frac{\partial}{\partial u_x} + \zeta_{u_{xx}}\frac{\partial}{\partial u_{xx}},$$

определяет инфинитезимальное преобразование группы (2), причем $\tilde{t}$, $\tilde{x}$, $\tilde{u}$ являются искомыми функциями точки (t, x, u), а ζ_{u_t}, ζ_{u_x}, $\zeta_{u_{xx}}$ вычисляются по стандартным формулам продолжения через $\tilde{t}$, $\tilde{x}$, $\tilde{u}$ (см. [67]). Оператор $\widetilde{X}$ взаимно однозначно связан уравнениями Ли с группой преобразований (2), поэтому для нахождения допускаемой группы достаточно решить систему (3) относительно функций $\tilde{t}$, $\tilde{x}$, $\tilde{u}$.

При решении задачи групповой классификации система уравнений (3) (заметим, что (3) представляет собой с и с т е м у уравнений, поскольку коэффициенты $\tilde{t}$, $\tilde{x}$, $\tilde{u}$ не зависят от производ-

ных u_t, u_x, u_{xx}, ..., и потому, выражая, например, u_t в (3) с помощью (1) через u_x, u_{xx}, получаем возможность «расщепить» (3) на систему уравнений, приравнивая нулю коэффициенты при u_x, u_{xx} и их степенях) решается при неконкретизированных зависимостях $k=k(u)$, $Q=Q(u)$. В результате на $k(u)$, $Q(u)$ возникают классифицирующие уравнения, решения которых дают расширение допустимой группы преобразований.

Результаты групповой классификации можно записать в более компактном виде, если использовать группу преобразований эквивалентности (см. [67]). В нашем случае мы будем использовать преобразования

$$\bar{k}(\bar{u})=\gamma^2 k(\alpha u+\beta),$$
$$\bar{Q}(\bar{u})=\frac{\alpha}{\delta^2}Q(\alpha u+\beta), \tag{4}$$
$$\bar{u}=\alpha u+\beta, \quad \bar{x}=\delta\gamma x, \quad \bar{t}=\delta^2 t.$$

Два уравнения (1), эквивалентные в смысле преобразований (4), допускают подобные группы и не различаются при групповой классификации.

Уравнение (1) при произвольных $k(u)$, $Q(u)$ допускает (см. [30, 31] группу переносов по t и x (ядро основных групп), которым отвечают операторы $X_1=\frac{\partial}{\partial x}$ и $X_2=\frac{\partial}{\partial x}$. При $Q\equiv 0$ к X_1, X_2 добавляется растяжение $X_3=2t\frac{\partial}{\partial t}+x\frac{\partial}{\partial x}$. В таблицах 1—4 приведены частные виды (специализации) пары $\{k(u), Q(u)\}$, при которых уравнение (1) допускает более широкую группу преобразований. Для каждой пары $\{k(u), Q(u)\}$ приведены координаты $\tilde{t}$, $\tilde{x}$, $\tilde{u}$ базисных операторов алгебры Ли, при этом ядро X_1, X_2 не приводится. В таблицы 1—4 включены и классические результаты [65, 115], относящиеся к линейному уравнению и уравнению нелинейной теплопроводности (без источника).

Таблица 1

$k=e^u$

$Q(u)$	$\tilde{t}$	$\tilde{x}$	$\tilde{u}$
$\pm e^{\beta u}$, $\beta\neq 0$	βt	$(\beta-1)\frac{x}{2}$	-1
$\pm e^u+\delta$, $\delta=\pm 1$	$e^{-\delta t}$	0	$\delta e^{-\delta t}$
$\delta=\pm 1$	0	x	2
	$e^{-\delta t}$	0	$\delta e^{-\delta t}$
0	$2t$	x	0
	t	0	-1

Таблица 2

$k = u^{\sigma}, \quad \sigma \neq 0; \ -4/3$

$Q(u)$	$\tilde{t}$	$\tilde{x}$	$\tilde{u}$
$\pm u^{\sigma+1} + \delta u$	$e^{-\delta\sigma t}$	0	$\delta e^{-\delta\sigma t} u$
$\lvert\delta\rvert = 1$			
$\pm u^{n}$	$2(n-1)t$	$(n-\sigma-1)x$	$-2u$
$\delta u, \ \lvert\delta\rvert = 1$	0	σx	$2u$
	$e^{-\delta\sigma t}$	0	$\delta e^{-\delta\sigma t} u$
$\delta = \pm 1$	t	$(\sigma+1)x/2$	u
0	$2t$	x	0
	0	σx	$2u$

Таблица 3

$k = u^{-4/3}$

$Q(u)$	$\tilde{t}$	$\tilde{x}$	$\tilde{u}$
$\alpha u^{-1/3} + \delta u,$	$e^{4\delta t/3}$	0	$\delta e^{4\delta t/3} u$
$\lvert\alpha\rvert = \lvert\delta\rvert = 1$	0	$e^{2(\alpha/3)^{1/2} x}$	$-(3\alpha)^{1/2} \times$ $\times e^{2(\alpha/3)^{1/2} x} u$
	0	$e^{-2(\alpha/3)^{1/2} x}$	$(3\alpha)^{1/2} \times$ $e^{-2(\alpha/3)^{1/2} x} u$
$\alpha u^{-1/3}, \ \lvert\alpha\rvert = 1$	$4t/3$	0	u
	0	$e^{2(\alpha/3)^{1/2} x}$	$-(3\alpha)^{1/2} \times$ $\times e^{2(\alpha/3)^{1/2} x} u$
	0	$e^{-2(\alpha/3)^{1/2} x}$	$(3\alpha)^{1/2} \times$ $e^{-2(\alpha/3)^{1/2} x} u$
$\pm u^{n}, \quad n \neq -1/3$	$2(n-1)t$	$(n+1/3)x$	$-2u$
$\delta u, \ \lvert\delta\rvert = 1$	0	$-2x/3$	u
	$e^{4\delta t/3}$	0	$\delta e^{4\delta t/3} u$
	0	$-x^{2}$	$3xu$
$\delta = \pm 1$	t	$-x/6$	u
0	$2t$	x	0
	0	$-2x/3$	u
	0	$-x^{2}$	$3xu$

13

Таблица 4

$k \equiv 1$

$Q(u)$	$\tilde{t}$	$\tilde{x}$	$\tilde{u}$
$\pm e^u$	t	$x/2$	-1
$\pm u^n$	$2(n-1)t$	$(n-1)x$	$-2u$
$\delta u \ln u, \quad \delta = \pm 1$	0	$e^{\delta t}$	$-\delta/2\, e^{\delta t} xu$
	0	0	$e^{\delta t} u$
$\delta u, \quad \delta = \pm 1$	$2t$	x	$2\delta t u$
	$4t^2$	$4xt$	$-(2t + x^2 - 4\delta t^2)\, u$
	0	$2t$	$-xu$
	0	0	u
	0	0	$b(x, t)$, $b_t = b_{xx} + \delta b$
$\delta = \pm 1$	$2t$	x	$2\delta t$
	$4t^2$	$4xt$	$\delta(6t^2 + tx^2) - (x^2 + 2t)\, u$
	0	$2t$	$-xu + \delta xt$
	0	0	$u - \delta t$
	0	0	$a(x, t)$, $a_t = a_{xx}$
0	$2t$	x	0
	$4t^2$	$4xt$	$-(x^2 + 2t)\, u$
	0	$2t$	$-xu$
	0	0	u
	0	0	$a(x, t)$, $a_t = a_{xx}$

2.2.2. Здесь приведены результаты групповой классификации уравнения теплопроводности с источником (стоком) в двумерном и трехмерном случаях (см. [33, 35]):

$$u_t = \sum_{i=1}^{N} \left(k(u)\, u_{x_i}\right)_{x_i} + Q(u), \quad k \geqslant 0. \tag{5}$$

Вычисления по методике [66] приводят в случае уравнения (5) к следующей группе эквивалентности:

$$\begin{aligned} \bar{t} &= b^2 t + f, \\ \bar{x}_i &= ab x_i + e_i, \\ \bar{u} &= cu + d, \\ \bar{k}(\bar{u}) &= a^2 k(u), \\ \bar{Q}(\bar{u}) &= \frac{c}{b^2}\, Q(u), \end{aligned} \tag{6}$$

где a, b, c, d, e_i, f — произвольные постоянные, $a \cdot b \cdot c \neq 0$, $i=1, \ldots, N$.

Результат решения определяющей системы уравнений для (1) при $N=3$ следующий. В случае произвольных функций $K(u)$, $Q(u)$ уравнение (5) допускает группу переносов вдоль t,

Таблица 5

$Q(u)$ \ $K(u)$	$K \equiv 1$	$K=u^{-4/5}$	$K=u^{6}$	$K=e^{u}$	$K=K(u)$ -произвольная функция
$Q=Q(u)$ -произвольная функция	L_7	L_7	L_7	L_7	L_7
$Q=\pm e^{u}+\delta$, $\lvert\delta\rvert=1$	L_7	L_7	L_7	L_8	L_7
$Q=\pm e^{\alpha u}$, $\alpha \neq 0$	L_8	L_7	L_7	L_8	L_7
$Q=\pm u^{n}$, $n \neq 0; 1$	L_8	L_8	L_8	L_7	L_7
$Q=\pm u^{6+1}+\delta u$, $\lvert\delta\rvert=1$	L_7	L_8	L_8	L_7	L_7
$Q=\pm u \ln u$	L_{11}	L_7	L_7	L_7	L_7
$Q=\pm u$	$L_{13} \oplus L_{\infty}$	L_{12}	L_9	L_7	L_7
$Q=\pm 1$	$L_{13} \oplus L_{\infty}$	L_8	L_8	L_9	L_7
$Q=0$	$L_{13} \oplus L_{\infty}$	L_{12}	L_9	L_9	L_8

x_1, x_2, x_3 и группу вращений вокруг любой из пространственных осей, которые определяются инфинитезимальными операторами:

$$X_1=\frac{\partial}{\partial x_1}, \quad X_2=\frac{\partial}{\partial x_2}, \quad X_3=\frac{\partial}{\partial x_3}, \quad X_4=\frac{\partial}{\partial t},$$

$$X_5=x_2\frac{\partial}{\partial x_1}-x_1\frac{\partial}{\partial x_2}, \quad X_6=x_3\frac{\partial}{\partial x_1}-x_1\frac{\partial}{\partial x_3}, \tag{7}$$

$$X_7 = x_3 \frac{\partial}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial}{\partial x_3}.$$

Групповое ядро (7) может быть расширено лишь при тех частных видах $K(u)$, $Q(u)$, которые перечислены ниже.

В таблице 5 приведена ориентирующая «схема» групповых свойств уравнения (5). Через L_r обозначено пространство размерности r (алгебра Ли) операторов вида

$$X = \tilde{t} \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{l=1}^{3} \tilde{x}_l \frac{\partial}{\partial x_l} + \tilde{u} \frac{\partial}{\partial u},$$

допускаемых уравнением (5).

Заметим, что в линейных случаях так же, как и в линейном одномерном случае (см. выше), пространство допускаемых операторов образовано прямой суммой конечномерного и бесконечномерного пространства.

В таблицах 6—10 приведены координаты базисных операторов алгебры Ли для случаев расширения ядра основных групп (заштрихованные клетки таблицы 5), причем координаты базисных операторов ядра не приводятся. В большинстве случаев вместо трех координат $\tilde{x}_1$, $\tilde{x}_2$, $\tilde{x}_3$ выписана $\tilde{x}_l$.

Таблица 6

$k = k(u)$ — произвольная функция:

$\tilde{t}$	$\tilde{x}_l$	$\tilde{u}$	$Q(u)$
$2t$	x_l	0	$Q \equiv 0$

2.2.3. В двумерном случае ($N=2$) групповое ядро образовано следующими операторами:

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial x_2}, \quad X_3 = \frac{\partial}{\partial t},$$

$$X_4 = x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} - x_1 \frac{\partial}{\partial x_2}.$$

В таблице 11 приведена «схема» групповых свойств уравнения (5) при $N=2$. В таблице 12 перечислен лишь особый случай $k = u^{-1}$, не получающийся из трехмерного случая. Все остальные случаи расширения ядра основных групп (заштрихованные клетки таблицы 11) получаются из соответствующих случаев для трехмерного уравнения (5), если формально положить $x_3 = 0$, $\frac{d}{dx^3} = 0$.

Заметим, что в случаях любой пространственной размерности N при коэффициенте теплопроводности

Таблица 7

$k = e^u$:

$Q(u)$	$\tilde{t}$	$\tilde{x}_i$	$\tilde{u}$
$Q = \pm e^u + \delta$, $\lvert\delta\rvert = 1$	$e^{-\delta t}$	0	$\delta e^{-\delta t}$
$Q = \pm e^{\alpha u}$, $\alpha \neq 0$	$2\alpha t$	$(\alpha - 1)\, x_i$	-2
$Q = \delta = \pm 1$	0	x_i	2
	$e^{-\delta t}$	0	$\delta e^{-\delta t}$
$Q \equiv 0$	$2t$	x_i	0
	t	0	-1

Таблица 8

$k = u^\sigma$, $\sigma \neq 0$; $-4/5$:

$Q(u)$	$\tilde{t}$	$\tilde{x}_i$	$\tilde{u}$
$Q = \pm u^n$, $n \neq 0;\ 1$	$2(1-n)\, t$	$(\sigma - n + 1)\, x_i$	$2u$
$Q = \pm u^{\sigma+1} + \delta u$, $\lvert\delta\rvert = 1$	$e^{-\delta\sigma t}$	0	$\delta e^{-\delta\sigma t} u$
$Q = \delta u = \pm u$	0	σx_i	$2u$
	$e^{-\delta\sigma t}$	0	$\delta e^{-\delta\sigma t} u$
$Q \equiv 0$	$2t$	x_i	0
	0	σx_i	$2u$

Таблица 9

$k = u^{-4/5}$:

$Q(u)$	$\tilde{t}$	$\tilde{x}_1$	$\tilde{x}_2$	$\tilde{x}_3$	$\tilde{u}$
$Q = u^n$, $n \neq 0;\ 1$	$2(1-n)t$	$(1/5-n)x_1$	$(1/5-n)x_2$	$(1/5-n)x_3$	$2u$
$Q = \pm u^{1/5} + \delta u$, $\lvert\delta\rvert = 1$	$e^{4/5\delta t}$	0	0	0	$\delta e^{4/5\delta t} u$
$Q = \delta u$, $\lvert\delta\rvert = 1$	$e^{4/5\delta t}$	0	0	0	$\delta e^{4/5\delta t} u$
	0	$2x_1$	$2x_2$	$2x_3$	$-5u$
	0	$x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$	$2x_1x_2$	$2x_1x_3$	$-5x_1u$
	0	$2x_1x_2$	$x_2^2 - x_1^2 x - \frac{2}{3}$	$2x_2x_3$	$-5x_2u$
	0	$2x_1x_3$	$2x_2x_3$	$x_3^2 - x_2^2 - x_1^2$	$-5x_3u$
$Q \equiv 0$	$2t$	x_1	x_2	x_3	0
	0	$2x_1$	$2x_2$	$2x_3$	$-5u$
	0	$x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$	$2x_1x_2$	$2x_1x_3$	$-5x_1u$
	0	$2x_1x_2$	$x_2^2 - x_1^2 - x_3^2$	$2x_2x_3$	$-5x_2u$
	0	$2x_1x_3$	$2x_2x_3$	$x_3^2 - x_1^2 - x_2^2$	$-5x_3u$

$$k(u) = u^{-\frac{4}{N+2}} \tag{8}$$

происходит значительное расширение допустимой группы преобразований. При этом особо выделяется двумерный случай $N=2$, $k=u^{-1}$, когда группа допускаемых преобразований бесконечномерна

$$u_t = \Delta(\ln u) + \delta u,\ \delta = 0;\ \pm 1. \tag{9}$$

Таблица 10

$k \equiv 1$:

$Q(u)$	$\tilde{t}$	$\tilde{x}_1$	$\tilde{x}_2$	$\tilde{x}_3$	$\tilde{u}$
$Q = \delta u$, $\lvert \delta \rvert = 1$	$2t$	x_1	x_2	x_3	$2\delta t u$
	$4t^2$	$4tx_1$	$4tx_2$	$4tx_3$	$(4\delta t^2 - 2Nt - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2)\,u$, N — число пространственных переменных
	0	0	0	0	u
	0	$2t$	0	0	$-x_1 u$
	0	0	$2t$	0	$-x_2 u$
	0	0	0	$2t$	$-x_3 u$
	0	0	0	0	$B(t, x_1, x_2, x_3)$ — любое решение уравнения $B_t = \Delta B + \delta B$
$Q = \pm 1$	$2t$	x_1	x_2	x_3	$2u$
	$4t^2$	$4tx_1$	$4tx_2$	$4tx_3$	$-(2Nt + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)u + ((2N+4)\,t + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)\,t$
	0	0	0	0	$u - t$
	0	$2t$	0	0	$x_1(t-u)$
	0	0	$2t$	0	$x_2(t-u)$
	0	0	0	$2t$	$x_3(t-u)$
	0	0	0	0	$A(t, x_1, x_2, x_3)$ — любое решение уравнения $A_t = \Delta A$

$Q(u)$	$\tilde{t}$	$\tilde{x}_1$	$\tilde{x}_2$	$\tilde{x}_3$	$\tilde{u}$
$Q=\pm e^u$	$2t$	x_1	x_2	x_3	-2
$Q=\pm u^n$	$2(n-1)t$	$(n-1)x_1$	$(n-1)x_2$	$(n-1)x_3$	$-2u$
$Q=\delta u\ln u$, $\lvert\delta\rvert=1$	0	0	0	0	$e^{\delta t}u$
	0	$e^{\delta t}$	0	0	$-\frac{\delta}{2}x_1e^{\delta t}u$
	0	0	$e^{\delta t}$	0	$-\frac{\delta}{2}x_2e^{\delta t}u$
	0	0	0	$e^{\delta t}$	$-\frac{\delta}{2}x_3e^{\delta t}u$
$Q\equiv 0$	$2t$	x_1	x_2	x_3	0
	$4t^2$	$4tx_1$	$4tx_2$	$4tx_3$	$-(2Nt+x_1^2+x_2^2+x_3^2)u$, N — число пространственных переменных
	0	0	0	0	u
	0	$2t$	0	0	$-x_1u$
	0	0	$2t$	0	$-x_2u$
	0	0	0	$2t$	$-x_3u$
	0	0	0	0	$A(t, x_1, x_2, x_3)$ — любое решение уравнения $A_t=\Delta A$

Известно, что значительное изменение функциональных свойств решений уравнения (5) (например, задача Коши для (5) теряет корректность) происходит при коэффициенте теплопроводности

$$k(u)=u^{-\frac{2}{N}}. \tag{10}$$

Таблица 11

$Q(u)$ \ $k(u)$	$k\equiv 1$	$k=u^{-1}$ $(б=-1)$	$k=u^{б}$ $б\neq 0;-1$	$k=e^{u}$	$k=k(u)$ -произвольная функция
$Q=Q(u)$ -произвольная функция	L_4	L_4	L_4	L_4	L_4
$Q=\pm e^{u}+б$, $\lvert б\rvert=1$	L_4	L_4	L_4	L_5	L_4
$Q=\pm e^{\alpha u}$ $\alpha\neq 0$	L_5	L_4	L_4	L_5	L_4
$Q=\pm u^{n}$	L_4	L_5	L_5	L_4	L_4
$Q=\pm u^{б+1}+бu$, $\lvert б\rvert=1$	L_4	L_5	L_5	L_4	L_4
$Q=бu\ln u$ $\lvert б\rvert=1$	L_7	L_4	L_4	L_4	L_4
$Q=\pm u$	$L_9\oplus L_\infty$	$L_2\oplus L_\infty$	L_6	L_4	L_4
$Q=\pm 1$	$L_9\oplus L_\infty$	L_5	L_5	L_6	L_4
$Q\equiv 0$	$L_9\oplus L_\infty$	$L_2\oplus L_\infty$	L_6	L_6	L_5

Интересно отметить, что пересечение областей (8) и (10) как раз дает $N=2$, то есть уравнение (9) (и только оно) обладает всеми перечисленными качествами.

Отметим, что отрицательные степенные показатели в коэффициенте теплопроводности используются при описании диффузионных процессов в полимерах, полупроводниках, в пористых средах, в кристаллическом водороде, в некоторых задачах химии, в задачах физики моря и др. В этих областях моделирование процесса диффузии с уменьшением размерности задачи может исказить групповые свойства задачи, что, в частности, мо-

Таблица 12

$k = u^{-1}$:

$Q(u)$	$\tilde{t}$	$\tilde{x}_1$	$\tilde{x}_2$	$\tilde{u}$
$Q = \pm u^n$, $n \neq 1$	$2\,1(n_1-)t$	nx_1	nx_2	$-2u$
$Q = \alpha u + \delta$, $\lvert\alpha\rvert = \lvert\delta\rvert = 1$	$e^{\alpha t}$	0	0	$\alpha e^{\alpha t} u$
$Q = \pm 1$	t	0	0	u
$Q = \delta u$, $\lvert\delta\rvert = 1$	$e^{\delta t}$	0	0	$\delta e^{\delta t} u$
	0	$A(x_1, x_2)$	$B(x_1, x_2)$	$-2uA_{x_1}$
		A, B — любое решение системы $A_{x_1} = B_{x_2}$, $A_{x_2} = -B_{x_1}$		
$Q \equiv 0$	t	0	0	u
	0	$A(x_1, x_2)$	$B(x_1, x_2)$	$-2uA_{x_1}$

жет привести к появлению решений, отсутствовавших в многомерной постановке, или, наоборот, к отсутствию решений, свойственных многомерному случаю.

2.2.4. Рассмотрим групповые свойства уравнения нелинейной анизотропной теплопроводности с источником (или стоком):

$$u_t = \sum_{i=1}^{N} (k_i(u)\, u_{x_i})_{x_i} + Q(u),$$
$$k_i \geqslant 0, \quad N = 2, 3, \tag{11}$$
$$\sum_{i,j} \left(\frac{k_i}{k_j}\right)^2_u \neq 0.$$

При классификации уравнения (11) по $k_i(u)$, $Q(u)$ используется следующая группа эквивалентности:

$$\bar{x}_i = a_i b x_i + e_i,$$

$$\bar{t}=b^2t+f,$$
$$\bar{u}=cu+d, \qquad (12)$$
$$\bar{k}_i(\bar{u})=a_i^2k_i(u),$$
$$\bar{Q}(\bar{u})=\frac{c}{b^2}Q(u),$$

В трехмерном случае удобно выделить две возможности: 1) все три коэффициента непропорциональны: $k_1 \not\sim k_2$, $k_2 \not\sim k_3$, $k_3 \not\sim k_1$ и 2) два коэффициента пропорциональны $k_i \sim k_j$, $k_i \not\sim k_l$, где (i, j, l) — произвольная подстановка из (1, 2, 3). Второй случай с помощью группы эквивалентности (12) сводится к $k_i \equiv k_j \not\sim k_l$. Для определенности будем считать $k_1 \equiv k_3 \not\sim k_2$, что будет удобно для сведения двумерного случая к частному случаю трехмерного.

2.2.4.1 $k_1 \not\sim k_2$, $k_2 \not\sim k_3$, $k_3 \not\sim k_1$. В результате решения определяющей системы для уравнения (11) (см. [34, 35]) получается групповое ядро, соответствующее операторам

$$X_1=\frac{\partial}{\partial x_1}, \quad X_2=\frac{\partial}{\partial x_2}, \quad X_3=\frac{\partial}{\partial x_3}, \quad X_4=\frac{\partial}{\partial t},$$

которое может быть расширено лишь при тех специализациях $(k_i(u),\ Q(u))$, которые перечислены в таблице 13 и далее.

Таблица 13

$k_1 \not\sim k_2 \not\sim k_3 \not\sim k_1$:

$Q(u)$ \ $k_i(u)$	$k_i=u^{\sigma_i}$, $\sigma_1\neq\sigma_2\neq\sigma_3\neq\sigma_1$	$k_i=e^{\alpha_i u}$, $\alpha_1\neq\alpha_2\neq\alpha_3\neq\alpha_1$	$k_i=k_i(u)$ - произвольные функции
$Q=Q(u)$ - произвольная функция	L_4	L_4	L_4
$Q=\pm e^{\alpha u}$, $\alpha\neq 0$	L_4	L_5	L_4
$Q=\pm u^n$, $n\neq 0$	L_5	L_4	L_4
$Q=\pm 1$	L_5	L_5	L_4
$Q=0$	L_6	L_6	L_5

В таблице 13 приведена «общая схема» групповых свойств уравнения (11) в рассматриваемом случае.

В таблицах 14—16 приведены координаты $\tilde{t}$, $\tilde{x}_l$, $\tilde{u}$ базисных операторов, дополнительных к ядру, которое не приводится.

Таблица 14

$k_l(u)$ — произвольные функции:

$Q(u)$	$\tilde{t}$	$\tilde{x}_l$	$\tilde{u}$
$Q \equiv 0$	$2t$	x_l	0

Таблица 15

$k_l = e^{\alpha_l u}$, $\alpha_1 \neq \alpha_2 \neq \alpha_3 \neq \alpha_1$:

$Q(u)$	$\tilde{t}$	$\tilde{x}_l$	$\tilde{u}$
$Q = \pm e^{\alpha u}$	$2\alpha t$	$(\alpha - \alpha_l)\, x_l$	-2
$Q = \pm 1$	0	$\alpha_l x_l$	2
$Q \equiv 0$	$2t$	x_l	0
	0	$\alpha_l x_l$	2

Таблица 16

$k_l = u^{\sigma_l}$, $\sigma_1 \neq \sigma_2 \neq \sigma_3 \neq \sigma_1$:

$Q(u)$	$\tilde{t}$	$\tilde{x}_l$	$\tilde{u}$
$Q = \pm u^n$	$2(1-n)\, t$	$(\sigma_l + 1 - n)\, x_l$	$2u$
$Q = \pm 1$	$2t$	$(\sigma_l + 1)\, x_l$	$2u$
$Q \equiv 0$	$2t$	x_l	0
	0	$\sigma_l x_l$	$2u$

2.2.4.2. Случай $k_1 \equiv k_3 \nsim k_2$. Групповое ядро в этом случае определяется операторами

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial x_2}, \quad X_3 = \frac{\partial}{\partial x_3},$$

$$X_4 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad X_5 = x_3 \frac{\partial}{\partial x_1} - x_1 \frac{\partial}{\partial x_3}.$$

В таблице 17 приведена «общая схема» групповых свойств

Таблица 17

$k_i(u)$ / $Q(u)$	$k_1=k_3=1$, $k_2=u^{-4/3}$	$k_1=k_3=u^{-1}$, $k_2=1$	$k_1=k_3=u^{\sigma_1}$, $k_2=u^{\sigma_2}$, $\sigma_1 \neq \sigma_2$	$k_1=k_3=e^{\alpha_1 u}$, $k_2=e^{\alpha_2 u}$, $\alpha_1 \neq \alpha_2$	$k_1=k_3=k$, k, k_2 -произвольные функции
$Q=Q(u)$ -произвольная функция	L_5	L_5	L_5	L_5	L_5
$Q=\pm e^{\alpha u}$, $\alpha \neq 0$	L_5	L_5	L_5	L_6	L_5
$Q=\pm u^n$, $n \neq 0; 1, -1/3$	L_6	L_6	L_6	L_5	L_5
$Q=\pm u^{-1/3}$	L_8	L_6	L_6	L_5	L_5
$Q=\pm u^{-1/3}+\delta u$, $\lvert\delta\rvert=1$	L_7	L_5	L_5	L_5	L_5
$Q=\pm u$	L_7	$L_2 \oplus L_\infty$	L_6	L_5	L_5
$Q=\pm 1$	L_6	L_6	L_6	L_6	L_5
$Q \equiv 0$	L_8	$L_3 \oplus L_\infty$	L_7	L_7	L_6

уравнения (11) в рассматриваемом случае, а в таблицах 18—22 перечислены случаи расширения группового ядра.

В случае $k_1=k_3=1$, $k_2=u^{-4/3}$, $Q=-u^{-1/3}$ и $Q=-u^{-1/3}+\delta u$ (см. таблицу 22) два оператора, дополнительных к ядру, имеют комплекснозначные коэффициенты. При построении вещественнозначных инвариантов и инвариантных решений это обстоя-

Таблица 18

$k_1 = k_3 = k(u), \quad k_2 = k_2(u),$
$k(u), \quad k_2(u)$ — произвольные функции:

$Q(u)$	$\tilde{t}$	$\tilde{x}_i$	$\tilde{u}$
$Q \equiv 0$	$2t$	x_i	u

Таблица 19

$k_1 = k_3 = e^{\alpha_1 u}, \quad k_2 = e^{\alpha_2 u},$
$\alpha_1 \neq \alpha_2$:

$Q(u)$	$\tilde{t}$	$\tilde{x}_1$	$\tilde{x}_2$	$\tilde{x}_3$	$\tilde{u}$
$Q = \pm e^{\alpha u}$	$2\alpha t$	$(\alpha - \alpha_1) x_1$	$(\alpha - \alpha_2) x_2$	$(\alpha - \alpha_1) x_3$	-2
$Q = \pm 1$	0	$\alpha_1 x_1$	$\alpha_2 x_2$	$\alpha_1 x_3$	2
$Q \equiv 0$	$2t$	x_1	x_2	x_3	0
	0	$\alpha_1 x_1$	$\alpha_2 x_2$	$\alpha_1 x_3$	2

Таблица 20

$k_1 = k_3 = u^{\sigma}, \quad k_2 = u^{\sigma_2}, \quad \sigma \neq \sigma_2$:

$Q(u)$	$\tilde{t}$	$\tilde{x}_1$	$\tilde{x}_2$	$\tilde{x}_3$	$\tilde{u}$
$Q = \pm u^n$	$2(1-n)t$	$(\sigma + 1 - n) x_1$	$(\sigma_2 + 1 - n) x_2$	$(\sigma + 1 - n) x_3$	$2u$
$Q = \pm u^{-1/3}$	$8/3t$	$\left(\sigma + \frac{4}{3}\right) x_1$	$\left(\sigma + \frac{4}{3}\right) x_2$	$\left(\sigma + \frac{4}{3}\right) x_3$	$2u$
$Q = \pm u$	0	σx_1	$\sigma_2 x_2$	σx_3	$2u$
$Q = \pm 1$	$2t$	$(\sigma + 1) x_1$	$(\sigma_2 + 1) x_2$	$(\sigma + 1) x_3$	$2u$
$Q \equiv 0$	$2t$	x_1	x_2	x_3	0
	0	σx_1	$\sigma_2 x_2$	σx_3	$2u$

Таблица 21

$k_1 = k_3 = u^{-1}, \quad k_2 = 1$:

$Q(u)$	$\tilde{t}$	$\tilde{x}_1$	$\tilde{x}_2$	$\tilde{x}_3$	$\tilde{u}$
$Q = \pm u^n$	$2(1-n)t$	$-nx_1$	$(1-n)x_2$	$-nx_3$	$2u$
$Q = \pm u^{-1/3}$	$8/3t$	$1/3x_1$	$4/3x_2$	$1/3x_3$	$2u$
$Q = \pm u$	0	$A(x_1, x_3)^*$	0	$B(x_1, x_3)^*$	$-2A_{x_1}u$
$Q = \pm 1$	$2t$	0	x_2	0	$2u$
$Q \equiv 0$	$2t$	0	x_2	0	$2u$
	0	$A(x_1, x_3)^*$	0	$B(x_1\ x_3)^*$	$-2A_{x_1}u$

* Здесь A, B—любое решение системы: $\begin{cases} A_{x_1} = B_{x_3}, \\ A_{x_3} = -B_{x_1}. \end{cases}$

тельство, однако, не вызывает затруднений: пользуясь линейностью пространства допустимых операторов, всегда можно взять действительную или мнимую часть от линейной комбинации операторов, относительно которых затем рассматривать инвариантность изучаемых объектов.

2.2.5. В двумерном анизотропном случае $k_1 \nsim k_2$ ядро основных групп состоит только из переносов вдоль осей x_1, x_2, t:

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial x_2}, \quad X_3 = \frac{\partial}{\partial t},$$

которые образуют базис алгебры Ли L_3.

В таблице 23 представлена «общая схема» групповых свойств двумерного анизотропного уравнения ($k_1 \nsim k_2$). Координаты операторов, дополнительных к ядру L_3 (заштрихованная область таблицы 23), получаются из операторов трехмерного случая, перечисленных в таблицах 18—22, если в них формально положить $x_3 = 0$, $\frac{d}{dx_3} = 0$.

Заметим, что в двумерном анизотропном случае расширений группы до бесконечной не наблюдается. Действительно, например, случай $k_1 = k_3 = u^{-1}$, $k_2 = 1$, $Q = 0$ (таблица 21) при переходе к двумерному $k_1 = u^{-1}$, $k_2 = 1$, $Q = 0$ дает оператор $X_1 = \frac{d}{dx_1}$

Таблица 22

$$k_1 = k_3 = 1, \quad k_2 = u^{-4/3}:$$

$Q(u)$	$\tilde{t}$	$\tilde{x}_1$	$\tilde{x}_2$	$\tilde{x}_3$	$\tilde{u}$
$Q = \pm u^n$	$2(1-n)t$	$(1-n)x_1$	$-(n+1/3)x_2$	$(1-n)x_3$	$2u$
$Q = \gamma u^{-1/3}$, $\gamma = \pm 1$	$2t$	x_1	0	x_3	$3/2u$
	0	0	$e^{2\sqrt{\gamma/3}x_2}$	0	$-\sqrt{3\gamma}e^{2(\gamma/3)^{1/2}x_2}u$
	0	0	$e^{-2\sqrt{\gamma/3}x_2}$	0	$\sqrt{3\gamma}\,e^{2(\gamma/3)^{1/2}x_2}u$
$Q = \gamma u^{-1/3} + \delta u$, $\lvert\gamma\rvert = \lvert\delta\rvert = 1$	0	0	$e^{2\sqrt{\gamma/3}x_2}$	0	$-\sqrt{3\gamma}\,e^{2(\gamma/3)^{1/2}x_2}u$
	0	0	$e^{-2\sqrt{\gamma/3}x_2}$	0	$\sqrt{3\gamma}\,e^{2(\gamma/3)^{1/2}x_2}u$
$Q = \pm u$	0	0	x_2	0	$-3/2u$
	0	0	x_2^2	0	$-3x_2u$
$Q = \pm 1$	$2t$	x_1	$-1/3x_2$	x_3	$2u$
$Q \equiv 0$	$2t$	x_1	0	x_3	$3/2u$
	0	0	x_2	0	$-3/2u$
	0	0	x_2^2	0	$-3x_2u$

который получается из

$$\overset{\infty}{X} = A(x_1, x_3)\frac{\partial}{\partial x_1} + B(x_1, x_3)\frac{\partial}{\partial x_3} - 2A_{x_1}(x_1, x_3)\,u\frac{\partial}{\partial u},$$

$$A_{x_1} = B_{x_3}, \quad A_{x_3} = -B_{x_1},$$

если положить $x_3 = 0$, $\dfrac{\partial}{\partial x_3} = 0$.

2.3. Группы Ли—Бэклунда, допускаемые уравнением тепло-

Таблица 23

$k_i(u)$ / $Q(u)$	$k_1=1$, $k_2=u^{-4/3}$	$k_1=u^{\sigma}$, $k_2=u^{\sigma_2}$, $\sigma\neq\sigma_2$	$k_1=e^{\alpha_1 u}$, $k_2=e^{\alpha_2 u}$, $\alpha_1\neq\alpha_2$	$k_1(u), k_2(u)$ - произвольные функции
$Q=Q(u)$ - произвольная функция	L_3	L_3	L_3	L_3
$Q=\pm e^{\alpha u}$, $\alpha\neq 0$	L_3	L_3	L_4	L_3
$Q=\pm u^n$, $n\neq 0; 1; -1/3$	L_4	L_4	L_3	L_3
$Q=\pm u^{-1/3}$	L_6	L_4	L_3	L_3
$Q=\pm u^{-1/3}+\sigma u$, $\lvert\sigma\rvert=1$	L_5	L_3	L_3	L_3
$Q=\pm u$	L_5	L_4	L_3	L_3
$Q=\pm 1$	L_4	L_4	L_4	L_3
$Q\equiv 0$	L_6	L_5	L_5	L_4

проводности с источником. В этом пункте мы рассмотрим групповую классификацию уравнения теплопроводности

$$u_t=\sum_{i=1}^{N}(k_i(u)\,u_{x_i})_{x_i}+Q(u),\qquad k_i\geqslant 0,\quad N=1,2,3, \tag{13}$$

с точки зрения касательных преобразований Ли — Бэклунда [47, 48].

2.3.1. Пусть задано одномерное эволюционное уравнение

$$u_t=F(u,u_1,u_2,\ldots,u_m),\quad u_i=\frac{\partial^i u}{\partial x^i}. \tag{14}$$

Пусть $\mathfrak{M}$ — многообразие, заданное (14) и всеми его дифферен-

циальными следствиями в пространстве $\mathscr{Z}$ точек $z=(t, x, u, \underset{1}{u}, \underset{2}{u}, \ldots)$, где $\underset{1}{u}=\{u_1, u_t\}$, $\underset{2}{u}=\{u_2, u_{1t}, u_{tt}\}$ и т. д. Однопараметрическая группа Ли—Бэклунда, допускаемая $\mathfrak{M}$, задается преобразованиями в $\mathscr{Z}$ вида (см. [47, 48]):

$$\begin{aligned} x^*&=x+\xi(t, x, u, u_1, u_2, \ldots)a+o(a),\\ t^*&=t+\eta(t, x, u, u_1, u_2, \ldots)a+o(a),\\ u^*&=u+U(t, x, u, u_1, u_2, \ldots)a+o(a), \end{aligned} \tag{15}$$

где ξ, η, $U\in\mathscr{A}$, $\mathscr{A}$ — пространство локально аналитических функций от конечного числа переменных из $z=(t, x, u, u_1, u_2, \ldots)$, a — параметр группы. Символом $o(a)$ обозначен остаток формального ряда специального вида (обеспечивающего замкнутость относительно умножения — суперпозиции преобразований (15)), если ряды в (15) сходятся, то символ $o(a)$ приобретает обычное свое значение. В число аргументов не включены производные вида $\partial^{i+j}u/\partial t^i\partial x^j$, поскольку их можно выразить через u, u_1, $u_2, \ldots$ с помощью исходного уравнения (14).

Так же, как и в классической теории Ли, группы Ли—Бэклунда взаимо однозначно связаны с векторными полями (инфинитезимальными операторами). Так, преобразования (15) можно задать с помощью оператора вида

$$X=\bar{U}\frac{\partial}{\partial u}+\sum_{l=1}^{\infty}\zeta_l\frac{\partial}{\partial u_l}+\sum_{l=0}^{\infty}\zeta_{lt}\frac{\partial}{\partial u_{lt}}+\ldots,$$

где $\bar{U}=U-\xi u_1-\eta u_t$, $\zeta_l=(D_x)^l\bar{U}$, $\zeta_{lt}=D_t(D_x)^l\bar{U}$, ...,

$$D_x=\frac{\partial}{\partial x}+u_1\frac{\partial}{\partial u}+u_2\frac{\partial}{\partial u_1}+\ldots$$

$$D_t=\frac{\partial}{\partial t}+u_t\frac{\partial}{\partial u}+u_{1t}\frac{\partial}{\partial u_1}+\ldots.$$

Критерий инвариантности (14) имеет вид

$$X\{u_t-F(u, u_1, \ldots, u_m)\}|_{\mathfrak{M}}=0.$$

Это уравнение можно переписать в другом виде

$$(D_t-F_*)\bar{U}|_{\mathfrak{M}}=0, \tag{16}$$

где введен дифференциальный оператор

$$F_*=\frac{\partial F}{\partial u}+\frac{\partial F}{\partial u_1}D_x+\ldots+\frac{\partial F}{\partial u_m}(D_x)^m.$$

Заметим, что уравнение (16) всегда имеет решение, так как эволюционное уравнение (14) допускает сдвиги по x и t, которым соответствуют операторы

$$X_1=u_1\frac{\partial}{\partial u}, \quad X_2=F\frac{\partial}{\partial u}.$$

Знание одного решения $\bar{U}$ уравнения (16) часто дает возможность строить последовательность решений этого уравнения (именно такова ситуация для всех вычисленных к настоящему времени групп Ли—Бэклунда, допускаемых эволюционными уравнениями. Для систем уравнений это неверно — см. [48]).

Действительно, пусть для F_* и некоторого дифференциального оператора L определен коммутатор

$$[F_*, L]=F_*L-LF_*.$$

Тогда если на решениях (14) оператор L удовлетворяет уравнению Лакса (см. [122])

$$L_t=[F_*, L], \tag{17}$$

где L_t определяется выражением $D_tL=L_t+LD_t$, то оператор L переводит всякое решение $\bar{U}$ уравнения (16) снова в решение $L\bar{U}$ того же уравнения. Действительно, (17) эквивалентно уравнению

$$[D_t-F_*, L]=0,$$

и, следовательно, на решениях (14)

$$(D_t-F_*)(L\bar{U})=L(D_t-F_*)\bar{U}=0.$$

Иначе говоря, действие оператора L порождает бесконечную цепочку решений $L^k\bar{U}$ уравнения (16).

Заметим, что разрешимость уравнения (17) в определенном классе, вообще говоря, не дифференциальных операторов L (см. [48]) является необходимым условием того, что (16) имеет решения $\bar{U}(t, x, u, u_1, \ldots, u_k)$ сколь угодно высокого порядка k, и, значит, уравнение (14) допускает бесконечную группу преобразований Ли—Бэклунда. Этот факт имеет большое практическое значение, поскольку решение уравнения Лакса (17) зачастую представляет собой более простую задачу, чем решение определяющего уравнения (16).

2.3.2. Определяющее уравнение (16) для одномерного уравнения теплопроводности (13) имеет вид

$$U^t=(k''u_1^2+k'u_2)U+2k'u_1U^x+kU^{xx}+Q'U,$$

где $U^t=D_tU_{|(13)}$, $U^x=D_xU$, $U^{xx}=D_x^2U$.

Предполагается, что искомая функция U зависит от конечного числа переменных: $U=U(t, x, u, u_1, \ldots, u_n)$. Можно показать [36], что при $n\leqslant 2$ уравнение (18) определяет группу Ли точечных преобразований, вычисленную в [30, 31] и приведенную выше, поэтому в дальнейшем предполагается, что $n>2$.

Метод исследования определяющего уравнения (18) основан на его расщеплении по степеням u_{n+1}, u_{n+2}, входящих в (18) и

не входящих в число аргументов U. В работе [36] показано, что нетривиальное решение (18) существует лишь в случаях:

1) $k=1$, $Q=au+b$, a, b — произвольные постоянные;

2) $k=u^{-2}$, $Q=0$;

3) $k=u^{-2}$, $Q=au$, a — произвольная постоянная;

4) $k=u^{-2}$, $Q=b$, b — произвольная постоянная.

Легко указать точечные преобразования, сводящие случай 3) к 2) и переводящее случай 1) в линейное уравнение без источника. Поскольку точечные замены не меняют структуры группы Ли—Бэклунда, можно ограничиться тремя вариантами:

а) $u_t=u_{xx}$;

б) $u_t=(u^{-2}u_x)_x$;

в) $u_t=(u^{-2}u_x)_x+b$, b — произвольная постоянная.

а) Линейное уравнение $u_t=u_{xx}$ допускает преобразования (см. [105]), задаваемые функциями

$$U_0=u,\ U_\infty=W(t,x),$$

где $W(t, x)$ — произвольное решение уравнения $w_t=w_{xx}$. Уравнение Лакса в этом случае имеет решение

$$L_1=D_x,\quad L_2=tD_x+\frac{x}{2}.$$

Всякое преобразование Ли—Бэклунда для линейного уравнения определяется линейной комбинацией U_0, U_∞ и решений, полученных из U_0 с помощью указанных операторов L_1 и L_2. Те из решений U, которые зависят от u_n при $n\geqslant 3$, соответствуют преобразованиям Ли—Бэклунда.

б) Уравнение $u_t=(u^{-2}u_x)_x$ исследовано в [89]. Допускаемая группа Ли—Бэклунда в этом случае определяется линейной комбинацией функций $U_k=L^kU_0$, $k=1, 2, \ldots$, где $U_0=(u^{-2}u_x)_x$, а $L=D_x^2(u^{-1})D_x^{-1}$ — оператор L в этом случае интегро-дифференциальный. Можно показать, что U_k представима в виде

$$U_k=-[D_x^2(u^{-1}D_x)^k](x),\quad k=1, 2, \ldots.$$

в) Случай $u_t=(u^{-2}u_x)_x+b$ является существенно новым (см. [36]).

Уравнение Лакса имеет в этом случае решение $L=D_x^2\left(u^{-1}D_x-\frac{b}{2}x\right)D_x^{-2}$, а решение определяющего уравнения, с которого «стартует» цепочка преобразований Ли—Бэклунда, имеет вид

$$U_0=-\left[D_x^2\left(u^{-1}D_x-\frac{b}{2}x\right)\right](x).$$

Можно показать (см. [36]), что серия U_k представима в виде $U_k=-D_x^2\left[u^{-1}D_x-\frac{b}{2}x\right]^{k+1}(x)$, причем всякое решение опреде-

ляющего уравнения представимо в виде линейной комбинации U_k.

В работе [36] показано, что многомерное уравнение теплопроводности с источником (13) допускает нетривиальную группу Ли—Бэклунда лишь в линейных случаях: $k_i = \text{const}$, $i = 1, \ldots, N$, $N = 2$; 3, $Q = au + b$, a, b — постоянные.

Итак, на этом групповые свойства уравнения теплопроводности с источником в одномерном, двумерном и трехмерном случаях изучены. Ниже будут даны примеры использования групп преобразований, допускаемых уравнением теплопроводности.

2.4. Инвариантные решения уравнения теплопроводности с источником в одномерном случае.

2.4.1. Наличие нетривиальной группы преобразований, допускаемой некоторым дифференциальным уравнением или системой, вносит определенную алгебраическую структуру в множество его решений. Это, в частности, выражается в том, что преобразования группы переводят всякое решение снова в решение той же системы уравнений. Получаемая таким процессом совокупность решений может «стартовать» с любого решения, в том числе и никак не связанного с допускаемой группой преобразований. Это свойство особенно важно при исследовании нелинейных уравнений, где велика «цена» каждого точного решения и где преобразования, переводящие решение в решения, зачастую носят неочевидный характер.

Если при преобразовании группы решение переходит в себя или остается внутри инвариантного многообразия, то такие решения называют, соответственно, инвариантными и частично-инвариантными решениями. Поиск таких решений облегчается в связи с возможностью их описания через инварианты той же группы преобразований. Поскольку число инвариантов всегда меньше суммарного числа зависимых и независимых переменных в исходной системе, то теорема о представлении неособого инвариантного многообразия (см. [67]) гарантирует снижение размерности в системе координат, связанной с инвариантами (частный случай этого факта для группы растяжений известен как «π-теорема» в теории размерности). Число независимых переменных в пространстве инвариантов называется рангом инвариантного решения и может принимать различные значения. Поэтому первый шаг в классификации инвариантных решений системы дифференциальных уравнений, допустимая группа которой известна, заключается в перечислении классов решений, имеющих общий ранг. Следующим шагом классификации обычно служит вычисление оптимальной системы подгрупп основной группы, которой отвечает набор существенно различных инвариантных решений ([67]). Такие решения не могут быть получены одно из другого с помощью допускаемой группы, в то время как все остальные инвариантные решения получаются именно таким путем. Выделение набора существенно различных реше-

ний позволяет систематизировать множество инвариантных решений, однако даже для случаев небольшого количества переменных имеет громоздкий вид. В работе [31] такая классификация проведена для одномерного уравнения нелинейной теплопроводности с источником для всех видов $k(u)$, $Q(u)$, при которых происходит расширение группы допускаемых преобразований. (Заметим, что для уравнения теплопроводности при любой размерности могут существовать лишь инвариантные решения и не существует частично-инвариантных решений, отличных от инвариантных.)

2.4.2. Уравнение линейной теплопроводности со знакопеременным источником. Здесь мы приведем лишь фрагмент такой классификации, соответствующий частному случаю

$$u_t = u_{xx} + \delta u \ln u, \quad \delta = \pm 1. \tag{19}$$

Уравнение (19) допускает (см. табл. 4) алгебру Ли L_4 инфинитезимальных операторов с базисом

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_3 = e^{\delta t}\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\delta}{2} e^{\delta t} x u \frac{\partial}{\partial u},$$
$$X_4 = e^{\delta t} u \frac{\partial}{\partial u}, \tag{20}$$

причем оптимальная система однопараметрических подгрупп в этом случае такова:

$$\{X_1;\ \alpha X_1 + X_2;\ X_3;\ X_2 \pm X_3;\ X_4\},$$

где α — произвольная постоянная.

Инвариантные решения, соответствующие этому набору, можно представить в таком виде соответственно:

$$u(t, x) = \tilde{u}(x),$$
$$u(t, x) = \tilde{u}(\alpha x - t),$$
$$u(t, x) = \tilde{u}(t) e^{-\frac{\delta x^2}{4}}, \tag{21}$$
$$u(t, x) = \tilde{u}(t) e^{-\frac{\delta x^2}{4(1 \pm e^{-\delta t})}}.$$

Инвариантного решения, соответствующего X_4, не существует, так как для него не выполнены соответствующие необходимые условия (см. 67]).

Подстановка представлений (21) в уравнение (19) приводит к обыкновенному дифференциальному уравнению для $\tilde{u}(\lambda)$, где λ — независимая переменная в данном представлении.

Надо заметить, что классификация инвариантных решений с точки зрения подобия (то есть выделение набора существенно различных решений) может не иметь большой ценности с точки

зрения приложений. В приложениях обычно адаптируют найденный набор решений к конкретной краевой задаче. При этом интересуются глобальными свойствами таких решений, в то время как классификация проводится с помощью группы допускаемых преобразований, то есть средствами локального анализа. «Подходящее» решение не всегда легко усмотреть, исходя из набора существенно различных решений, поскольку переход к подобному решению может осуществляться достаточно сложными преобразованиями группы. В работе [30] приведен пример, когда переход к решению, подобному одному из инвариантных решений оптимального набора, приводит к режиму с обострением, в то время как ни одно из решений оптимальной системы подгрупп таким свойством не обладает.

Ниже мы подробнее рассмотрим семейство инвариантных решений уравнения (19), соответствующее оператору (см. [32])

$$X=\varepsilon X_2+X_3.$$

Инвариантное решение в этом случае можно представить в виде

$$u(t, x)=\tilde{u}(t)\, e^{-\frac{\delta x^2}{4}\left(\frac{1}{1+\varepsilon e^{-\delta t}}\right)}. \tag{22}$$

Подстановка (22) в (19) приводит к обыкновенному дифференциальному уравнению для $\tilde{u}(t)$:

$$\tilde{u}_t=-\frac{\delta}{2}\frac{\tilde{u}}{1+\varepsilon e^{-\delta t}}+\delta\tilde{u}\ln\tilde{u}.$$

Это уравнение интегрируется и дает двухпараметрическое семейство инвариантных решений

$$u(t, x)=e^{-\frac{\delta x^2}{4(1+\varepsilon e^{-\delta t})}}\, e^{e^{\delta t}\ln\left[u_0\left(\frac{1+\varepsilon e^{-\delta t}}{1+\varepsilon}\right)^{1/2\varepsilon}\right]}. \tag{23}$$

Мы будем рассматривать лишь те решения задачи Коши для уравнения (19), в которых температурное возмущение ограничено по пространству: $u(t, x)\to 0$ при $|x|\to\infty$. Семейство (23) является решением задачи Коши для двухпараметрического семейства начальных данных

$$u(0, x)=u_0 e^{-\frac{\delta x^2}{4(1+\varepsilon)}}, \tag{24}$$

где u_0, ε — параметры, $u_0\geqslant 0$, $\varepsilon<-1$ при $\delta<0$, $-1<\varepsilon<+\infty$ при $\delta>0$. Рассмотрим более подробно возможные варианты развития начального возмущения (24).

а) Решение (23) при $\varepsilon=0$ переходит в

$$u(t, x)=\sqrt{e}\, e^{-\frac{\delta x^2}{4}}\, e^{e^{\delta t}\left(\ln u_0-\frac{1}{2}\right)}, \tag{25}$$
$$u_0>0,\ \delta>0.$$

Полуширина температурного распределения (25) не зависит от времени и равна $2\sqrt{\ln 2/\delta}$.

При $u_0<\sqrt{e}$ в каждой фиксированной точке x температура $u(t, x)$ монотонно убывает до нуля $\lim\limits_{t\to+\infty} u(t, x)=0$, при $u_0=\sqrt{e}$ решение (25) стационарно, при $u_0>\sqrt{e}$ температура монотонно и неограниченно возрастает в каждой фиксированной точке x при $t\to+\infty$.

На рис. 9, 10 приведена численная реализация решения с постоянной полушириной.

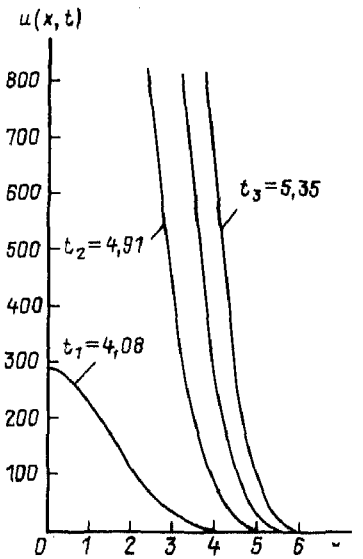

Рис. 9

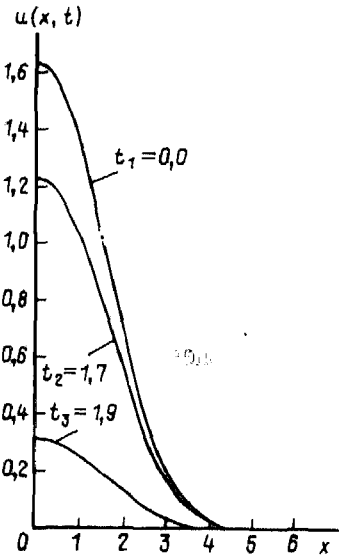

Рис. 10

б) Рассмотрим решение (23) при $\varepsilon>0$, $\delta>0$. В этом случае полуширина начального распределения (24) больше полуширины решения (25). Полуширина решения (23) является монотонно убывающей функцией и при $t\to+\infty$ стремится к полуширине распределения (25). Относительно амплитуды решения имеются три возможности.

Если $u_0<u_2(\varepsilon)=e^{1/(2+2\varepsilon)}$, то амплитуда монотонно убывает и $\lim\limits_{t\to+\infty} u_{\max}(t)=0$.

Если $u_0>u_1(\varepsilon)=(1+\varepsilon)^{1/2\varepsilon}$, то амплитуда монотонно и неограниченно возрастает при $t\to+\infty$.

Если $u_2(\varepsilon)<u_0<u_1(\varepsilon)$, то амплитуда является немонотонной функцией времени: возрастая вначале (но не достигая величины $\sqrt{e}$ — амплитуды стационарного решения), убывает к нулю при $t\to+\infty$.

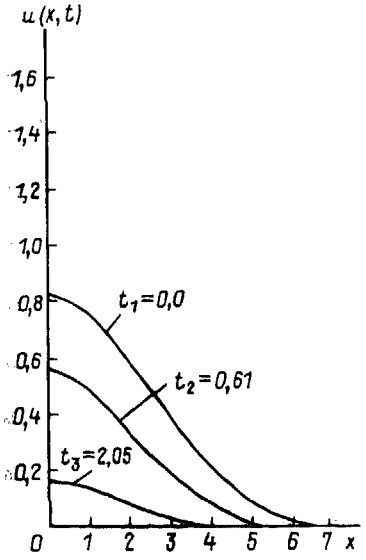

Рис. 11

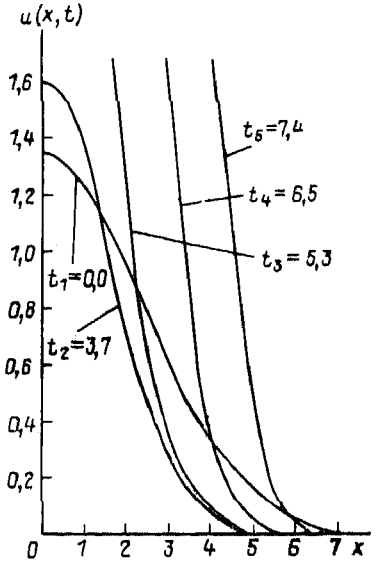

Рис. 12

Решение (23) при $\varepsilon>0$, $\delta>0$ является решением с монотонно убывающей полушириной.

На рис. 11, 12, 13 представлена численная реализация решения с монотонно убывающей полушириной.

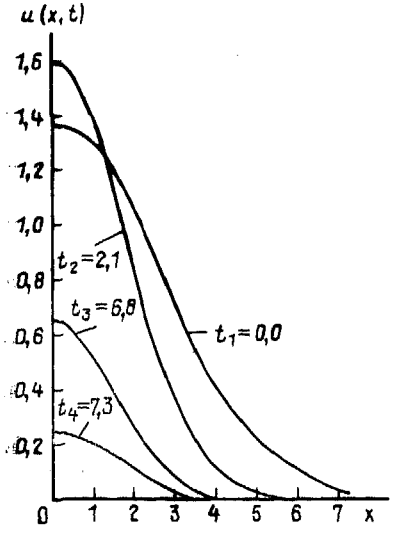

Рис. 13

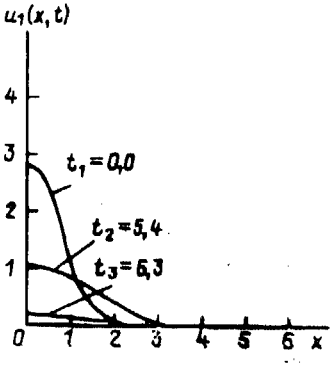

Рис. 14

в) Решения с монотонно растущей полушириной определяются формулой (23) либо при $\delta>0$, $-1<\varepsilon<0$, либо при $\delta<0$, $\varepsilon<-1$.

В первом случае полуширина решения (23) является монотонно растущей функцией. В начальный момент времени $t=0$ она меньше полуширины (1.4), а при $t\to+\infty$ стремится к значению $2\sqrt{\ln 2/\delta}$.

Если $u_0<u_1(\varepsilon)$, то амплитуда монотонно убывает до нуля.

Если $u_0>u_2(\varepsilon)$, то амплитуда монотонно и неограниченно растет при $t\to+\infty$.

Если $u_1(\varepsilon)<u_0<u_2(\varepsilon)$, то амплитуда является немонотонной функцией; убывая вначале, она достигает некоторого минимального значения в конечный момент времени, затем неограниченно растет монотонным образом при $t\to+\infty$.

Численная реализация решения при $\delta>0$, $-1<\varepsilon<0$ представлена на рис. 14, 15, 16.

Во втором случае ($\delta<0$, $\varepsilon<-1$) полуширина решения (23) монотонно и неограниченно растет при $t\to+\infty$.

Если $u_0<u_2(\varepsilon)$, то амплитуда монотонно возрастает до значения $u(0,\infty)=1$.

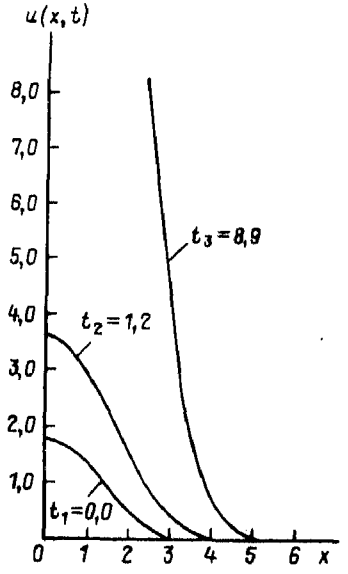

Рис. 15

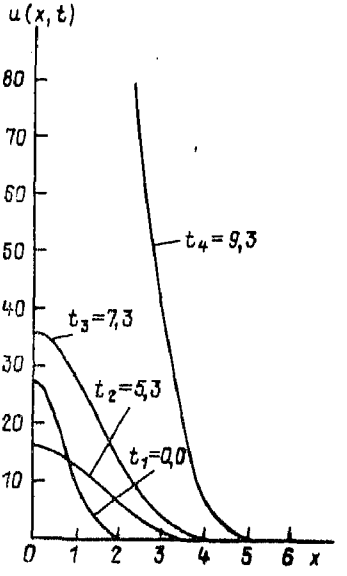

Рис. 16

Если $u_0>u_2(\varepsilon)$, то амплитуда вначале монотонно убывает, а затем монотонно возрастая стремится к значению $u(0,\infty)=1$, при $t\to+\infty$.

Такое решение (см. рис. 17, 18) аналогично решению бегущей волны, рассмотренной в работе [54].

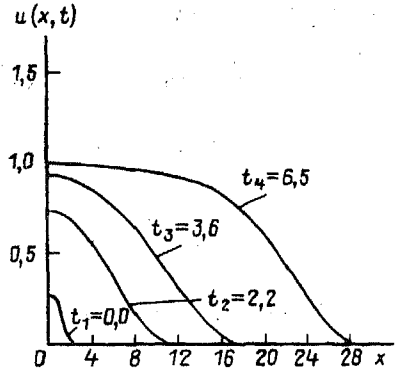

Рис. 17

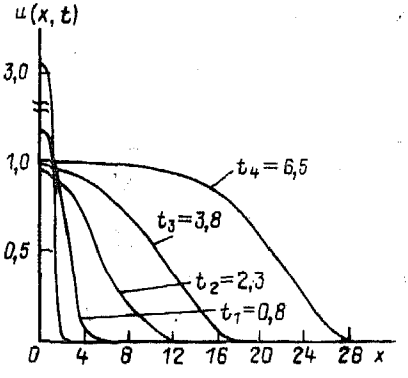

Рис. 18

Поведение температурного распределения (23) по пространству и во времени определяется парой параметров (ε, u_0). На рис. 19 изображена плоскость параметров начальных данных (ε, u_0), которая разделяется кривыми $u_1(\varepsilon)$ и $u_2(\varepsilon)$ на зоны, соответствующие описанным выше режимам.

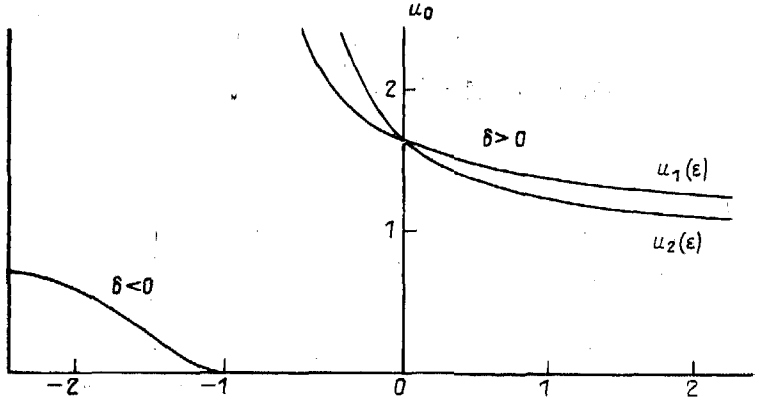

Рис. 19

г) Чтобы наглядно представить поведение решения (23) во времени, перейдем к переменным амплитуды и полуширины температурного возмущения:

$$A(t)=u(t,0)=e^{e^{\delta t}\ln\left[u_0\left(\frac{1+\varepsilon e^{-\delta t}}{1+\varepsilon}\right)^{1/2\varepsilon}\right]}, \tag{26}$$

$$X_h(t)=2\sqrt{\frac{\ln 2}{|\delta|}}\sqrt{\operatorname{sign}(\delta)(1+\varepsilon e^{-\delta t})}.$$

Связь амплитуды и полуширины дается уравнением

$$\frac{dA}{dX_h}=\frac{Aa^2\,\mathrm{sign}\,(\delta)\,(1-2\mathrm{sign}\,(\delta)\,X_h^2a^{-2}\ln A)}{X_h\left(X_h^2-a^2\,\mathrm{sign}\,(\delta)\right)}, \tag{27}$$

где $a=2\sqrt{\ln 2/|\delta|}$ — полуширина стационарного решения (25). Интеграл уравнения (27) имеет вид

$$A^{\left(X_h^2-a^2\mathrm{sign}(\delta)\right)}X_L^{-a^2\mathrm{sign}(\delta)}=A^{\left(X_{h_0}^2-a^2\mathrm{sign}(\delta)\right)}X_{h_0}^{-a^2\mathrm{sign}(\delta)}, \tag{28}$$

где $X_{h_0}=X_h(0)$, $A_0=A(0)=u_0(0)$.

В плоскости (X_h, A) уравнение (27) имеет нулевую изоклину:

$$A=e^{\frac{2\ln 2\,\mathrm{sign}(\delta)}{|\delta|X_h^2}},$$

и бесконечную изоклину $(dX_h/dA=0)$:

$$X_h^2=4\ln 2\,\frac{\mathrm{sign}\,(\delta)}{|\delta|},$$

существующую лишь при $\delta>0$.

Особой точкой уравнения (27) при конечных $A\neq 0$ и $X_h>0$ при $\delta>0$ является точка с координатами $X_h=a$, $A_{00}=\sqrt{e}$. Особая точка является седлом с сепаратрисами (см. рис. 20):

$$X_h=a,\quad A=\left(\frac{X_h}{a}\right)^{\left(\left(\frac{X_h}{a}\right)^2-1\right)^{-1}}.$$

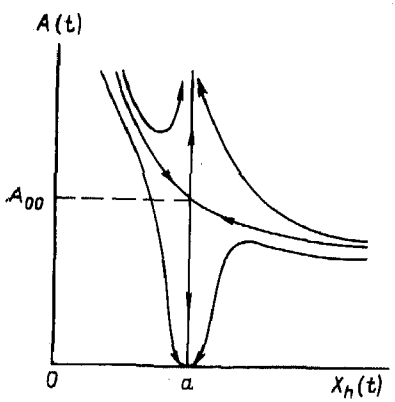

Рис. 20

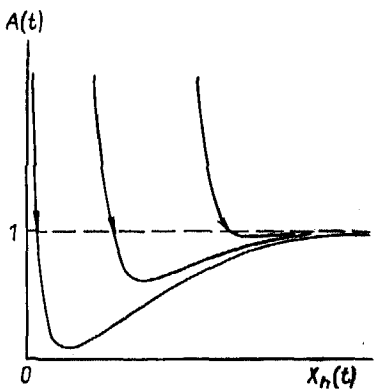

Рис. 21

В случае $\delta<0$ точка (0, 0) является седловой, с сепаратрисами $X_h\equiv 0$ и $A\equiv 0$ (см. рис. 21).

Ход интегральных кривых уравнения (27) представлен на рис. 22, 23.

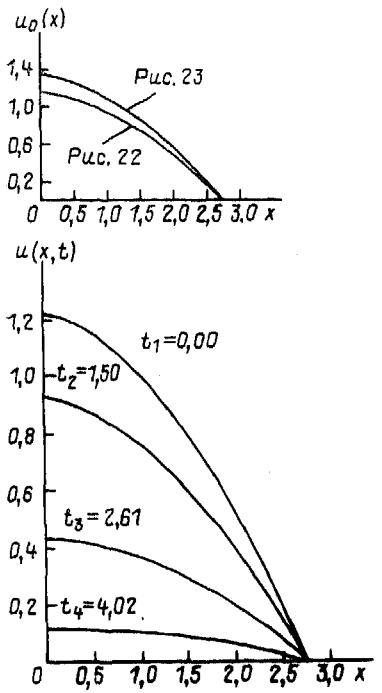

Рис. 22

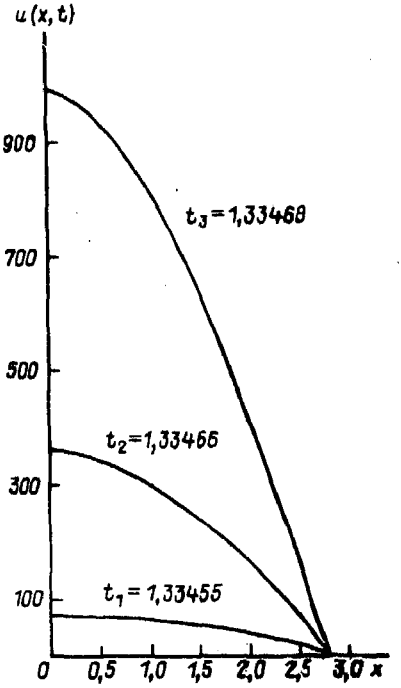

Рис. 23

Заметим, что все перечисленные в этом параграфе результаты легко переносятся на случай, когда объемный источник тепла имеет линейную «добавку» $Q=\alpha u\ln u+\beta u$ с помощью преобразования группы эквивалентности $u\to\gamma u$, $\gamma=\text{const}$.

2.4.3. Уравнение нелинейной теплопроводности со знакопеременным источником. Рассмотрим уравнение теплопроводности в случае, когда источник и коэффициент теплопроводности имеет степенную зависимость от температуры:

$$u_t=(u^\sigma u_x)_x+\alpha u^{\sigma+1}+\delta u, \quad \sigma>0. \tag{29}$$

Одно из инвариантных решений (см. [31]) в этом случае имеет вид:

$$u(t,x)=\tilde{u}(x)\left(\lambda+(1-\lambda)e^{-\sigma\delta t}\right)^{-1/\sigma}. \tag{30}$$

Представление (30) дает решение задачи Коши при выполнении следующих условий: $\alpha>0$, $\lambda\delta<0$. (Выполнение этих условий обеспечивает обращение теплового потока $-k(u)u_x$ в нуль при обращении в нуль температуры.)

Функция $\tilde{u}(x)$ является решением уравнения

$$(\tilde{u}^\sigma\tilde{u}_x)_x+\alpha\tilde{u}^{\sigma+1}+\lambda\delta\tilde{u}=0,$$

и имеет вид:

$$\tilde{u}(x)=\begin{cases}\left(-2\lambda\delta(\sigma+1)\dfrac{1}{\alpha(\sigma+2)}\right)^{1/\sigma}\cos^{2/\sigma}\left(\dfrac{\sigma}{2}\sqrt{\dfrac{\alpha}{\sigma+1}}x\right), \text{при} |x|\leqslant L_s/2,\\ 0, \text{ при } |x|>L_s/2,\end{cases}$$

где $L_s=\sqrt{(\sigma+1)\alpha^{-1}}/\sigma$ — фундаментальная длина. Заметим, что L_s определяется лишь параметрами среды σ и α и не зависит от δ, то есть наличие линейного источника (стока) не влияет на пространственную структуру инвариантного решения.

При $\delta>0$ для любого $u_0=(-2\lambda\delta(\sigma+1)\alpha^{-1}(\sigma+2)^{-1})^{1/\sigma}>0$ временна́я характеристика решения (30) $g(t)=(\lambda+(1-\lambda)\cdot e^{-\sigma\delta t})^{-1/\sigma}\to+\infty$ при $t\to\tau=-\ln[\lambda(\lambda-1)^{-1}]/\sigma\delta$.

При $\delta<0$ существует такое критическое значение амплитуды начального распределения $u_*=(2|\delta|(\sigma+1)^{1/\sigma}/\alpha(\sigma+2))$ (амплитуда стационарного решения), что

(а) если $u_0>u_*$, то $g(t)\to+\infty$ при $t\to\tau$;
(б) если $u_0<u_*$, то $g(t)\to 0$ при $t\to+\infty$;
(в) если $u_0=u_*$, то $g(t)\equiv 1$, где

$$\tau=\frac{\ln\left[u_0^\sigma(u_0^\sigma-u_*^\sigma)^{-1}\right]}{\sigma|\delta|}.$$

Рассмотренные решения передают качественные особенности задачи Коши для уравнения теплопроводности со знакопеременным источником нелинейного типа: явление локализации и наличие сверхбыстрых режимов роста тепловых возмущений.

2.5. Двумерная теплопроводность: направленное распространение тепла в анизотропной нелинейной среде.

2.5.1. Здесь мы рассмотрим пример построения инвариантного решения, описывающего распространение тепла с различными типами локализации по разным пространственным направлениям, происходящее в режиме с обострением [4].

Как показано в п. 2.4, уравнение нелинейной анизотропной теплопроводности с источником

$$u_t=(u^{\sigma_1}u_x)_x+(u^{\sigma_2}u_y)_y+u^\beta,\quad \sigma_1>0,\quad \sigma_2>0,\quad \beta>0, \tag{31}$$

инвариантно относительно преобразований, определяемых алгеброй Ли инфинитезимальных операторов сдвига по t, x, y и растяжения

$$X_1=\frac{\partial}{\partial t},\quad X_2=\frac{\partial}{\partial x},\quad X_3=\frac{\partial}{\partial y},$$

$$X_4=2(1-\beta)t\frac{\partial}{\partial t}+(\sigma_1+1-\beta)x\frac{\partial}{\partial x}+(\sigma_2+1-\beta)y\frac{\partial}{\partial y}+2u\frac{\partial}{\partial u}.$$

Мы будем рассматривать автомодельные решения, инвариантные относительно подгруппы растяжений, определяемой опера-

тором X_4, который мы запишем в следующем виде:

$$X_4 = 2(1-\beta)(t_0-t)\frac{\partial}{\partial(t_0-t)} + (\sigma_1+1-\beta)x\frac{\partial}{\partial x} + \\ + (\sigma_2+1-\beta)y\frac{\partial}{\partial y} + 2u\frac{\partial}{\partial u}. \qquad (32)$$

Введенный параметр $t_0>0$ определяет интервал времени $[0, t_0)$, на котором существует решение (решение не существует в целом). Оператору (32) соответствует инвариантное решение

$$u(t, x, y) = (t_0-t)^{1/1-\beta}\tilde{u}(\xi, \eta), \qquad (33)$$

где

$$\xi = x(t_0-t)^{\frac{\sigma_1+1-\beta}{2(\beta-1)}}, \quad \eta = y(t_0-t)^{\frac{\sigma_2+1-\beta}{2(\beta-1)}}.$$

Подстановка (33) в уравнение (31) приводит к уравнению для функции $\tilde{u}(\xi, \eta)$:

$$(\tilde{u}^{\sigma_1}\tilde{u}_\xi)_\xi + (\tilde{u}^{\sigma_2}\tilde{u}_\eta)_\eta + \frac{\sigma_1+1-\beta}{2(\beta-1)}\xi\tilde{u}_\xi + \\ + \frac{\sigma_2+1-\beta}{2(\beta-1)}\eta\tilde{u}_\eta + \tilde{u}^\beta - \frac{1}{\beta-1}\tilde{u} = 0. \qquad (34)$$

В дальнейшем рассматриваются режимы с обострением, соответствующие случаю $\beta>1$. Из (33) легко следует зависимость направления распространения тепла от соотношения между параметрами β, σ_1, σ_2.

Уравнение (34) решалось численно с помощью двух методик: методом конечных элементов и конечноразностным методом (см. [4]). Предполагается, что распределение температуры в начальный и последующий моменты времени симметрично относительно осей Ox, Oy. Это позволяет рассматривать задачу лишь в одном квадранте плоскости (x, y).

Пусть

$$\Omega = \{(x, y),\ 0<x<a_1,\ 0<y<a_2\},$$
$$\Omega_1 = \{(x, y),\ 0\leqslant x\leqslant b_1,\ 0\leqslant y\leqslant b_2\},$$

где a_α, b_α, $\alpha=1,2$ — положительные константы, $b_\alpha<a_\alpha$.

Ищется функция $u(t, x, y)$, удовлетворяющая уравнению (31) в цилиндре $Q_T=\Omega\times(0, T]$, где $T=\text{const}$, $0<T<t_0$, начальному условию при $t=0$:

$$u(0, x, y) = u_0(x, y) = \begin{cases} 1, & (x, y)\in\Omega_1, \\ 0, & (x, y)\bar{\in}\Omega_1 \end{cases} \qquad (35)$$

и граничным условиям при $t>0$:

$$u=0, \text{ если } x=a_1 \text{ или } y=a_2, \\ \frac{\partial u}{\partial n}=0, \text{ если } x=0 \text{ или } y=0, \qquad (36)$$

(n — нормаль к границе области Ω).

Как видно из представления инвариантного решения (33), на характер распространения тепла влияет соотношение между величинами β, (σ_1+1) и (σ_2+1). Ниже рассматриваются два типа решений, которые мы по аналогии с одномерными режимами [45, 74] называем HS—S- и HS—LS-режимами. Приведенные результаты позволяют судить о качественных особенностях автомодельных режимов распространения тепла и при других параметрах среды, в частности, в LS—S-режиме, который мы поэтому не рассматриваем. Заметим также, что рассматриваемые постановки задач легко могут быть перенесены и на трехмерную анизотропную среду.

HS—S-режим. Задача (35)—(36) решалась при следующих параметрах:

$$\sigma_1=3,\ \sigma_2=2,\ \beta=\sigma_2+1=3.$$

В этом случае по направлению y распространения тепла не происходит (S-режим), а в направлении x за конечное время t_0 происходит распространение тепла до бесконечности (HS-режим).

На рис. 24 представлено численное решение $u(t, x, y)$ на различные моменты времени, на рис. 25 изображены его линии уровня. Видно, что носитель решения представляет собой выпуклую область. Время обострения, полученное в расчетах, равно $t_0=2{,}42389$, причем различие методик составляет менее 4%.

На рис. 26 а, б приведены результаты автомодельной обработки численного решения $u(t, x, y)$. Именно, вычислялась величина (см. (33))

$$\tilde{u}(\xi, \eta)=(t_0-t)^{-1/2}u(t, x, y),$$
$$x=(t_0-t)^{-1/4}\xi, \quad y\equiv\eta,$$

которая с течением времени $t\to t_0$ приближается к решению авто модельной задачи. Начиная с некоторого момента времени кривые $\tilde{u}(\xi, \eta)$ практически совпадают, что свидетельствует о выходе на автомодельный режим. Таким образом, численно получено решение эллиптического уравнения (34).

HS—LS-режим. Этот режим представляет собой наиболее парадоксальный способ прогрева анизотропной среды.

Задача (34)—(35) решалась при следующих параметрах: $\sigma_1=3$, $\sigma_2=1$, $\beta=3$. В этом случае инвариантное решение (33) описывает такое распространение тепла, при котором по на-
парадоксальный способ прогресса анизотропной среды.
бесконечности (HS-режим), а в направлении y происходит сокращение эффективной глубины прогрева (LS-режим), то есть интервал по оси y, где, например, $u\geqslant\frac{1}{2}u_{\max}$, стремится к нулю при $t\to t_0$. Таким образом, на финальной стадии решение (см. рис. 27) представляет собой бесконечно прогретую линию, вне

$$u_t = (u^3 u_x)_x + (u^2 u_y)_y + u^3$$

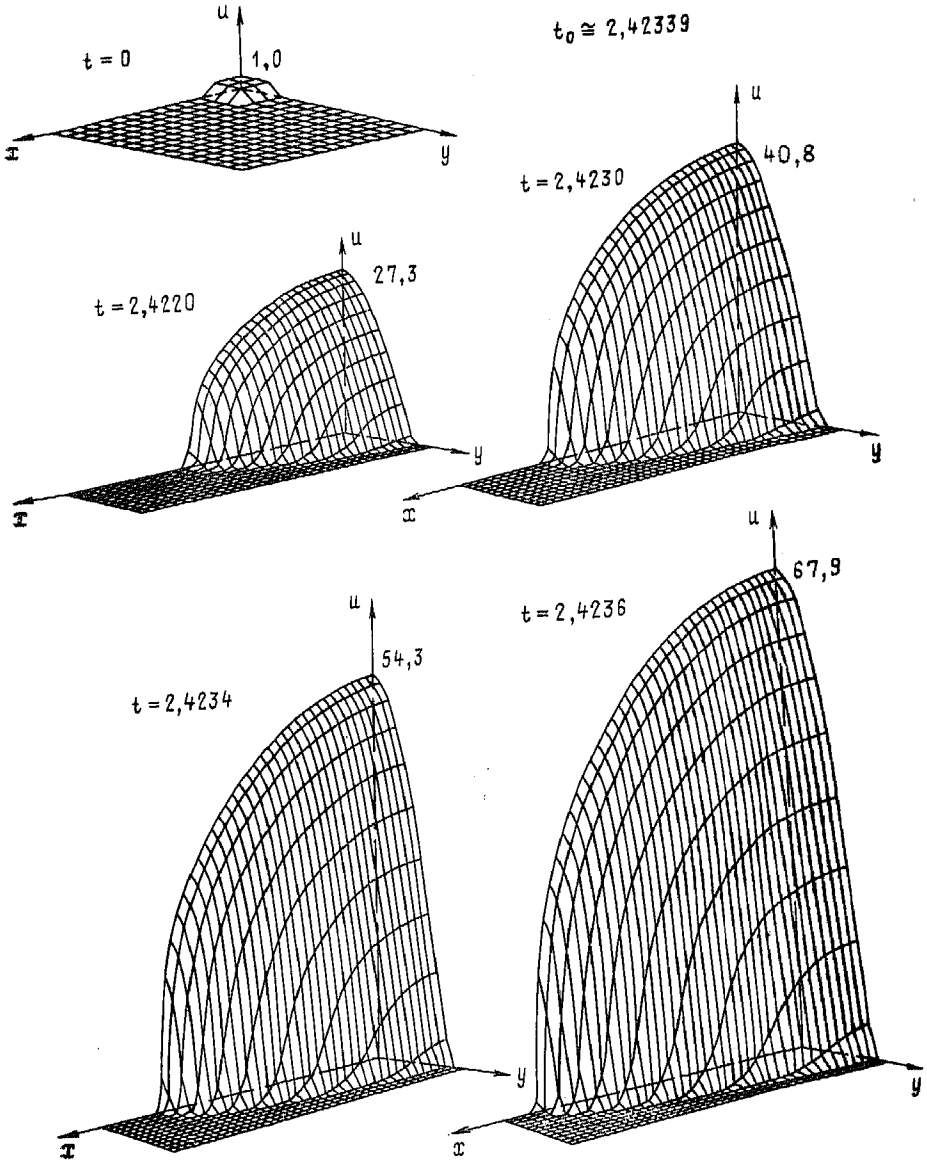

Рис. 24

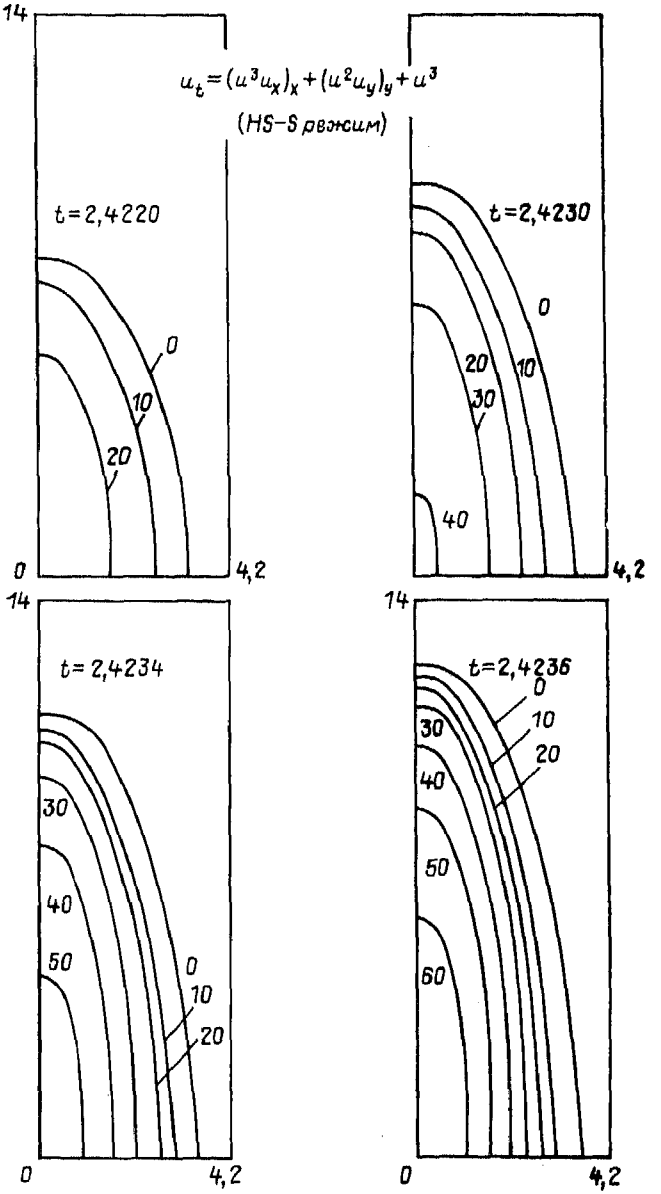
$u_t = (u^3 u_x)_x + (u^2 u_y)_y + u^3$
(HS-S движим)
t=2,4220
t=2,4230
t=2,4234
t=2,4236
14
0
4,2
0
10
20
30
40
50
60

Рис. 25

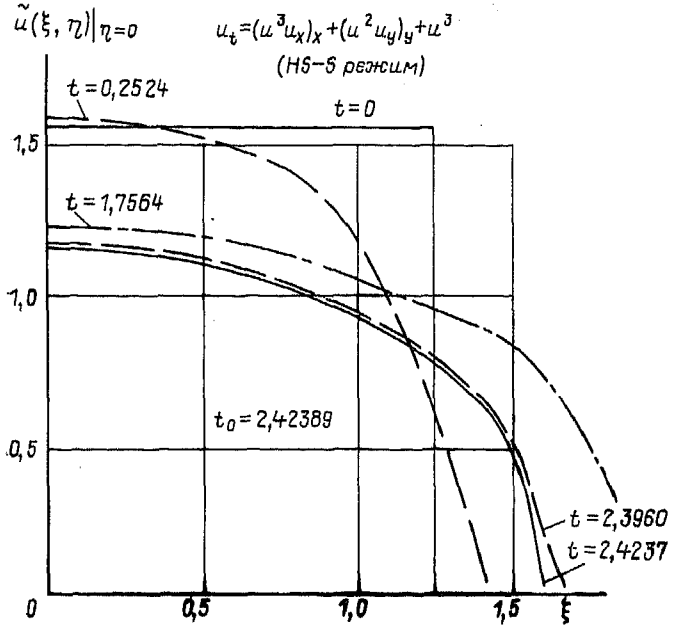

Рис. 26а

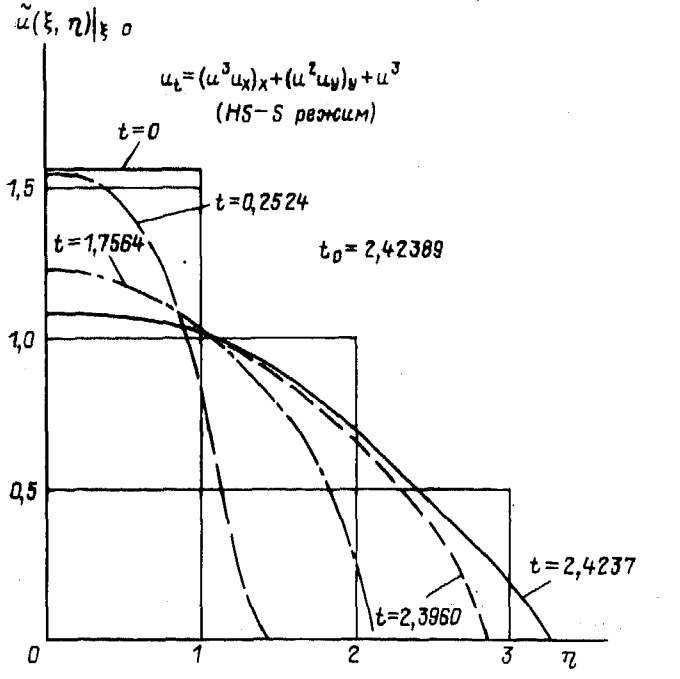

Рис. 26б

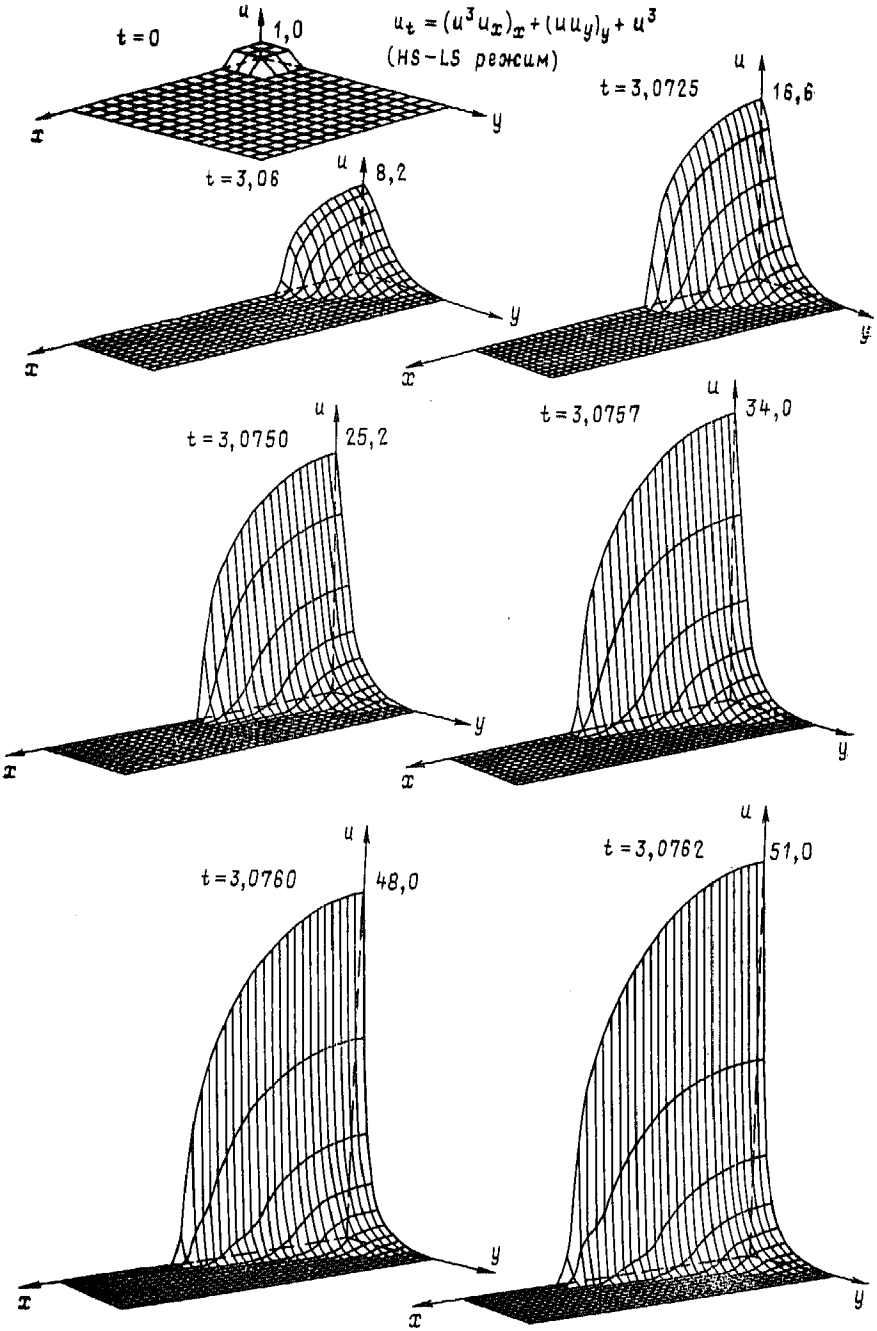
t = 0
u
1,0
$u_t = (u^3 u_x)_x + (u u_y)_y + u^3$
(HS-LS режим)
x
y
t = 3,06
u
8,2
x
y
t = 3,0725
u
16,6
x
y
t = 3,0750
u
25,2
x
y
t = 3,0757
u
34,0
x
y
t = 3,0760
u
48,0
x
y
t = 3,0762
u
51,0
x
y

Рис. 27

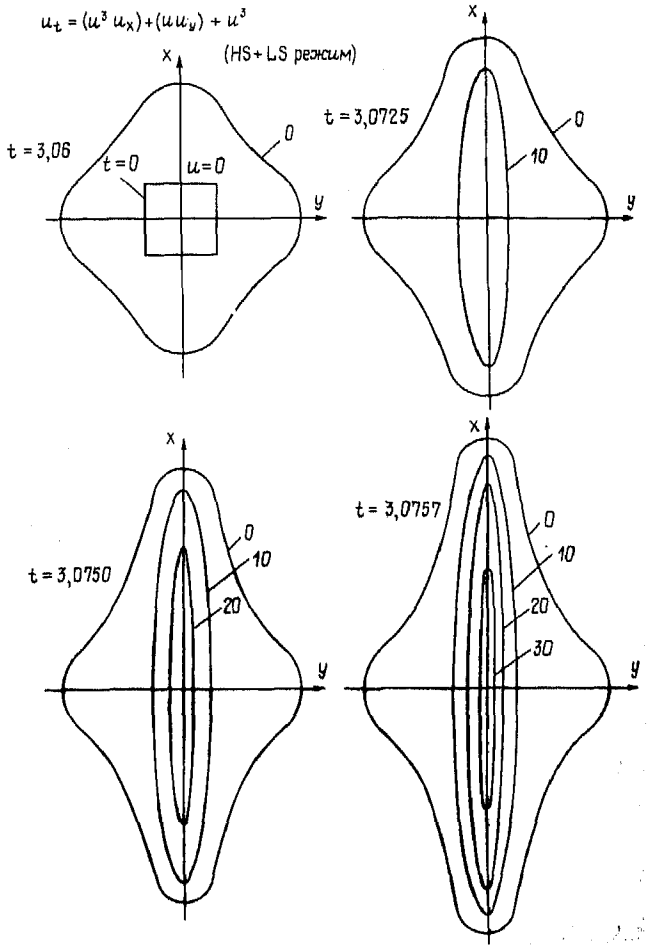

Рис. 28

которой температура конечна. Линии уровня решения изображены на рис. 28. Отметим характерную крестообразную форму носителя. Такая форма носителя определяется двумя процессами. Вдоль оси x идет ускоренное распространение тепла в HS-режиме, а вдоль оси Y решение стремится к автомодельному LS-режиму, при котором фронт тепла находится на бесконечности. Время обострения, полученное в расчете, равнялось $t_0 = 3{,}07660$.

На рис. 29*а*, *б* приведены результаты автомодельной обработки $u(t, x, y)$ при $x=0$ и $y=0$ соответственно. Функции $\tilde{u}(\xi, \eta)|_{x=0}$

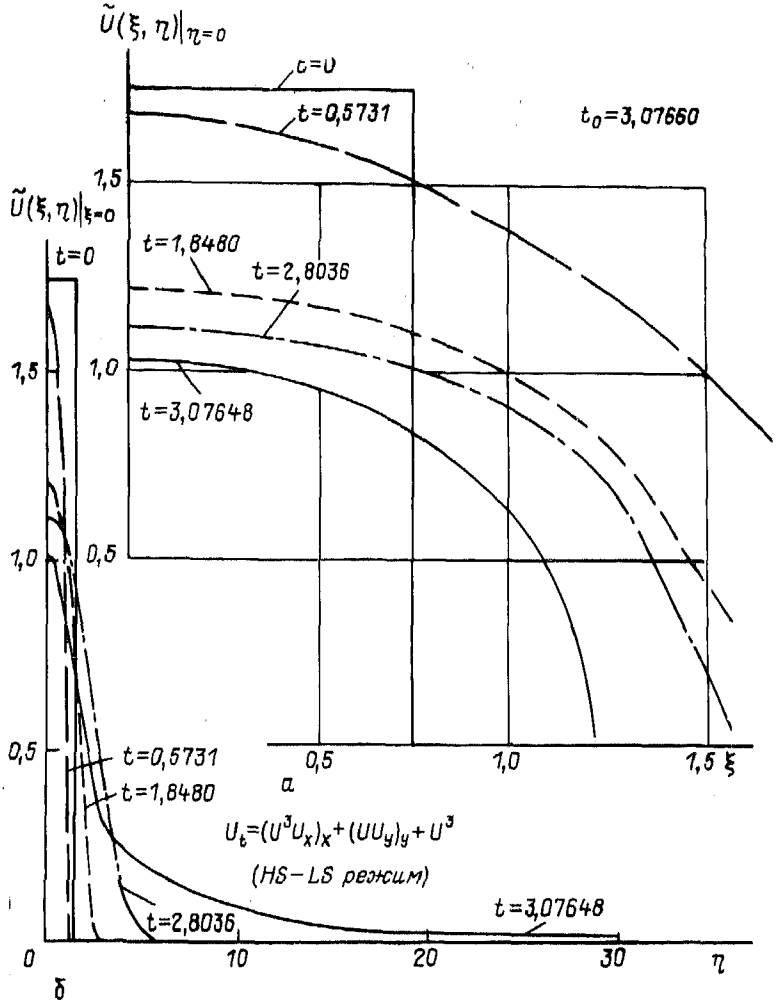

Рис. 29

и $\tilde{u}(\xi, \eta)|_{y=0}$ вычислялись по формулам (см. (33)):

$$\tilde{u}(\xi, \eta) = (t_0 - t)^{1/2} u(t, x, y),$$

$$x = \xi (t_0 - t)^{-1/4}, \quad y = \eta (t_0 - t)^{1/4}.$$

С течением времени функции $\tilde{u}(\xi, \eta)$ стремятся к решению эллиптического уравнения (34).

Заметим, что распространение тепла, подобное описанному выше, будет при любых σ_1, σ_2 и β, для которых выполнено соотношение $\sigma_1+1>\beta>\sigma_2+1$ (см. (33)). При этом анизотропия

$\sigma_1 > \sigma_2$ может быть сколь угодно мало выражена. Это приведет лишь к изменению скорости роста амплитуды и распространения фронта, качественные стороны процесса останутся теми же.

Подчеркнем, что в этом пункте, с одной стороны, проведено численное исследование эволюционной (структурной) устойчивости автомодельного решения (33) уравнения анизотропной нелинейной теплопроводности с источником (31). С другой стороны, построено численное решение $\tilde{u}(\xi, \eta)$ нелинейного эллиптического уравнения (34). Это представляет определенный интерес, поскольку пока не существует эффективных методов интегрирования таких уравнений. Построение указанного решения в принципе не может быть сделано путем прямого решения уравнения (34) методом установления, поскольку решение $u(\xi, \eta) \not\equiv 0$ в такой постановке неустойчиво (о теоретических методах исследования подобных задач см., например, [16, 87]).

2.5.2. Пример построения инвариантного решения на бесконечной группе. Неограниченный запас инвариантных решений порождается бесконечномерной группой. Рассмотрим двумерное уравнение теплопроводности

$$u_t = \Delta(\ln u) \equiv \left(\frac{u_x}{u}\right)_x + \left(\frac{u_y}{u}\right)_y, \tag{37}$$

которое допускает (см. таблицу 12) алгебру операторов

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial t}; \quad X_2 = t\frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial u}; \quad X_\infty = A\frac{\partial}{\partial x} + B\frac{\partial}{\partial y} - 2A_x u\frac{\partial}{\partial u},$$

где $A(x, y)$, $B(x, y)$ — произвольное решение системы Коши—Римана

$$A_x = B_y, \; A_y = -B_x. \tag{38}$$

Решение системы (38) можно записать в виде $A + iB = \Phi(x + iy)$, где Φ — произвольная дифференцируемая функция.

В качестве примера рассмотрим $\Phi(x + iy) = e^{x+iy}$, тогда $A = e^x \cos y$, $B = e^x \sin y$, $A_x = e^x \cos y$, и оператор X_∞ принимает конкретный вид

$$\overline{X}_\infty = e^x \cos y \frac{\partial}{\partial x} + e^x \sin y \frac{\partial}{\partial y} + 2ue^x \cos y \frac{\partial}{\partial u}.$$

Чтобы построить инвариантное решение уравнения (37) первого ранга, нужно рассмотреть двумерную подалгебру. Рассмотрим алгебру $\langle X_2, \overline{X}_\infty \rangle$, полный набор инвариантов которой может быть выбран таким:

$$I_1 = u\frac{e^{2x}}{t}, \quad I_2 = \frac{e^x}{\sin y}.$$

Инвариантное решение ищем в виде

$$u(t, x, y) = t\frac{\tilde{u}(\lambda)}{e^{2x}}, \quad \lambda = \frac{e^x}{\sin y},$$

где функция $\tilde{u}(\lambda)$ определяется обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\lambda^4 (\tilde{u}\tilde{u}_{\lambda\lambda} - \tilde{u}_\lambda^2) + 2\lambda^3 \tilde{u}\tilde{u}_\lambda - \tilde{u}^3 = 0. \tag{39}$$

Сделав в (39) замену переменных $\tilde{u}(\lambda) = e^{\hat{u}(\lambda)}$, получим уравнение

$$\lambda \hat{u}_{\lambda\lambda} + 2\lambda^3 \hat{u}_\lambda = e^{\hat{u}},$$

которое с помощью замены $\hat{u}(\lambda) = y(x)$, $\lambda = \frac{1}{x}$, переходит в уравнение $y'' = e^y$, общее решение которого известно [53] (метод его интегрирования также основан на группе преобразований, которую оно допускает). В результате искомое инвариантное решение представимо в виде трех семейств:

$$u(x, y, t) = \frac{2t}{(\sin y + c_2 e^x)^2},$$

$$u(x, y, t) = \frac{2c_1^2 t e^{c_1(e^{-x} \sin y + c_2)}}{e^{2x}(1 - e^{c_1(e^{-x} \sin y + c_2)})^2},$$

$$u(x, y, t) = \frac{c_1^2 t}{2e^{2x}} \left[\operatorname{tg}^2 \left(\frac{c_1}{2} \left(\frac{\sin y}{e^x} + c_2 \right) \right) + 1 \right],$$

где c_1, c_2 — произвольные постоянные.

2.5.3. «Спиральные волны» в нелинейной теплопроводной среде. Рассмотрим инвариантное решение, описывающее спиральное распространение неоднородностей в нелинейной среде, построенное в диссертации С. Р. Свирщевского. Уравнение

$$u_t = (u^\sigma u_x)_x + (u^\sigma u_y)_y + u^\beta, \quad \beta > 1, \tag{40}$$

допускает (см. таблицу 8), в частности, операторы

$$X_1 = y \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial y},$$

$$X_2 = (1 - \beta) t \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\sigma + 1 - \beta}{2} \left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} \right) + u \frac{\partial}{\partial u}.$$

Запишем уравнение (40) и оператор $X = c_0 X_1 + X_2$ в полярных координатах

$$u_t = \frac{1}{\sigma + 1} \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u^{\sigma+1}}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u^{\sigma+1}}{\partial \varphi^2} \right) \right\} + u^\beta, \tag{41}$$

$$X = (1 - \beta)(t_0 - t) \frac{\partial}{\partial (t_0 - t)} + \frac{\sigma + 1 - \beta}{2} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) +$$

$$+ u \frac{\partial}{\partial u} + (1 - \beta) c_0 \frac{\partial}{\partial \varphi}, \tag{42}$$

где c_0 и t_0 — постоянные, $t_0>0$. Исходя из полного набора инвариантов оператора (42):

$$I_1=r(t_0-t)^{\frac{\beta-\sigma-1}{2(1-\beta)}};\quad I_2=\varphi-c_0\ln(t_0-t);\quad I_3=u(t_0-t)^{-1/1-\beta};$$

ищем инвариантное относительно X решение уравнения (41) в виде

$$u(t,r,\varphi)=(t_0-t)^{\frac{1}{1-\beta}}\tilde{u}(R,\Phi),\tag{43}$$

$$R=r(t_0-t)^{\frac{\beta-\sigma-1}{2(1-\beta)}},\quad \Phi=\varphi-c_0\ln(t_0-t).$$

Функция $\tilde{u}(R,\Phi)$ определяется уравнением:

$$\frac{1}{\sigma+1}\left\{\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial R}\left(R\frac{\partial\tilde{u}^{\sigma+1}}{\partial R}\right)+\frac{1}{R^2}\frac{\partial^2\tilde{u}^{\sigma+1}}{\partial\Phi^2}\right\}=$$

$$=\frac{\beta-\sigma-1}{2}R\frac{\partial\tilde{u}}{\partial R}-c_0\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\Phi}+\tilde{u}-\tilde{u}^{\beta}.\tag{44}$$

Легко заметить, что инвариантное решение (43)—(44) описывает распространение неоднородностей поля температуры (локальные максимумы, слабые разрывы и т. д.) вдоль логарифмической спирали. На рис. 30 схематично изображены траектории

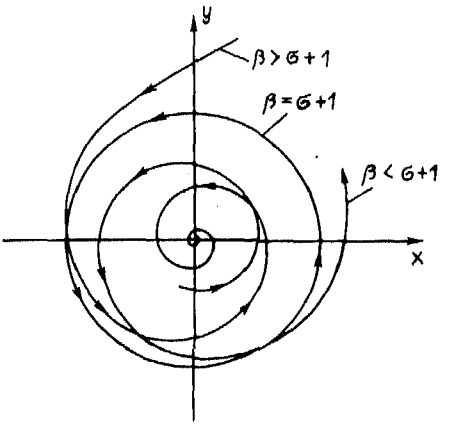

Рис. 30

таких неоднородностей: при $\beta<\sigma+1$ — раскручивающиеся спирали, при $\beta>\sigma+1$ — скручивающиеся, при $\beta=\sigma+1$ — окружности. Стрелки указывают направление движения неоднородностей с ростом t ($c_0>0$). Заметим, что рост u так же, как и движение неоднородностей по спиралям, происходит в режиме с обострением.

В трехмерном случае можно построить аналогичные решения, описывающие распространение неоднородностей u вдоль спиралей, намотанных на поверхности конусов с вершиной в начале

координат [74]. Численная реализация инвариантного решения (43) наталкивается на большие трудности. В работе [60] численно реализован случай $c_0=0$ решения (43), описывающий эволюцию сложной «архитектуры» неоднородностей u в режиме с обострением.

2.6. Линеаризация и другие вопросы. Уравнения теплопроводности, допускающие бесконечную группу преобразований, занимают особое место. Наличие бесконечной цепочки преобразований, оставляющих уравнение без изменения, позволяет строить соответствующую цепочку решений, инвариантных относительно группы Ли—Бэклунда. Однако главное свойство таких уравнений связано с возможностью их линеаризации. Наличие бесконечной группы Ли—Бэклунда (точнее, автоморфность уравнения) является необходимым условием наличия (неточечного) преобразования переводящего его в линейное уравнение [48]. Хотя достаточные условия линеаризуемости не получены для всех уравнений теплопроводности, допускающих нетривиальную группу Ли—Бэклунда, удается найти линеаризующее преобразование. Наличие линеаризующих замен позволяет строить решения нелинейного уравнения, исходя из решений линейного: применять принцип суперпозиций решений и т. д.

2.6.1. Уравнение

$$u_t=(u^{-2}u_x)_x, \tag{45}$$

допускающее бесконечную цепочку преобразований Ли—Бэклунда [89], линеаризуется с помощью замены (см. [105]):

$$u(t,\ x)=(v_y)^{-1},\quad x=v(\bar t,\ y),\quad \bar t=t. \tag{46}$$

Действительно, из (46) следует

$$\frac{\partial}{\partial x}=(v_y)^{-1}\frac{\partial}{\partial y},\quad \frac{\partial}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial \bar t}-v_{\bar t}(v_y)^1\ \frac{\partial}{\partial y},$$

поэтому (46) переводит (45) в уравнение

$$v_y^{-1}\frac{\partial}{\partial y}\left(v_y\frac{\partial}{\partial y}(v_y^{-1})\right)=D_y\left[\frac{1}{v_y}(v_{\bar t}-v_{yy})\right]=0,$$

или

$$v_{\bar t}=v_{yy}+f(\bar t)\,v_y,$$

где f — произвольная функция $\bar t$. Следовательно, преобразование (46) переводит всякое решение уравнения

$$v_{\bar t}=v_{yy} \tag{47}$$

в решение уравнения (45).

2.6.2. Уравнение

$$u_t=(u^{-2}u_x)_x+b,\quad b=\text{const}, \tag{48}$$

с помощью преобразования (см. [36])

$$u(t, x) = -\frac{b}{2}\left(\frac{v_y}{v}\right)_y^{-1}, \qquad (49)$$

$$x = -\frac{2}{b}\left(\frac{v_y}{v}\right), \quad t = \bar{t},$$

переходит в уравнение

$$D_y\left[\left(\frac{v_y}{v}\right)_y\right]^{-1} D_y\left[\frac{1}{v}(v_{\bar{t}} - v_{yy})\right] = 0.$$

Таким образом, всякое решение уравнения (47) преобразованием (49) переводится в решение уравнения (48).

2.6.3. Уравнение теплопроводности в неоднородной среде, допускающее нетривиальную группу Ли—Бэклунда. В работе [76] решена более широкая классификационная задача — выделены уравнения теплопроводности

$$u_t = (k(x, u)u_x)_x + Q(x, u),$$

допускающие нетривиальную группу Ли—Бэклунда. Показано, что нетривиальные преобразования Ли—Бэклунда допускаются линейным уравнением в неоднородной среде ($k_u' = 0$, $Q_{uu}'' = 0$) и нелинейным уравнением

$$u_t = (ku^{-2}u_x)_x + au + b\sqrt{k} - \sqrt{k}(\sqrt{k})_{xx}u^{-1}, \qquad (50)$$

где $k(x)$ — произвольная функция x, a и b — постоянные, $ab = 0$. Уравнение (50) с помощью замены

$$u \to \sqrt{k(x)}\,u \qquad (51)$$

сводится к уравнению

$$u_t = (u^{-2}u_x)_x + au + b, \quad ab = 0,$$

и сследованному выше.

В работе [119] рассмотрен частный случай уравнения (50) при $a = b = 0$, $k = (\lambda x + \mu)^2$:

$$u_t = \left[\left(\frac{\lambda x + \mu}{\alpha u + \beta}\right)^2 u_x\right]_x.$$

Последнее уравнение с помощью (точечной) замены

$$x \to \frac{1}{\gamma}\ln|\lambda x + \mu|, \quad t \to \frac{\lambda^2}{\gamma}t,$$

преобразуется в уравнение

$$u_t = ((\alpha u + \beta)^{-2}u_x)_x + \gamma(\alpha u + \beta)^{-2}u_x,$$

возникающее в некоторых задачах пористых сред, рассмотренное в [91].

Новые уравнения, линеаризуемые преобразованиями Бэклун-

да, получены в [74], где рассмотрена более сложная модель теплопроводности — гиперболического типа.

На рис. 31 изображена схема связей решений рассматриваемых уравнений, где помимо перечисленных выше, даны еще следующие преобразования:

$$\bar{u}(\bar{t}, \bar{x}) = ue^{-at}, \quad \bar{t} = -\frac{1}{2a} e^{-2at}, \quad \bar{x} = x; \tag{52}$$

$$W(y, t) = \frac{2}{\bar{u}\bar{x}}, \quad y = D_{\bar{x}}^{-1}\bar{u}, \quad t = \bar{t}; \tag{53}$$

$$W(y, t) = 2v_y / v; \tag{54}$$

$$u(t, x) = -bW_y^{-1}, \quad x = -\frac{1}{b} W(y, t); \tag{55}$$

$$u(t, x) = -\frac{b}{2} [\bar{u}^{-1} D_{\bar{x}} (\bar{u}\bar{x})^{-1}]^{-1}, \tag{56}$$

$$x = -\frac{2}{b\bar{x}\bar{u}}, \quad t = \bar{t}.$$

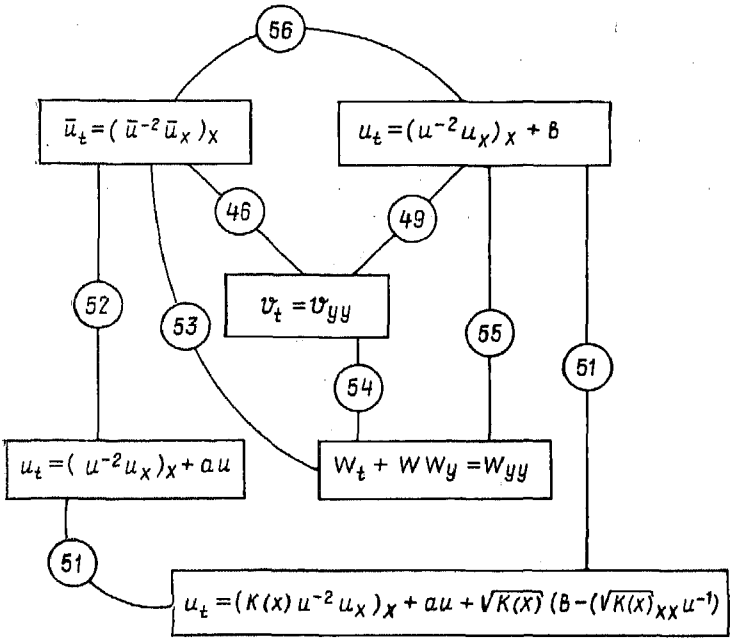

Рис. 31

2.6.4. Инвариантные решения. Пусть эволюционное уравнение

$$u_t = F(u, u_1, \ldots, u_m),$$

допускает нетривиальную группу Ли — Бэклунда, определенную оператором

$$X = U(x, u, u_1, \ldots, u_n)\frac{\partial}{\partial u} + \ldots. \tag{57}$$

Тогда решение $u = f(x, t)$, инвариантное относительно соответствующих преобразований, определяется соотношением

$$U(x, u, u_1, \ldots, u_n)|_{u=f(x,t)} = 0.$$

Иначе говоря, для отыскания инвариантных решений нужно решать систему уравнений

$$\begin{gathered} u_t = F(u, u_1, \ldots, u_m), \\ U(x, u, u_1, \ldots, u_n) = 0, \end{gathered} \tag{58}$$

из которых второе является обыкновенным дифференциальным уравнением. При возрастании n приходится решать дифференциальное уравнение все более высокого порядка. Поскольку это уравнение, как правило, нелинейное, то обычно ограничиваются лишь небольшим количеством решений в цепочке, задаваемой с помощью рекурренции для U (см., например, [89]). Тем не менее, задачу решения (58) можно значительно упростить (см. [36]), если использовать линеаризующую замену.

Рассмотрим уравнение

$$u_t = (u^{-2}u_x)_x + b, \tag{59}$$

которое допускает операторы (57), для которых

$$U = \sum_{i=1}^{n} c_i V_i + c_0 V_0 + c^1 V^1 + c^2 V^2,$$

где $n = 1, 2, \ldots$, c_0, c^1, c^2, c_i — постоянные;

$$U_0 = (u^{-2}u_x)_x + b, \quad U^1 = u_x, \quad U^2 = 2u + xu_x - \\ -2t(u^{-2}u_x)_x - 2bt$$

соответствуют точечным преобразованиям (найденным в [31]), а U_i имеют вид

$$U_i = -D_x^2\left(u^{-1}D_x - \frac{b}{2}x\right)^{i+1}(x), \quad i = 1, 2, \ldots.$$

Решения уравнения (59), инвариантные относительно группы с $U = \sum_{i=0}^{n} c_i U_i$, определяются уравнением

$$D_x^2 \sum_{i=0}^{n} c_i \left(u^{-1}D_x - \frac{b}{2}x\right)^{i+1}(x) = 0. \tag{60}$$

Применяя к (60) линеаризующую замену (49), получаем линейную систему. В результате ее решения получается, что вся совокупность решений, инвариантных относительно преобразований Ли—Бэклунда, задается параметрически в следующем виде:

$$u(t, x) = -\frac{b}{2}\left(\frac{v_y}{v}\right)_y^{-1}, \quad x = -\frac{2}{b}\frac{v_y}{v},$$

где

$$v = \sum_{l=1}^{r}\sum_{j=0}^{k_l} e^{\lambda_l y + \lambda_l^2 t} y^{k_l - j} A_{l(k_l-j)},$$

$$A_{l(k_l-j)} = \sum_{s=0}^{j} B_{k_l-s}\frac{(k_l-s)!}{(k_l-j)!}\sum_{i=0}^{\left[\frac{j-s}{2}\right]}(2\lambda_l)^{j-s-2i}c_{j-s-2i}^{i}\frac{t^{j-s-i}}{(j-s-i)!}, \tag{61}$$

B_{k_l-s} $(s=0,\ldots,k_l)$ — произвольные постоянные, $[\ldots]$ — целая часть числа, c_m^n — число сочетаний из m по n, λ_l $(l=1,\ldots,r)$ — попарно неравные комплексные числа.

На анализе инвариантных решений (61) уравнения (59) мы останавливаться не будем, поскольку для (59) нельзя поставить рассматриваемых здесь краевых задач.

2.6.5. Для уравнений теплопроводности, допускающих бесконечную серию преобразований Ли—Бэклунда, нельзя построить соответствующую цепочку законов сохранения (как это имеет место, например, для уравнения КдФ). Под законом сохранения понимается существование вектора (g, h), удовлетворяющего условию

$$D_t g + D_x h = 0,$$

на решениях соответствующего уравнения теплопроводности. Функции g и h зависят от $t, x, u, u_1, \ldots, u_n$; g называется плотностью закона сохранения.

Выше было показано, что уравнение

$$u_t = (u^{-2}u_x)_x + b \tag{62}$$

допускает группу Ли—Бэклунда, для которой определяющее уравнение

$$D_t U - D_x^2(u^{-2}U) = 0$$

имеет последовательность решений

$$U_k = -D_x^2\left(u^{-1}D_x - \frac{b}{2}x\right)^{k+1}(x), \quad k = 1, 2, \ldots.$$

Следовательно, уравнение (62) формально имеет бесконечную серию законов сохранения вида

$$D_t U_k + D_x(-D_x u^{-2} U_k) = 0, \; k = 1, 2, \ldots$$

Однако, в силу (63), эти законы сохранения представляются в виде

$$D_x^2\left[D_t\left(u^{-1}D_x-\frac{b}{2}x\right)^{k+1}(x)+u^{-2}U_k\right]=0$$

и являются тривиальными в том смысле, что имеют плотность, равную нулю.

Такая ситуация имеет общий характер при рассмотрении эволюционных уравнений, имеющих четный порядок по старшей производной (и в этом заключается одно из их отличий от уровней с нечетной старшей производной).

Известно (см. [54]), что если g — плотность закона сохранения для эволюционного уравнения

$$u_t=F(u, u_1, \ldots, u_m), \tag{64}$$

то функция $f=\frac{\delta}{\delta u}g\equiv\sum_{k\geqslant 0}(-D_x)^k\frac{\partial}{\partial u_k}g$ удовлетворяет уравнению

$$D_t f+\sum_{k=0}^{\infty}(-D_x)^k\left(f\frac{\partial F}{\partial u_k}\right)=0 \tag{65}$$

(формально сопряженному определяющему уравнению группы Ли—Бэклунда), и, наоборот, если f решение уравнения (65) и $f=\frac{\delta}{\delta u}g$, то g — плотность закона сохранения. Из этой теоремы (см. [54]) следует, что в случае $m=2k$ уравнение (64) не может иметь законов сохранения, плотности которых зависят от u_s, $s>k$.

Поэтому в случае уравнения

$$u_t=(k(u)u_x)_x+Q(u) \tag{66}$$

можно найти решения f определяющего уравнения (65), которые зависят лишь от t, x, u, u_1, u_2. Анализ уравнения (65), показывает, что в этом случае $f_u=f_{u_1}=f_{u_2}=0$, то есть $f=f(t, x)$ и (65) имеет вид

$$f_t+kf_{xx}+Q'f=0, \tag{67}$$

при этом

$$g=f(t, x)u. \tag{68}$$

Из уравнения (67) следует, что (66) имеет нетривиальные законы сохранения лишь в двух случаях:

1) $k=\text{const}$, $Q=au+b$; a, b — постоянные. Плотность g закона сохранения имеет вид (68), причем f есть любое решение уравнения

$$f_t+kf_{xx}+af=0;$$

2) $k\neq\text{const}$, $Q'=ak+b$; a, b — постоянные, g имеет вид (68), где

$$f=\begin{cases}e^{-bt}(c_1e^{i\sqrt{a}x}+c_2e^{-i\sqrt{a}x}), & a\neq 0,\\ e^{-bt}(c_1x+c_2), & a=0,\end{cases}$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

§ 3. Квазилинейное уравнение $u_t = \nabla(u^\sigma \nabla u) + u^\beta$: неограниченные решения, локализация, асимптотическое поведение

Данный параграф посвящен исследованию неограниченных решений задачи Коши для квазилинейного уравнения со степенными нелинейностями

$$u_t = \nabla(u^\sigma \nabla u) + u^\beta, \quad t > 0, \quad x \in \mathbf{R}^N; \quad \sigma > 0, \quad \beta > 1; \tag{1}$$

$$u(0, x) = u_0(x) \geqslant 0, \quad x \in \mathbf{R}^N; \quad \sup u_0 < +\infty. \tag{2}$$

Начальную функцию u_0 будем, как правило, считать финитной, причем $u_0^{\sigma+1} \in C^1(\mathbf{R}^N)$. Тогда, поскольку вырождающееся уравнение (1) описывает процессы с конечной скоростью распространения возмущений, при всех допустимых $t > 0$ решение $u = u(t, x) \geqslant 0$ также будет финитным по x.

Ниже дается обоснование многих качественных результатов § 1. Предварительно мы введем ряд понятий и определений, смысл которых подробно обсуждался в предыдущих параграфах.

Главное внимание будет уделено исследованию *неограниченных решений* задачи (1), (2), определенных на конечном промежутке времени $t \in [0, T_0)$, причем

$$\overline{\lim_{t \to T_0^-}} \sup_{x \in \mathbf{R}^N} u(t, x) = +\infty. \tag{3}$$

При этом точку $x = x_0 \in \mathbf{R}^N$, в которой происходит неограниченное возрастание решения при $t \to T_0^-$, будем называть *точкой сингулярности* или *точкой обострения*, если существует такая последовательность $t_k \in [0, T_0)$, $t_k \to T_0^-$ при $k \to +\infty$, что

$$u(t_k, x_0) \to +\infty, \quad k \to +\infty. \tag{4}$$

Величина $T_0 = T_0(u_0) \in \mathbf{R}_+^1$, которая, естественно, зависит от начальной функции $u_0 \not\equiv 0$, называется *временем обострения* неограниченного решения.

Значительная часть этого и следующего параграфа посвящена изучению *эффекта локализации режимов с обострением*, который при определенных значениях параметров могут проявлять неограниченные решения задачи (1), (2) (см. § 1).

Определение 1. Пусть $u_0(x)$ — финитная функция. Неограниченное решение задачи (1), (2) называется *локализованным* (в строгом смысле), если множество (*область локализации*)

$$\Omega_L = \{x \in \mathbf{R}^N \mid u(T_0^-, x) > 0\} \tag{5}$$

является ограниченным в $\mathbf{R}^N$. Если же Ω_L неограничено (например, $\Omega_L = \mathbf{R}^N$), то *локализация отсутствует*.

Ограниченность Ω_L означает, что $u \equiv 0$ в $[0, T_0) \times \{\mathbf{R}^N \setminus \Omega_L\}$; это вытекает из общих свойств решений параболического уравнения с источником. Следующее определение является более общим, оно имеет смысл в случае произвольных уравнений и любых нефинитных начальных функций.

Определение 2. Неограниченное решение задачи (1), (2) называется *эффективно локализованным*, если множество (*область эффективной локализации*)

$$\omega_L = \{x \in \mathbf{R}^N \mid u(T_0^-, x) = +\infty\} \tag{6}$$

ограничено. Если же ω_L неограничено, то *эффективная локализация отсутствует*.

В обоих определениях $u(T_0^-, x) = \overline{\lim\limits_{t \to T_0^-}} u(t, x)$,

Очевидно, что $\omega_L \subseteq \Omega_L$. В дальнейшем слово «эффективный» из второго определения мы будем, как правило, опускать. Введение множества (6) позволяет классифицировать локализованные решения следующим образом: локализация в S-режиме, если $\operatorname{mes} \omega_L > 0$, и в LS-режиме, когда $\operatorname{mes} \omega_L = 0$. В последнем случае решение $u(t, x)$ может возрастать до бесконечности при $t \to T_0^-$ лишь в одной сингулярной точке, а в остальных ограничено сверху равномерно по $t \in (0, T_0)$.

Укажем основные требования, которые накладываются на решение задачи (1), (2):

1) в любой области вида $(0, T_0 - \tau) \times \mathbf{R}^N$ существует единственное ограниченное неотрицательное обобщенное решение задачи (1), (2), $u^{\sigma+1} \in L^\infty(0, T; H_0^1(\mathbf{R}^N))$, $(u^{1+\sigma/2})_t \in L^2(0, T; L^2(\mathbf{R}^N))$, $u^{1+\sigma/2} \in L^\infty(0, T; L^2(\mathbf{R}^N))$, $T = T_0 - \tau$ (см. различные способы анализа свойств обобщенных решений в [9, 11, 37, 51, 55, 63, 68, 84, 114, 124, 125]);

2) решения удовлетворяют теореме сравнения по начальным функциям: если $u^{(\nu)}$, $\nu = 1, 2$, — два решения, отвечающие различным начальным функциям $u^{(\nu)}(0, x) = u_0^{(\nu)}(x) \geqslant 0$ и $u_0^{(2)} \geqslant u_0^{(1)}$ в $\mathbf{R}^N$, то $u^{(2)} \geqslant u^{(1)}$ в $(0, T_0) \times \mathbf{R}^N$, $T_0 = \min\{T_0^{(1)}, T_0^{(2)}\}$ (см., например, [51, 55, 68, 84, 88]);

3) функция $\nabla u^{\sigma+1}(t, x)$ непрерывна по x в $\mathbf{R}^N$ при каждом фиксированном $t \in (0, T_0)$, см. [50, 55, 82, 90, 110]);

4) решение $u = u(t, x) \geqslant 0$ в случае финитной начальной функции u_0 является финитным по x при любом $t \in (0, T_0)$ (это устанавливается путем сравнения $u(t, x)$ в смысле 2) с финитными автомодельными решениями, построенными, например, в [12]);

5) при выводе отдельных результатов мы будем использовать также тот факт, что обобщенное решение в $(0, T_0 - \tau) \times \mathbf{R}^N$ может быть получено, как предел монотонно убывающей по-

следовательности классических строго положительных решений того же уравнения, на каждом из которых оно равномерно параболично; см. [51, 55, 68, 114] (отметим, что отсюда вытекает справедливость 2)—4));

6) без ограничения общности, в ряде мы также будем считать, что всюду в $P[u]=\{(t, x)\in(0, T_0)\times\mathbf{R}^N \mid u(t, x)>0\}$ решение является классическим: $u\in C^{1,2}(P[u])$, и не имеет необходимой гладкости лишь на поверхности вырождения $S[u]=\bar{P}[u]\setminus P[u]\setminus\{t=0,\ x\in\mathbf{R}^N\}$ [51, 55, 68].

Другие естественные ограничения будут формулироваться по ходу изложения.

3.1. Условия возникновения неограниченных решений. Весьма полный анализ условий неограниченности решения задачи (1), (2) проводится с помощью построения неограниченных нижних решений уравнения (1). Для этого нам понадобится следующее утверждение, где через $\mathbf{A}(v)$ обозначен оператор $\mathbf{A}(v)=v_t-\nabla(v^\sigma\nabla v)-v^\beta$, $v=v(t, x)\geqslant 0$ и через D_T — область $(0, T)\times\{x\in\mathbf{R}^N \mid |x|<\zeta(t)\}$, $\zeta\in C([0, T))$ — некоторая неотрицательная функция; $Q_T=(0, T)\times\mathbf{R}^N$.

Предложение. Пусть $u: Q_T\to[0, +\infty)$ — решение задачи Коши (1), (2) и функции $u_\mp: Q_T\to[0, +\infty)$, $u_\mp\in C^{1,2}(D_T)\cap C(\bar{D}_T)$, $u_\mp=0$ в $Q_T\setminus D_T$ удовлетворяют в D_T неравенствам $\mathbf{A}(u_-)\leqslant 0$, $\mathbf{A}(u_+)\geqslant 0$. Пусть $\nabla u_\pm^{\sigma+1}\in C(\mathbf{R}^N)$ при всех $t\in(0, T)$ и, кроме того, $u_-(0, x)\leqslant u_0(x)\leqslant u_+(0, x)$ в $\mathbf{R}^N$. Тогда $u_-\leqslant u\leqslant u_+$ в $(0, T)\times\mathbf{R}^N$.

Функции u_- и u_+ называются соответственно, *нижним* и *верхним* решениями задачи (1), (2). По поводу доказательства см., например, [51, 52, 55, 88].

3.1.1. Построение неограниченных нижних решений. Нижнее решение задачи (1), (2) будем искать в автомодельном виде

$$u_-(t, x)=(T-t)^{-1/(\beta-1)}\theta_-(\xi),\quad \xi=|x|/\zeta^*(t), \tag{7}$$

где $\zeta^*(t)=(T-t)^m$, $m=[\beta-(\sigma+1)]/2(\beta-1)$. Тогда неравенство $\mathbf{A}(u_-)\leqslant 0$ в D_T будет эквивалентно такому обыкновенному дифференциальному неравенству:

$$\frac{1}{\xi^{N-1}}(\xi^{N-1}\theta_-^\sigma\theta_-')'-m\theta_-'\xi-\frac{1}{\beta-1}\theta_-+\theta_-^\beta\geqslant 0. \tag{8}$$

Полагая $\theta_-(\xi)=A(1-\xi^2/a^2)_+^{1/\sigma}$, где A, a — положительные постоянные (отметим, что $\nabla_\xi\theta_-^{\sigma+1}\in C(\mathbf{R}^N)$) приводим (8) к следующему виду:

$$m-n\Delta+A^{\beta-1}\Delta^{\frac{\beta-1}{\sigma}+1}\geqslant 0,\quad \Delta=(1-\xi^2/a^2)_+\in[0, 1], \tag{9}$$

где

$$m=\frac{4A^{\sigma}}{\sigma^2a^2}+\frac{\beta-(\sigma+1)}{(\beta-1)\sigma},\quad n=\frac{1}{\sigma}\left[1+\frac{2A^{\sigma}}{a^2}\left(N+\frac{2}{\sigma}\right)\right]. \tag{10}$$

Без труда выводятся условия справедливости (9) и тем самым следующее утверждение [19].

Теорема 1. Пусть в задаче (1), (2) $u_0(x)$ такова, что

$$u_0(x)\geqslant u_-(0,x)\equiv T^{-1/(\beta-1)}\theta_-\left(\frac{|x|}{T^m}\right),\quad x\in\mathbf{R}^N, \tag{11}$$

где $\theta_-(\xi)=A(1-\xi^2/a^2)_+^{1/\sigma}$ и T, a, A — положительные постоянные, две последние из которых связаны неравенствами

$$m>0,\quad A^{\beta-1}\geqslant(n-m)(m/n)^{-[\beta+\sigma-1]/\sigma}. \tag{12}$$

Тогда решение задачи (1), (2) существует в течение конечного времени $T_0=T_0(u_0)\leqslant T$.

Легко убедиться, что система (12) разрешима относительно a, A при любых значениях $\sigma>0$ и $\beta>1$. Элементарный анализ нижнего решения (7) показывает, что при $\beta\in(1,\sigma+1)$ всякое решение задачи (1), (2) при $u_0\not\equiv0$ является неограниченным. Ниже будет доказан более сильный результат.

3.1.2. Отсутствие нетривиальных глобальных решений при $1<\beta<\sigma+1+2/N$.

Теорема 2. Пусть $\beta\in(1,\sigma+1+2/N)$, $u_0\not\equiv0$. Тогда решение задачи Коши неограничено.

Доказательство теоремы основано на сравнении $u(t,x)$ с известным автомодельным решением уравнения без источника

$$v_t=\nabla(v^{\sigma}\nabla v),\quad t>0,\quad x\in\mathbf{R}^N. \tag{13}$$

Оно имеет следующий вид (см. [5, 43, 44]):

$$\begin{gathered}v_{\mathrm{A}}(t,x)=(T_1+t)^{-N/(2+N\sigma)}f(\eta),\quad \eta=|x|(T_1+t)^{-1/(2+N\sigma)},\\ f(\eta)=B(\eta_0^2-\eta^2)_+^{1/\sigma};\quad B=[\sigma/2(2+N\sigma)]^{1/\sigma}.\end{gathered} \tag{14}$$

Здесь T_1 и η_0 — произвольные положительные постоянные.

Пусть, без ограничения общности, $u_0(x)>0$ в некоторой окрестности точки $x=0$. Фиксируем произвольное $T_1>0$ и выберем $\eta_0>0$ в (14) столь малым, чтобы $u_0(x)\geqslant v_{\mathrm{A}}(0,x)$ в $\mathbf{R}^N$. Тогда, очевидно, $u(t,x)\geqslant v_{\mathrm{A}}(t,x)$ в $\mathbf{R}^N$ при всех допустимых $t>0$. Покажем, что при $\beta<\sigma+1+2/N$ найдется такое $t_1\geqslant0$, что $v(t_1,x)$ удовлетворяет неравенству (11) ($v_{\mathrm{A}}(t_1,x)\geqslant u_-(0,x)$ в $\mathbf{R}^N$) при некотором $T>0$ и, следовательно, в силу оценки $u(t_1,x)\geqslant v_{\mathrm{A}}(t_1,x)$ решение задачи Коши существует в течение времени, не большего t_1+T.

Неравенство $v_A(t_1, x) \geqslant u_-(0, x)$ в $\mathbf{R}^N$ эквивалентно следующим:

$$\begin{gathered}(T_1+t_1)^{-N/(2+N\sigma)} B\eta_0^{2/\sigma} \geqslant AT^{-1/(\beta-1)}, \\ \eta_0 (T_1+t_1)^{1/(2+N\sigma)} \geqslant T^{[\beta-(\sigma+1)]/2(\beta-1)} a.\end{gathered} \tag{15}$$

Пусть в первом из них имеет место равенство, тогда остается проверить выполнение второго при больших $T>0$. Оно приводится к виду

$$T^{\frac{1}{2(\beta-1)}\left[\beta-\left(\sigma+1+\frac{2}{N}\right)\right]} \leqslant a^{-1}\left(\frac{B}{A}\right)^{1/N} \eta_0^{\frac{2}{N\sigma}+1} \tag{15'}$$

и справедливо при всех достаточно больших T, если $\beta<\sigma+1+2/N$, что завершает доказательство.

Отметим, что условия (15), (15′) позволяют проанализировать и «критический» случай $\beta=\sigma+1+2/N$, однако полученный на качественном уровне [40, 41] результат об отсутствии глобальных решений при $\beta=\sigma+1+2/N$ этим способом доказать не удается. Для случая $\sigma=0$ теорема 2 известна сравнительно давно (см. [63, 97]), анализ критического значения $\beta=1+2/N$ проведен в [85, 102, 111]. Разумеется, техника исследования полулинейного уравнения, использующая возможность обращения линейного оператора $(\partial/\partial t-\Delta)$, не применима в квазилинейном случае.

3.2. Глобальные решения при $\beta>\sigma+1+2/N$. Ниже устанавливается оптимальность теоремы 2.

Условия глобальной разрешимости задачи будут получены с помощью построения ограниченных верхних решений u_+ следующего вида:

$$\begin{gathered}u_+(t, x)=(T+t)^{-1/(\beta-1)}\theta_+(\xi), \quad \xi=|x|/(T+t)^m, \\ \theta_+(\xi)=A(1-\xi^2/a^2)_+^{1/\sigma}, \quad T>0, \quad A>0, \quad a>0.\end{gathered} \tag{16}$$

Неравенство $\mathbf{A}(u_+) \geqslant 0$ (отметим, что $\nabla u_+^{\sigma+1} \in C(\mathbf{R}^N)$) эквивалентно такому:

$$\begin{gathered}m_*+n_*\Delta+A^{\beta-1}\Delta^{\frac{\beta+\sigma-1}{\sigma}} \leqslant 0, \quad \Delta=(1-\xi^2/a^2)_+ \in (0, 1); \\ m_*=\frac{4A^\sigma}{\sigma^2 a^2}-\frac{\beta-(\sigma+1)}{(\beta-1)\sigma}, \quad n_*=\frac{1}{\sigma}\left[1-\frac{2A^\sigma}{a^2}\left(N+\frac{2}{\sigma}\right)\right].\end{gathered} \tag{17}$$

Для справедливости (17), например, достаточно, чтобы $m_* \leqslant 0$, $m_*+n_*+A^{\beta-1} \leqslant 0$, или

$$\frac{4}{\sigma^2}\frac{A^\sigma}{a^2} \leqslant \frac{\beta-(\sigma+1)}{(\beta-1)\sigma}, \quad A^{\beta-1} \leqslant \frac{2N}{\sigma}\frac{A^\sigma}{a^2}-\frac{1}{\beta-1}. \tag{18}$$

Нетрудно получить условие разрешимости (18). Из второго неравенства вытекает необходимость ограничения $2NA^{\sigma}/\sigma a^2 > 1/(\beta-1)$, что вместе с первым дает

$$\frac{2}{N\sigma(\beta-1)} < \frac{4}{\sigma^2}\frac{A^{\sigma}}{a^2} \leqslant \frac{\beta-(\sigma+1)}{(\beta-1)\sigma}.$$

Поэтому (18) имеет решение, если

$$\frac{2}{N\sigma(\beta-1)} < \frac{\beta-(\sigma+1)}{(\beta-1)\sigma}$$

или, что то же самое, $[\beta-(\sigma+1+2/N)]/\sigma(\beta-1)>0$, т. е. $\beta>\sigma+1+2/N$. Итак, доказана следующая [19]

Теорема 3. Пусть $\beta>\sigma+1+2/N$ и при некотором $T>0$

$$u_0(x) \leqslant u_+(0, x) \equiv T^{-1/(\beta-1)}\theta_+(|x|/T^m), \quad x\in\mathbf{R}^N, \tag{19}$$

где $\theta_+(\xi)=A(1-\xi^2/a^2)_+^{1/\sigma}$ и постоянные A, $a>0$ удовлетворяют (18). Тогда задача Коши (1), (2) имеет глобальное (ограниченное) решение, причем

$$u(t, x) \leqslant (T+t)^{-1/(\beta-1)}\theta_+(|x|/(T+t)^m) \text{ в } \mathbf{R}^1_+\times\mathbf{R}^N. \tag{19'}$$

Суммируя сформулированные в теоремах 1 и 3 результаты, приходим к такому утверждению: при $\beta>\sigma+1+2/N$ для всех «больших» начальных функций задача (1), (2) неразрешима в целом, а при достаточно «малых» u_0 существует глобальное решение.

Замечание. Нетрудно показать, что глобальные решения при $\beta>\sigma+1+2/N$ не обязательно финитны, как в (19). Для построения «нефинитного» множества устойчивости достаточно в качестве θ_+ в верхнем решении (16) взять, например, следующую функцию: $\theta_+(\xi)=A(a^2+\xi^2)^{-1/(\beta-1)}>0$, и подобрать величины постоянных $A>0$ и $a>0$ так, чтобы $\mathbf{A}(u_+)\geqslant 0$ в $\mathbf{R}_+^1\times\mathbf{R}^N$.

3.3. Три типа автомодельных режимов горения с обострением. Исследование конкретных свойств решений довольно сложной нелинейной задачи (1), (2) удобно начать с анализа частных автомодельных решений, предварительное исследование которых в одномерном случае проводилось в § 1. Хотя эти частные решения реализуются при некотором специальном выборе $u_0(x)$, тем не менее анализ их весьма простой пространственно временной структуры позволяет обоснованно судить о характере протекания процесса горения с обострением в общем случае. Такой переход от частных решений к исследованию решений весьма общего вида осуществляется на основе специальных теорем сравнения, сформулированных в п. 4. Подробное качественное и численное исследование различных режимов горения с обострением в данной задаче проводилось в [40, 45, 59, 74]. Первые исследования сложных ав-

томодельных тепловых структур и их устойчивости были выполнены в [40, 41, 59, 73, 74] (см. § 1).

Проведенное ниже исследование автомодельных решений использует отдельные результаты [1, 2, 101] и опирается на некоторые из развитых там подходов.

3.3.1. Формулировка автомодельных задач. Как показано в § 1, при любых[1] $\sigma>0$ и $\beta>1$ уравнение (1) имеет неограниченное автомодельное решение

$$u_A(t, x)=(T_0-t)^{-\frac{1}{\beta-1}}\theta_A(\xi), \quad \xi=\frac{x}{(T_0-t)^m}; \quad m=\frac{\beta-(\sigma+1)}{2(\beta-1)}, \tag{20}$$

где $T_0>0$ — время существования решения. Функция $\theta_A(\xi)\geqslant 0$ удовлетворяет в $\mathbf{R}^n$ следующему эллиптическому уравнению, которое получается после подстановки выражения (20) в (1):

$$\nabla(\theta_A^\sigma\nabla\theta_A)-m\nabla\theta_A\xi-\frac{1}{\beta-1}\theta_A+\theta_A^\beta=0, \quad \xi\in\mathbf{R}^N. \tag{21}$$

Уравнение (21) всегда имеет тривиальное решение $\theta_A\equiv 0$, а также пространственно однородное решение $\theta_A(\xi)\equiv\theta_H=(\beta-1)^{-1/(\beta-1)}$. Нас будут интересовать нетривиальные решения $\theta_A\not\equiv 0$ такие, что $\theta_A(\xi)\to 0$ при $|\xi|\to+\infty$. Радиально несимметричные решения эллиптического уравнения (21) изучены пока только качественно и численно [60] (отметим, что (21), по-видимому, допускает целый спектр решений с весьма разнообразной пространственной структурой; примеры приведены в [60]).

В дальнейшем мы ограничимся анализом симметричных решений:

$$\theta_A=\theta_A(\xi), \quad \xi=|x|/(T_0-t)^m\geqslant 0. \tag{20'}$$

Тогда (21) превращается в обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$\frac{1}{\xi^{N-1}}(\xi^{N-1}\theta_A^\sigma\theta_A')'-m\theta_A'\xi-\frac{1}{\beta-1}\theta_A+\theta_A^\beta=0, \quad \xi>0, \tag{22}$$

$$\theta_A'(0)=0, \quad \theta_A(+\infty)=0 \quad (\theta_A(0)>0). \tag{23}$$

Уравнение (22) вырождается при $\theta_A=0$, поэтому задача (22), (23) допускает, вообще говоря, обобщенное решение, не имеющее в точках вырождения необходимой гладкости. Однако во всех случаях решение θ_A должно быть таково, что $\theta_A^\sigma\theta_A'$ непрерывна при всех $\xi\geqslant 0$ (и, разумеется, $\theta_A\in C^2$ всюду, где $\theta_A>0$). Это, в частности, означает, что $\theta_A^\sigma\theta_A'=0$ там, где $\theta_A=0$.

3.3.2. Локализация горения в S-режиме, $\beta=\sigma+1$. При $\beta=\sigma+1$ уравнение (22) принимает особенно простой вид:

$$\frac{1}{\xi^{N-1}}(\xi^{N-1}\theta_A^\sigma\theta_A')'-\frac{1}{\sigma}\theta_A+\theta_A^{\sigma+1}=0, \quad \xi>0. \tag{24}$$

[1] Случай $\sigma=0$ рассматривается в § 4.

В одномерном случае ($N=1$) оно легко интегрируется и одно из его решений имеет такой вид (напомним, что $\xi \equiv |x|$ при $\beta=\sigma+1$):

$$\theta_A=\theta_s(x)=\begin{cases}\left[\frac{2(\sigma+1)}{\sigma(\sigma+2)}\cos^2\left(\frac{\pi|x|}{L_s}\right)\right]^{1/\sigma}, & |x|<L_s/2,\\ 0, & |x|>L_s/2,\end{cases} \tag{25}$$

где $L_s=2\pi(\sigma+1)^{1/2}/\sigma$. Это решение впервые построено в [45, 74]. Его отличительной особенностью является то, что соответствующее автомодельное обобщенное решение (20)

$$u_A(t, x)=(T_0-t)^{-1/\sigma}\theta_s(x)\left(u_A\equiv 0 \text{ в } [0, T_0)\times\left\{|x|\geqslant\frac{L_s}{2}\right\}\right) \tag{26}$$

проявляет эффект локализации неограниченного решения в области $\Omega_L=\omega_L=\{|x|<L_s/2\}$. Несмотря на неограниченное возрастание решения при $t\to T_0^-$ во всех точках области локализации, тепловые возмущения в окружающее «холодное» пространство не проникают. Ширина области локализации $L_s=\operatorname{mes}\Omega_L$ называется *фундаментальной длиной*.

В дальнейшем будет показано, что L_s является фундаментальной характеристикой рассматриваемой нелинейной среды. При $N=1$ уравнение (24) допускает счетное множество различных решений, составленных из произвольного числа элементарных решений (26) (периодического продолжения функции (26) в обе стороны с периодом L_s), которые в силу условия тепловой изолированности порождают в соответствии с (20) независимое друг от друга горение на фундаментальных длинах L_s. Уравнение $u_t=(u^{\sigma+1})_{xx}+u^{\sigma+1}$ также допускает другой класс неограниченных локализованных решений следующего вида: $u(t, x)=\varphi(t)[1-(A+\cos(\lambda x))/g(t)]_+^{1/\sigma}$, где $\lambda=\sigma/(\sigma+1)$, A — постоянная. Подстановка этого выражения в уравнение дает систему обыкновенных дифференциальных уравнений для неотрицательных функций $\varphi(t)$, $g(t)$ (идея построения подобных «неинвариантных» решений для параболического уравнения со стоком — $u^{\sigma+1}$ вместо источника высказана в [88]).

Ниже подробно рассматривается многомерный случай $N>1$. Автомодельные решения S-режима существуют в пространствах произвольной размерности, однако здесь, в отличие от одномерного случая, нет немонотонных решений.

Теорема 4. При любых $N>1$, $\beta=\sigma+1$ существует финитное решение $\theta_A\geqslant 0$ задачи (22), (23). Функция θ_A всюду, где она положительна, монотонно убывает. Немонотонных решений задача не имеет.

Прежде всего, отметим, что финитность решения задачи (22), (23) вытекает из локального анализа уравнения в области достаточно малых $\theta_A>0$. Это дает следующую асимптоти-

ку финитного решения:

$$\theta_A(\xi)=\left\{\frac{\sigma}{2(\sigma+2)}(\xi_0-\xi)^2\right\}^{1/\sigma}(1+\varepsilon(\xi)),\ \xi<\xi_0, \tag{27}$$

где $\xi_0=\operatorname{mes}\operatorname{supp}\theta_A<+\infty$ ($\theta_A=0$ при $\xi\geqslant\xi_0$) и $\varepsilon(\xi)\to 0$ при $\xi\to\xi_0^-$.

Для доказательства существования удобно рассмотреть, наряду с (22), (23), семейство задач Коши

$$\frac{1}{\xi^{N-1}}(\xi^{N-1}|\theta|^\sigma\theta')'-\frac{1}{\sigma}\theta+|\theta|^\sigma\theta=0,\ \xi>0, \tag{28}$$

$$\theta(0)=\mu>0,\ \theta'(0)=0 \tag{29}$$

и подобрать величину $\mu>0$ так, чтобы $\theta=\theta(\xi;\ \mu)\geqslant 0$ удовлетворяло условию $\theta(+\infty;\ \mu)=0$; тогда, очевидно, $\theta(\xi;\ \mu)$ будет искомой функцией $\theta_A(\xi)$.

Доказательство теоремы 4 опирается на следующие леммы.

Лемма 1. Пусть

$$0<\mu<\mu_*=\left[\frac{2(\sigma+1)}{\sigma(\sigma+2)}\right]^{1/\sigma}. \tag{30}$$

Тогда $\theta(\xi;\ \mu)>0$ при $\xi\geqslant 0$. Кроме того, $|\theta(\xi;\ \mu)|$ равномерно ограничена по $\xi\geqslant 0$ при любом $\mu>\theta_H$: $|\theta(\xi;\ \mu)|\leqslant\mu$.

Доказательство. Умножая (28) на $|\theta|^\sigma\theta'$ и интегрируя получившееся равенство по $(0,\ \xi)$, приходим к тождеству

$$\frac{1}{2}(|\theta|^\sigma\theta')^2(\xi)+(N-1)\int_0^\xi(|\theta|^\sigma\theta')^2(\eta)\frac{d\eta}{\eta}+\Phi(\theta(\xi))=\Phi(\mu), \tag{31}$$

где через $\Phi(\mu)$ обозначена функция

$$\Phi(\mu)=\frac{|\mu|^{2\sigma+2}}{2(\sigma+1)}-\frac{|\mu|^{\sigma+2}}{\sigma(\sigma+2)}.$$

Из (31) непосредственно следует, что $\Phi(\theta(\xi;\ \mu))\leqslant\Phi(\mu)$ при всех $\xi>0$. Это, как нетрудно убедиться, обеспечивает справедливость утверждений леммы.

Лемма 2. Существует такое $\mu=\mu^*>\theta_H$, что $\theta(\xi;\ \mu^*)$ обращается в нуль.

Доказательство. Предположим противное, пусть $\theta(\xi;\ \mu)>0$ в $\mathbf{R}^1_+$ при любых $\mu>\theta_H$. Полагая $\varphi=|\theta|^\sigma\theta$, $\varphi(0)=\mu^{\sigma+1}$, получим для новой функции φ следующее интегральное уравнение:

$$\varphi'(\xi)=(\sigma+1)\xi^{1-N}\int_0^\xi\eta^{N-1}\left[\frac{1}{\sigma}|\varphi|^{-\frac{\sigma}{\sigma+1}}\varphi-\varphi\right]d\eta,\quad \xi>0.$$

Полагая теперь $\psi_\mu(\xi)=\varphi(\xi)/\varphi(0)\equiv\varphi(\xi)/\mu^{\sigma+1}$, имеем

$$\psi_\mu'(\xi)=(\sigma+1)\xi^{1-N}\int_0^\xi\eta^{N-1}\left[\frac{1}{\sigma}\mu^{-\sigma}|\psi_\mu|^{-\frac{\sigma}{\sigma+1}}\psi_\mu-\psi_\mu\right]d\eta,\quad \xi>0. \tag{32}$$

Из леммы 1 вытекает, что $|\psi_\mu(\xi)|\leqslant 1$ в $\mathbf{R}^1_+$, если $\mu>\theta_H$, а из (32) получаем, что $|\psi'_\mu(\xi)|\leqslant \mathrm{const}$ на любом компакте $[0, \xi_m]$. Из теоремы компактности Арцела—Асколи следует, что для некоторой последовательности $\mu_k\to+\infty$ $\psi_{\mu_k}(\xi)\to w(\xi)\geqslant 0$ равномерно на каждом компакте $[0, \xi_m]$. Уравнение для w получается из эквивалентного (32) интегрального уравнения предельным переходом $\mu=\mu_k\to+\infty$ и имеет следующий вид:

$$w'(\xi)=-(\sigma+1)\,\xi^{1-N}\int_0^\xi \eta^{N-1}w(\eta)\,d\eta,\quad \xi>0;\quad w(0)=1, \tag{33}$$

причем $w(\xi)\geqslant 0$. В силу (33), $w'<0$, поэтому $w>0$ в $\mathbf{R}^1_+$. Но (33) эквивалентна следующей задаче:

$$w''+\frac{N-1}{\xi}w'+(\sigma+1)\,w=0,\quad \xi>0;\quad w'(0)=0,\quad w(0)=1, \tag{34}$$

решение которой обращается в нуль (в точке $\xi_1=z_N^{(1)}/(\sigma+1)^{1/2}$, где $z_N^{(1)}>0$ — наименьший корень функции Бесселя $J_{(N-2)/2}$).

Для завершения доказательства нам понадобится утверждение об условиях непрерывной зависимости решения задачи (28), (29) от $\mu>0$. Отметим, что в общем случае непрерывная зависимость, вообще говоря, отсутствует, так как уравнение (28) вырождающееся.

Лемма 3. Пусть функция $\theta(\xi;\ \mu_1)$, $\mu_1>0$ такова, что $(|\theta|^\sigma\circ\theta')\neq 0$ в тех точках $\xi\in(0, \xi_m]$, где $\theta=0$. Тогда $(|\theta|^\sigma\theta)(\xi;\ \mu)$ и $(|\theta|^\sigma\theta)'(\xi;\ \mu)$ непрерывным образом зависят от μ на компакте $[0, \xi_m]$ в окрестности значения параметра $\mu=\mu_1$.

По поводу доказательства см. близкую по смыслу лемму 5 в [20].

Доказательство теоремы 4. Введем множество $\mathscr{M}=\{\mu_0>0|$ при всех $0<\mu<\mu^0:\theta-\xi;\ \mu)>0$ в $\mathbf{R}_+{}^1\}$. Тогда $\mathscr{M}\neq\{\mu^0\leqslant\theta_H\}$ (лемма 1) и $\mathscr{M}$ ограничено сверху (лемма 2). Поэтому существует $\theta_0=\sup\mathscr{M}>\theta_H$. Из леммы 3 тогда вытекает, что функция $\theta(\xi;\ \theta_0)$ представляет собой искомую функцию θ_A, удовлетворяющую условиям (23) с асимптотикой (27). Монотонность θ_A вытекает из тождества (31).

3.3.3. Лемма о стационарных решениях. Для исследования разрешимости задачи (22), (23) при $\beta\neq\sigma+1$ нам понадобятся некоторые свойства радиально-симметричных решений стационарного уравнения

$$\nabla(U^\sigma\nabla U)+U^\beta=0,\quad U=U(x)\geqslant 0. \tag{35}$$

Полагая $U^{\sigma+1}=V$ и преобразуя независимую переменную $x\to x(\sigma+1)^{1/2}$, получим для функции $V=V_\lambda(|x|)$ следующую

задачу:

$$\frac{1}{r^{N-1}}(r^{N-1}V_\lambda')'+V_\lambda^\alpha=0, \quad r=|x|>0, \tag{36}$$

$$V_\lambda(0)=\lambda, \quad V_\lambda'(0)=0, \tag{37}$$

где $\lambda>0$ — постоянная (параметр семейства $\{V_\lambda\}$), $\alpha=\beta/(\sigma+1)>0$. Вследствие инвариантности уравнения (36), при любом $\lambda>0$ справедливо тождество

$$V_\lambda(r)\equiv\lambda V_1\left(\lambda^{\frac{\alpha-1}{2}}r\right). \tag{38}$$

Лемма 4. Пусть $\alpha>0$. Тогда

(а) при $\alpha<(N+2)/(N-2)_+$ (т. е. $0<\alpha<+\infty$ при $N=1$ или $N=2$ и $0<\alpha<(N+2)/(N-2)$ при $N>2$) решение задачи (36), (37) обращается в нуль в некоторой точке $r=r_0(\lambda)\equiv\equiv r_0(1)\lambda^{(1-\alpha)/2}$, причем $V_\lambda'(r_0)\neq0$, так что задача не имеет решения $V_\lambda\geqslant0$ в $\mathbf{R}^1_+$;

(б) если $\alpha\geqslant(N+2)/(N-2)_+$, то $V_\lambda(r)>0$ в $\mathbf{R}^1_+$ и $V_\lambda\to0$ при $r\to+\infty$.

По поводу доказательства см., например, [10, 107, 101]. При «критическом» значении $\alpha=(N+2)/(N-2)_+$ решение представимо в явном виде:

$$V_\lambda(r)=\lambda\left[\frac{N(N-2)}{N(N-2)+\lambda^{4/(N-2)}r^2}\right]^{(N-2)/2}, \quad r=|x|\geqslant0 \tag{39}$$

(это семейство построено в [116]).

Возвращаясь к уравнению (35), получаем, что при $0<\beta<<(\sigma+1)(N+2)/(N-2)_+$ стационарных решений $U=U(|x|)\geqslant0$ в $\mathbf{R}^1_+$ не существует (более того, нет и несимметричных решений $U=U(x)\not\equiv0$, см. [98]). Напротив, при $\beta\geqslant(\sigma+1)(N+2)/(N-2)_+$ все его симметричные решения строго положительны [69, 101, 107].

Основа доказательства леммы 4 — известное интегральное тождество [69]. Проведенное в [69] и для более общих квазилинейных эллиптических уравнений в [70] исследование показывает, что «критическое» значение параметра, при переходе через которое резко меняются свойства решений, может быть найдено из условия вложения функциональных пространств, отвечающих различным членам уравнения. Например, для уравнения (36) при $\alpha\geqslant(N+2)/(N-2)_+$ нарушается компактность вложения $H_0^1(B_1)\subset L^{\alpha+1}(B_1)$, B_1 — шар единичного радиуса в $\mathbf{R}^N$ [62]. В критическом случае $\alpha=(N+2)/(N-2)_+$ уравнение (36) инвариантно относительно некоторого конформного преобразования [46, 48], что в конечном итоге позволило найти семейство решений (39) [116].

Исходя из этих положений, удается проанализировать другие задачи. Например, для уравнения

$$\nabla(|\nabla U|^{\sigma}\nabla U)+U^{\beta}=0, \quad \sigma>0, \quad \beta>1$$

«критическим» является $\beta=[N(\sigma+1)+(\sigma+2)]/[N-(\sigma+2)]_{+}$, и при этом β существует семейство решений (см. [20])

$$U(x)=$$

$$=\left\{\left[\frac{a^2N(N-(\sigma+2))}{(\sigma+1)}\right]^{1/(\sigma+2)}\Big/\left(a^2+|x|^{(\sigma+2)/(\sigma+1)}\right)\right\}^{[N-(\sigma+2)]/(\sigma+2)}.$$

В случае уравнения четвертого порядка

$$-\Delta^2U+U^{\beta}=0, \quad \beta>1,$$

при «критическом» значении $\beta=(N+4)/(N-4)_{+}$ существует следующее семейство строго положительных решений в $\mathbf{R}^N$ [25]:

$$U(x)=\{a^4N(N-4)(N^2-4)\}^{(N-4)/8}/(a^2+|x|^2)^{(N-4)/2}.$$

3.3.4. Нелокализованные автомодельные решения HS**-режима,** $\beta<\sigma+1$. Локальным анализом устанавливается, что решением задачи (22), (23) при $\beta\in(1, \sigma+1)$ может быть только финитная функция со следующей асимптотикой вблизи точки фронта $\xi=\xi_0=\operatorname{mes}\operatorname{supp}\theta_A$:

$$\theta_A(\xi)=\left[\frac{(\sigma+1-\beta)\sigma}{2(\beta-1)}\xi_0(\xi_0-\xi)\right]^{1/\sigma}(1+\omega(\xi)), \tag{40}$$

где $\omega(\xi)\to 0$ при $\xi\to\xi_0^-$.

Теорема 5. При любых $1<\beta<\sigma+1$ и $N\geqslant 1$ существует финитное решение θ_A задачи (22), (23), причем $\theta_A'<0$ всюду, где $\theta_A>0$. Немонотонных решений задача не имеет. При $N=1$ решение $\theta_A\not\equiv 0$ единственно.

Доказательство первой части теоремы практически не отличается от приведенного выше анализа S-режима. Единственность решения при $N=1$ устанавливается в п. 3.6 на основе исследования исходной параболической задачи с частными производными.

Несколько слов о свойствах автомодельного решения (20) при $\beta\in(1, \sigma+1)$. Оно представляет собой HS-режим горения с обострением и локализация отсутствует. Фронт тепловой волны движется по закону

$$|x_{\Phi}(t)|=\xi_0(T_0-t)^{[\beta-(\sigma+1)]/2(\beta-1)}\to+\infty, \quad t\to T_0^-,$$

т. е. волна за конечное время охватывает все пространство, причем $u_A\to+\infty$ при $t\to T_0^-$ всюду в $\mathbf{R}^N$.

3.3.5. Локализация в автомодельном LS**-режиме с обострением,** $\beta>\sigma+1$. Автомодельные решения (20) при $\beta>\sigma+1$ еще более ярко, чем в случае S-режима, проявляют свойство локализации процессов диффузии тепла и горения. Речь здесь идет об

эффективной локализации, так как автомодельная задача (22), (23) не имеет при $\beta>\sigma+1$ (в отличии от случая $\beta\leqslant\sigma+1$) финитных решений и, как показывает локальный анализ, всякая функция $\theta_A(\xi)$ имеет следующую асимптотику:

$$\theta_A(\xi)=C_A\xi^{-2/[\beta-(\sigma+1)]}(1+\nu(\xi)),\quad \nu(\xi)\to 0,\quad \xi\to+\infty, \tag{41}$$

где $C_A=C_A(\sigma,\beta,N)$ — постоянная.

Теорема 6. Пусть $\beta>\sigma+1$. Тогда

(а) если $\beta<(\sigma+1)(N+2)/(N-2)_+$, то задача (22), (23) имеет по крайней мере одно решение $\theta_A=\theta_A(\xi)>0$ в $\mathbf{R}^1_+$, которое строго монотонно убывает по ξ и имеет асимптотику (41), причем

$$C_A\geqslant\left\{\frac{2N}{[\beta-(\sigma+1)]}\left[\frac{\beta-(\sigma+1)}{\beta}\right]^{\frac{\beta}{\sigma+1}}\right\}^{\frac{1}{\beta-(\sigma+1)}}>0; \tag{41'}$$

(б) при $N=1$ задача (22), (23) имеет не менее

$$K_0=-[-a]-1,\quad a=\frac{\beta-1}{\beta-(\sigma+1)}>1,$$

различных решений, отличающихся по числу точек экстремума при $\xi\in[0,+\infty)$ (первое — монотонное решение — имеет только точку максимума при $\mu=0$, второе, если $K_0>1$, — точку минимума при $\xi=0$ и ровно один максимум при $\xi>0$ и т. д.).

Основное место в доказательстве теоремы 6 занимает предложенный в [40, 73] способ описания локального поведения немонотонных решений вблизи однородного $\theta\equiv\theta_H$ путем «линеаризации» уравнения. Рассмотрим наряду с (22), (23) семейство задач Коши:

$$\frac{1}{\xi^{N-1}}(\xi^{N-1}|\theta|^{\sigma}\theta')'-m\theta'\xi-\frac{1}{\beta-1}\theta+|\theta|^{\beta-1}\theta=0,\quad \xi>0, \tag{42}$$

$$\theta(0)=\mu>0,\quad \theta'(0)=0;\quad m=\frac{\beta-(\sigma+1)}{2(\beta-1)}. \tag{43}$$

Положим $\theta\equiv\theta(\xi;\mu)=\theta_H+\varepsilon v(\xi)$, где $\varepsilon>0$ — постоянная, играющая в дальнейшем роль малого параметра. Тогда получаем для $v(\xi)$ следующую задачу:

$$\theta_H^{\sigma}\frac{1}{\xi^{N-1}}(\xi^{N-1}v')'-mv'\xi+v=\varepsilon\Phi_\varepsilon(v),\quad \xi>0, \tag{44}$$

$$v(0)=\nu\equiv(\mu-\theta_H)/\varepsilon,\quad v'(0)=0, \tag{45}$$

где $\Phi_\varepsilon: C^2\to C$ — некоторый ограниченный квазилинейный оператор второго порядка. Из (44) следует, что в силу непрерывной зависимости решения уравнения от параметра ε в окрестности $\varepsilon=0$ на любом компакте $[0,\xi_m]$, решение $v(\xi)$ при определенном выборе $|\varepsilon|\ll 1$ и $|\mu-\theta_H|\ll 1$ близко к решению со-

ответствующей линейной задачи

$$\theta_H^\sigma \frac{1}{\xi^{N-1}}(\xi^{N-1}y')' - my'\xi + y = 0, \quad \xi > 0,$$
$$y(0) = \nu \neq 0, \quad y'(0) = 0. \tag{46}$$

Заменой $\xi = \eta^{1/2}(2\theta_H^\sigma/m)^{1/2}$ уравнение для y сводится к вырожденному гипергеометрическому уравнению $\eta y'' + y'(c-\eta) - ay = 0$, $y(0) = \nu$, где $c = N/2$, $a = -1/2m = -(\beta-1)/[\beta-(\sigma+1)]$. Решения этой задачи являются немонотонными и имеют при $\eta > 0$ равно $K = -[-a]$ корней (см., например, [7]). Возвращаясь к задаче (44), (45), а затем к исходной (42), (43), получаем, что при достаточно малых $|\mu - \theta_H|$ всякая функция $\theta(\xi; \mu)$ в области своей положительности имеет не менее

$$K_0 = -[-a] - 1 \geqslant 1 \quad \text{при} \quad a = \frac{\beta-1}{\beta-(\sigma+1)} > 1 \tag{47}$$

точек экстремума при $\xi > 0$. Этот факт имеет принципиальное значение. Отметим, что при $\sigma = 0$ из (47) имеем $K_0 \equiv 0$, что, как выяснится в дальнейшем, свидетельствует об отсутствии нетривиальных автомодельных функций θ_A при $\sigma = 0$ (и $1 < \beta \leqslant (N+2)/(N-2)_+$).

Кратко охарактеризуем основные моменты доказательства предложения (а) в теореме 6. Положим $\mathcal{N} = \{\mu > \theta_H | \theta(\xi; \mu) > 0$ на $(0, \xi_\mu)$ и имеет на $(0, \xi_\mu)$, по крайней мере, одну точку минимума$\}$. Тогда из приведенного выше анализа $\mathcal{N} \neq \varnothing$. Если $\mathcal{N}$ ограничено сверху, то функция $\theta(\xi; \theta_0)$, $\theta_0 = \sup \mathcal{N}$ будет, очевидно, искомым решением задачи (22), (23) с асимптотикой (41).

Итак, докажем, что $\sup \mathcal{N} < +\infty$. Положим в задаче (42), (43) $\psi_\mu(\xi) = \mu^{-(\sigma+1)}\varphi(\xi/\mu^{m(\beta-1)})$, где $\varphi = |\theta|^\sigma\theta$. Тогда для ψ_μ получим следующее интегральное уравнение:

$$\psi_\mu'(\xi) = -(\sigma+1)\xi^{1-N}\int_0^\xi \eta^{N-1}|\psi_\mu|^{\frac{\beta}{\sigma+1}-1}\psi_\mu d\eta + \mu^{1-\beta}G(\psi_\mu), \tag{48}$$

где $\psi_\mu(0) = 1$, $\psi_\mu'(0) = 0$ и $G(\psi_\mu)$ — ограниченный в C интегральный оператор

$$G(\psi_\mu) = m(\sigma+1)|\psi_\mu|^{\frac{1}{\sigma+1}-1}\psi_\mu +$$
$$+ (\sigma+1)\xi^{1-N}\int_0^\xi \eta^{N-1}\left[\frac{1}{\beta-1} - mN\right]|\psi_\mu|^{\frac{1}{\sigma+1}-1}\psi_\mu d\eta,$$

который не является сжимающим в окрестности $\psi_\mu \equiv 0$. В отличие от случая $\beta \leqslant \sigma+1$ (см. п. 3.2), при $\beta > \sigma+1$ заранее ничего нельзя сказать об ограниченности $|\psi_\mu|$ и $|\psi_\mu'|$ на компакте.

Поэтому будет использована непрерывная зависимость $\psi_\mu(\xi)$ от μ в окрестности $\mu=+\infty$. При $\mu=+\infty$ (48) формально превращается в такое уравнение:

$$\psi'_\infty(\xi)=-(\sigma+1)\,\xi^{1-N}\int\limits_0^\xi \eta^{N-1}\,|\psi_\infty|^{\frac{\beta}{\sigma+1}-1}\psi_\infty d\eta,\quad \psi_\infty(0)=1$$

или, что то же самое, $\xi^{1-N}(\xi^{N-1}\psi'_\infty)'+(\sigma+1)\,|\psi_\infty|^{\beta/(\sigma+1)-1}\psi_\infty=0$, $\xi>0$; $\psi_\infty(0)=1$, $\psi'_\infty(0)=0$. Поэтому, как следует из леммы 4 в п. 3.3, при $\beta<(\sigma+1)(N+2)/(N-2)_+$ функция $\psi_\infty(\xi)$ обращается в нуль в некоторой точке $\xi=\xi_*$ ($\psi_\infty>0$ на $(0,\xi_*)$), причем $\psi'_\mu(\xi_*)<0$. Рассмотрим компакт $K_\varepsilon=[0,\xi_*-\varepsilon]$, $\varepsilon>0$. Тогда $\psi_\infty(\xi)\geqslant\psi_\infty(\xi_*-\varepsilon)>0$ на K_ε и, следовательно, на K_ε есть непрерывная зависимость ψ_μ и ψ'_μ от μ в окрестности $\mu=+\infty$, то есть в частности, $\psi_\mu(\xi_*-\varepsilon)\to\psi_\infty(\xi_*-\varepsilon)$, $\psi'_\mu(\xi_*-\varepsilon)\to\psi'_\infty(\xi_*-\varepsilon)$ при $\mu\to+\infty$. Но $G(\psi_\mu)=O(\|\psi_\mu\|_C^{1/(\sigma+1)})\to 0$ при $\|\psi_\mu\|_C\to 0$. Поэтому для продолжения $\psi_\mu(\xi)$ из точки $\xi=\xi_*-\varepsilon$ в окрестность $\xi=\xi_*$ можно воспользоваться теоремой Шаудера, причем за счет «малости» $G(\psi_\mu)$ производная $\psi_\mu'(\xi)$ на $\{|\xi-\xi_*|<\varepsilon\}$ будет меняться незначительно и в результате $\psi_\mu(\xi)$ обращается в нуль при всех достаточно больших $\mu>0$. Этим завершается доказательство предложения (а). Оценка (41) будет доказана в п. 3.8.

Вопрос о существовании нетривиальных решений задачи (22), (23) при $\beta\geqslant(\sigma+1)(N+2)/(N-2)_+$ остается открытым.

Предложение (б) из теоремы 6 подробно доказано в [1, 2]. Дискретный спектр решений задачи (22), (23) этим же способом можно построить для определенных значений β, σ и в многомерном случае $N>1$. Идея линеаризации уравнения относительно однородного решения $\theta\equiv\theta_H$ позволяет исследовать структуру несимметричных решений эллиптического уравнения (21) при $\beta>\sigma+1$. Пока в этом направлении получены интересные качественные и численные результаты [60].

В заключение приведем один важный для дальнейшего результат, который вытекает из простого анализа уравнения (22).

Теорема 7. Пусть $\sigma+1<\beta\leqslant(\sigma+1)N/(N-2)_+$. Тогда всякое автомодельное решение (20) является критическим, то есть всюду в $(0,T_0)\times\mathbf{R}^N$

$$\frac{\partial u_A}{\partial t}\equiv(T_0-t)^{-\frac{1}{\beta-1}-1}\left[m\theta'_A\xi+\frac{1}{\beta-1}\theta_A\right]>0 \tag{49}$$

и, следовательно,

$$u_A(t,x)<u_A(T_0^-,x)\equiv C_A\,|x|^{-\frac{2}{\beta-(\sigma+1)}},\quad x\in\mathbf{R}^N\setminus\{0\}. \tag{50}$$

Оценка (50) наглядно показывает эффективную локализацию горения в LS-режиме — температура неограниченно возра-

стает при $t \to T_0^-$ только в одной точке $x=0$; в $\mathbf{R}^N \setminus \{0\}$ она ограничена сверху равномерно по $t \in (0, T_0)$ предельным распределением $u_A(T_0^-, x)$. Строгая локализация в задаче Коши (1), (2) при $\beta > \sigma + 1$ с финитной $u_0(x)$, $N=1$, будет доказана в п. 3.5.

Теперь мы переходим к исследованию общих свойств достаточно произвольных неограниченных решений задачи Коши. Здесь важную роль играет специальный подход к сравнению различных неограниченных решений уравнения (1), обладающих одним и тем же временем обострения.

3.4. Основная теорема сравнения. Применение традиционного аппарата теории параболических уравнений — теорем сравнения по краевым условиям для исследования асимптотических свойств неограниченных решений затруднено. Дело в том, что мажорирование одного решения задачи Коши другим: $u \geqslant v$, как правило, означает, что решения $u \not\equiv v$ имеют разные моменты обострения, и поэтому начиная с некоторого момента времени одно из них перестает существовать и сравнение теряет смысл. В сформулированной ниже теореме сравниваются решения с совпадающими временами существования, а в качестве основного «критерия сравнения» берется число пространственных пересечений профилей решений. Как будет показано в дальнейшем, этот подход позволяет описать пространственно временную структуру неограниченных решений общего вида.

Ниже через $u \geqslant 0$ и $v \geqslant 0$ обозначены различные решения одномерного уравнения

$$u_t = (u^\sigma u_x)_x + u^\beta. \tag{1'}$$

Будем говорить, что два решения u и v при фиксированном $t = t_0 \geqslant 0$ *«пересекаются»* по x на (ограниченном) отрезке $I = [a, b]$, $a \leqslant b$, если $w(t_0, x) \equiv u(t_0, x) - v(t_0, x) = 0$ на I и w принимает значения разных знаков в любой его ε-окрестности $\{a - \varepsilon < x < b + \varepsilon\}$, $\varepsilon > 0$.

Это определение специально ориентировано на исследование обобщенных, неаналитических по x решений. Если же u и v, $u \not\equiv v$ — аналитические по x (что естественно для решений полулинейных параболических уравнений с аналитическими коэффициентами, см. [92]), то, очевидно, всякое пересечение при $t = t_0 > 0$ происходит в точке, причем все они изолированы по x.

Введем обозначение: $N(t_0)$ — число пересечений $u(t_0, x)$ и $v(t_0, x)$ или, что то же самое, число изменений знака разности $w(t_0, x)$ в рассматриваемой области по x.

Теорема 8 (*основная теорема сравнения*). Пусть $u(t, x) \geqslant 0$ и $v(t, x) \geqslant 0$ — два различных неограниченных решения уравнения (1′), имеющих один и тот же момент обострения $t = T_0 < +\infty$. Пусть $N(0) < +\infty$. Справедливы следующие утверждения.

(I) Пусть u и v определены в области $\omega_T=(0, T]\times(\eta_1(t), \eta_2(t))$, $T<T_0$, причем не обязательно ограниченной, где η_i либо непрерывные функции, либо по отдельности или вместе равны $\pm\infty$. Тогда $N(T)$ в $(\eta_1(T), \eta_2(T))$ не превосходит числа изменений знака разности $w=u-v$ на параболической границе $\partial\omega_T$.

(II) Пусть u, v — решения задачи Коши для (1′), причем $v_0(x)\equiv v(0, x)>0$ в $\mathbf{R}^1$, а $u_0(x)\equiv u(0, x)$ — финитная. Тогда $N(t)\geqslant 2$ и $N(t)$ не возрастает по $t\in(0, T_0)$.

Пусть u_0 и v_0 — финитные в $\mathbf{R}^1$ функции со связными носителями. Тогда

(III) $\{t\in[0, T_0)\,|\,u(t, x)>v(t, x)$ для всех $x\in\overline{\operatorname{supp} v(t, x)}\}=\varnothing$;

(IV) если $\operatorname{supp} u_0\cap\operatorname{supp} v_0=\varnothing$, то $N(t)\leqslant 1$ при всех $t\in(0, T_0)$.

Для равномерно параболичных уравнений утверждение (I) является естественным следствием сильного принципа максимума и в несколько иной формулировке известно сравнительно давно [126] (см. также [117, 121]). При доказательстве используется тот факт, что разность $w=u-v$ удовлетворяет в ω_T «линейному» параболическому уравнению. Распространение его на случай неограниченных $|\eta_i|=+\infty$, $i=1$ или 2, в том случае, когда известно поведение u и v в бесконечно удаленных по x точках, не представляет особых затруднений, см., например, [26, 27]. В случае вырождающегося уравнения (1′) при доказательстве используется возможность аппроксимации (с сохранением числа пересечений на $\partial\omega_T$) обобщенных решений u и v последовательностями классических положительных решений, на каждом из которых уравнение является равномерно параболичным [15—17].

Условие равенства моментов обострения решений u и v существенным образом используется в (II) и (III). Нетрудно проверить, что нарушение выводов каждого из этих утверждений, в силу достаточной регулярности решений, приводит к противоречию с условием совпадения времен существования u и v. Теоремы сравнения такого плана широко использовались в работах [15—17, 26—28], где можно найти дополнительные сведения.

В заключение этого пункта отметим, что понятие пересечения естественным образом определяется для симметричных решений многомерного уравнения (1), зависящих от $r=|x|$. Мы не будем специально формулировать соответствующую (вполне аналогичную предыдущей) теорему сравнения, и в дальнейшем при анализе неограниченных решений $u=u(t, |x|)$ при $N>1$ будем ссылаться на соответствующие одномерные утверждения.

3.5. Локализация неограниченных решений при $\beta\geqslant\sigma+1$. Ниже мы ограничимся анализом одномерной задачи Коши

$$u_t=(u^\sigma u_x)_x+u^\beta,\ t>0,\ x\in\mathbf{R}^1;\ \sigma>0,\ \beta>1; \tag{51}$$

$$u(0,\ x)=u_0(x)\geqslant 0,\ x\in\mathbf{R}^1;\ \sup u_0<+\infty, \tag{52}$$

где $u_0\not\equiv 0$ — финитная функция со связным носителем: $\omega(0)=\operatorname{supp} u_0\equiv\{x\in\mathbf{R}^1\,|\,u_0(x)>0\}=(h_-(0),\ h_+(0))\subset\mathbf{R}^1$, причем $u_0^{\sigma+1}$ равномерно непрерывна по Липшицу в $\mathbf{R}^1$. Тогда носитель неограниченного обобщенного решения $u(t,\ x)$ при каждом $t\in(0,\ T_0)$ также является ограниченным и связным: $\omega(t)\equiv\operatorname{supp} u(t,\ x)=(h_-(t),\ h_+(t))\subset\mathbf{R}^1$. При этом, в силу известных свойств решений уравнения с источником, $\omega(t)\subseteq\omega(t+\tau)$ при всех $t,\ t+\tau\in[0,\ T_0)$, $\tau>0$, так что $\operatorname{mes}\omega(t)\equiv h_+(t)-h_-(t)$ со временем не убывает.

В настоящее время подробно изучены дифференциальные и другие локальные свойства функций $h_\pm(t)$ (см. [83, 109, 123], интересные результаты получены для многомерного уравнения $u_t=\Delta u^{\sigma+1}$, $\sigma>0$ [90, 94, 123]). Нас в первую очередь будет интересовать поведение $h_\pm(t)$ при $t\to T_0^-(u_0)<+\infty$. Условия $|h_\pm(T_0^-)|<+\infty$ эквивалентны локализации (в строгом смысле) неограниченного решения. Это, как будет показано ниже, имеет место в S-($\beta=\sigma+1$) и LS-($\beta>\sigma+1$) режимах. При $1<\beta<\sigma+1$ (HS-режим, см. п. 3.6) $h_\pm(t)\to\pm\infty$ при $t\to T_0^-$ и локализация отсутствует.

Главный результат этого пункта сформулирован в следующих общих утверждениях [15].

Теорема 9. Пусть $\beta=\sigma+1$. Тогда неограниченное решение задачи Коши (51), (52) локализовано, причем

$$h_+(T_0^-)\leqslant h_+(0)+L_s,\quad h_-(T_0^-)\geqslant h_-(0)-L_s, \tag{53}$$

где $L_s=2\pi(\sigma+)^{1/2}/\sigma$ — фундаментальная длина S-режима, и, в частности, $\operatorname{mes}\omega(T_0^-)\leqslant\operatorname{mes}\omega(0)+2L_s$.

Оценки (53) показывают, что величина L_s действительно является *фундаментальной* (не зависящей от начального возмущения) характеристикой нелинейной среды. В соответствии с (53) каждый фронт тепловой структуры независимо от вида начального возмущения u_0 и времени существования $T_0=T_0(u_0)<+\infty$ может пройти расстояние, не большее фундаментальной длины L_s.

Теорема 10. Пусть $\beta>\sigma+1$ и $T_0<+\infty$ — время существования неограниченного решения задачи (51), (52). Тогда оно локализовано, причем

$$h_+(T_0^-)\leqslant h_+(0)+\xi^*T_0^m,\quad h_-(T_0^-)\geqslant h_-(0)-\xi^*T_0^m, \tag{54}$$

где $m=[\beta-(\sigma+1)]/2(\beta-1)$ и $\xi^*=\xi^*(\sigma,\beta)>0$ — постоянная.

Подчеркнем, что здесь, в отличии от S-режима, расстояние, которое может пройти фронт решения, зависит через величину $T_0=T_0(u_0)$ от начальной функции u_0. Оценки $T_0=T_0(u_0)$ сверху

получены в п. 1, оценку снизу легко получить сравнением с пространственно-однородным решением.

В дальнейшем будут доказаны и другие теоремы, уточняющие для специального вида $u_0(x)$ глубину проникновения тепловой волны. Отметим, что многие результаты без принципиальных изменений переносятся на многомерный случай.

3.5.1. Доказательство теоремы 9. Исследование эффекта локализации при $\beta=\sigma+1$ проводится путем сравнения с локализованным автомодельным решением $u_A=(T_0-t)^{-1/\sigma}\theta_s(x)$, где (см. п. 3.3.2)

$$\theta_s(x)=\begin{cases}\left[\dfrac{2(\sigma+1)}{\sigma(\sigma+2)}\cos^2\left(\dfrac{\pi x}{L_s}\right)\right]^{1/\sigma}, & |x|<L_s/2,\\ 0, & |x|\geqslant L_s/2,\end{cases} \tag{55}$$

так что $\operatorname{mes}\operatorname{supp} u_A=L_s$.

Докажем первую оценку (53); вторая устанавливается аналогично. Обозначим для удобства через $u_s(t, x; x_0, T_0)$ функцию $u_A=(T_0-t)^{-1/\sigma}\theta_s(x-x_0)$, локализованную в области $|x-x_0|<L_s/2$ и имеющую тот же, что и $u(t, x)$, момент обострения $t=T_0$. Положим $x_0=h_+(0)+L_s/2$, $x_1=x_0+L_s/2$.

Тогда, очевидно, $u_0(x)$ и $u_s(0, x; x_0, T_0)$ имеют лишь одно пересечение в точке $x=h_+(0)$, так что $N(0)=1$ и, следовательно, $N(t)\leqslant 1$ при всех $t\in(0, T_0)$. Покажем, что $h_+(t)\leqslant h_+(0)+L_s$. Предположим, что это не так и при некотором $t=t_1\in(0, T_0)$ $h_+(t_1)>h_+(0)+L_s$. Но тогда $u(t_1, x_1)>u_s(t_1, x_1; x_0, T_0)=0$ и $u(t_1, h_+(0))>u_s(t_1, h_+(0); x_0, T_0)=0$. Поэтому либо $N(t_1)\geqslant 2$, что противоречит утверждению (IV) в теореме сравнения, либо $N(t_1)=0$ и $\overline{\operatorname{supp}}\, u_s(t_1, x; x_0, T_0)\subset\operatorname{supp} u(t_1, x)$, что противоречит утверждению (III) (т. е. предположению о равенстве моментов обострения решений u и u_s). Этим завершается доказательство.

Сравнение с автомодельным решением u_A при $\beta=\sigma+1$ позволяет описать другие более тонкие свойства S-режимов с обострением.

3.5.2. Условие неизменности носителя неограниченного решения при $\beta=\sigma+1$. Носитель автомодельного решения (26), (25) не меняется в течение всего времени его существования $t\in(0, T_0)$. Ниже будет показано, что этим свойством обладает широкое множество других (неавтомодельных) решений, которые локализованы в области $\operatorname{supp} u_0$ их первоначального задания. В формулировке теоремы через $u_s(t, x; x_0, T_0)$ обозначено решение, введенное в п. 3.5.1.

Теорема 11. Пусть $\beta=\sigma+1$, $\operatorname{mes}\operatorname{supp} u_0>L_s$ и $T_0<+\infty$ — время существования решения задачи (51), (52). Пусть существует такое $\lambda_0>0$, что $u_s(0, x; x_0, \lambda_0)\leqslant u_0(x)$ в $\mathbf{R}^1$, где $x_0=h_+(0)-L_s/2$, и функции $u_0(x)$, $u_s(0, x; x_0, \lambda)$ пересекаются только один раз при всех $0<\lambda<\lambda_0$. Тогда $h_+(t)=h_+(0)$ для любых $t\in(0, T_0)$.

Любопытно, что для неподвижности точки правого фронта в течение всего времени обострения необходимо «нелокальное» условие на характер поведения u_0 только в его L_s-окрестности $(h_+(0)-(L_s, h_+(0))$; поведение $u_0(x)$ в остальной части пространства, т. е. при всех $x \leqslant h_+(0)-L_s$, не отражается на факте неподвижности фронта. Это подчеркивает универсальность такой характеристики нелинейной среды, как фундаментальная длина L_s S-режима, которая на этот раз выступает как своеобразный радиус эффективного влияния тепловых возмущений.

Объединяя теорему 11 с аналогичным утверждением о неподвижности левого фронта: $h_-(t) \equiv h_-(0)$, получаем множество u_0, которые порождают неограниченные решения с неизменным носителем [15].

Доказательство теоремы 11. Очевидно, что $T_0 = T_0(u_0) \leqslant \lambda_0$. Если $T_0 = \lambda_0$, то предположение о движении правого фронта в силу утверждения (III) из теоремы 8 приводит к противоречию. Итак, $T_0 < \lambda_0$. Тогда если $N(t)$ — число пересечений $u(t, x)$ и $u_s(t, x; x_0, T_0)$, $x_0 = h_+(0) - L_s/2$, то в условиях теоремы $N(0) = 1$ и, следовательно, $N(t) \leqslant 1$. Далее повторяются те же рассуждения, которые использовались при завершении доказательства теоремы 9.

3.5.3. Условие локализации на фундаментальной длине L_s. Ниже получены условия, при которых неограниченное решение за время обострения локализовано в области $\{|x| < L_s/2\}$, т. е. оба фронта решения за время его существования проходят суммарное расстояние, не превышающее $L_s - \operatorname{mes} \operatorname{supp} u_0 < L_s$. При этом предполагается, что

$$u_0(-x) = u_0(x) \text{ в } \mathbf{R}^1; \quad u_0(x) \text{ не возрастает при } x > 0. \tag{56}$$

В этих условиях $u(t, -x) \equiv u(t, x)$, $u_x(t, x) \leqslant 0$ при $x \in (0, h_+(t))$ и $\sup\limits_x u(t, x) \equiv u(t, 0)$.

Теорема 12. Пусть $\beta = \sigma + 1$, $\overline{\operatorname{supp} u_0} \subset \{|x| < L_s/2\}$ и выполнено (56). Пусть, кроме того, существует такое $\lambda_0 > 0$, что $u_s(0, x; 0, \lambda_0) \geqslant u_0(x)$ в $\mathbf{R}^1$, а $u_0(x)$ и $u_0(0, x; 0, \lambda)$ имеют ровно два пересечения при всех $\lambda > \lambda_0$. Тогда $|h_\pm(t)| \leqslant L_s/2$ при любых $t \in (0, T_0(u_0))$.

Теорема доказывается аналогично предыдущим. В сделанных предположениях $T_0 < \lambda_0$ и, следовательно, $u_s(0, x; 0, T_0)$ и $u_0(x)$ имеют ровно два пересечения: $N(0) = 2$, т. е. $N(t) \leqslant 2$. Но тогда либо $N(t) \equiv 2$ (что доказывает теорему), либо $N(t_1) = 0$ для некоторого $t_1 \in (0, T_0)$, что противоречит равенству моментов обострения двух различных решений.

3.5.4. Доказательство теоремы 10 (локализация в LS-режиме, $\beta > \sigma = 1$). В п. 3.3.5 показано, что при $\beta > \sigma + 1$ уравнение (51) не имеет автомодельного решения, способного, как в S-режиме, проявлять свойство строгой локализации. Однако можно

построить нижнее автомодельное решение с локализованной точкой фронта:

$$u_A^-(t, x) = (T_0 - t)^{-1/(\beta-1)}\,\theta_-(\xi), \quad \xi = x/(T_0 - t)^m, \tag{57}$$

$$(\theta_-^\sigma\theta_-')' - m\theta_-'\xi - \frac{1}{\beta-1}\,\theta_- + \theta_-^\beta = 0, \tag{58}$$

где $m = [\beta - (\sigma+1)]/2(\beta-1) > 0$.

Лемма 5. Пусть $\beta > \sigma + 1$. Тогда существует решение $\theta_-(\xi) > 0$ на $(-\xi^*, 0)$ уравнения (58) такое, что

$$\theta_-(0) = 0, \quad (\theta_-^\sigma\theta_-')(0) = 0, \tag{59}$$

причем $\theta_-(-\xi^*) = 0$.

Локальная разрешимость задачи (58), (59) при $\xi < 0$ устанавливается путем сведения ее к эквивалентному интегральному уравнению и анализа последнего с помощью теоремы Шаудера. Тот факт, что $\theta_-(\xi)$ обращается в нуль в некоторой точке $\xi = -\xi^* < 0$, вытекает из тождества, полученного после умножения (58) на $(\theta_-^\sigma\theta_-')(\xi)$ и интегрирования по допустимому интервалу $(\xi, 0)$, см. [15].

Положим теперь $\theta_-(\xi) = 0$ при $\xi > 0$. Тогда $\theta_-(\xi)$ является обобщенным решением уравнения (58) на $(-\xi^*, +\infty)$ и, следовательно, $u_A^-(t, x)$ в (57) — обобщенное решение уравнения (51) в области $(0, T_0) \times (x_*(t), +\infty)$ с подвижной левой границей $x_*(t) \equiv -\xi^*(T_0 - t)^m \to 0^-$, $t \to T_0^-$, на которой $u_A(t, x_*(t)) = 0$. Поэтому (57) проявляет локализацию в строгом смысле: точка правого фронта $x_ф(t) \equiv 0$ неподвижна, несмотря на неограниченный рост u_A^- в ее левой окрестности. Если дополнительно положить $\theta_-(\xi) = 0$ при $\xi < -\xi^*$, то, очевидно, u_A^- будет неограниченным нижним решением уравнения (51) в $(0, T_0) \times \mathbf{R}^1$ (отметим, что $(\theta_-^\sigma\theta_-')(-\xi^*) > 0$).

Обозначим через $u_{LS}^-(t, x; x_0, T_0)$ функцию $u_A^-(t, x - x_0)$ и положим $x_0 = h_+(0) + \xi^* T_0^m$, $T_0 = T_0(u_0)$ — время обострения $u(t, x)$. В области $(0, T_0) \times \{x_0 - \xi^*(T_0 - t)^m < x < +\infty\}$ пересечения $u(t, x)$ и u_{LS}^- могут возникать только за счет возникновения их на боковой границе $(0, T_0) \times \{x = x_0 - \xi^*(T_0 - t)^m\}$, так как при $t = 0$ $u_0(x)$ и $u_{LS}^-(0, x; x_0, T_0)$ в этой области не пересекаются. Но тогда по построению $N(t) \leqslant 1$ при всех $t \in (0, T_0)$, что, как мы ранее убедились, доказывает теорему.

С помощью нижнего решения u_A^- точно так же, как в случае S-режима, можно определить условия неподвижности фронта решения в течение всего времени обострения, а также другие свойства (см. [15]).

В заключение отметим, что $\xi^*(\sigma, \sigma+1) = L_s$, так что теорема 9 является частным случаем теоремы 10 при $\beta = \sigma + 1$ (когда $m \equiv [\beta - (\sigma+1)]/2(\beta-1) = 0$).

3.6. Нелокализованные неограниченные решения HS-режима, $1<\beta<\sigma+1$. В следующем утверждении с помощью теоремы сравнения получены точные оценки снизу и сверху длины носителя произвольного неограниченного финитного по x решения задачи (51), (52) при $\beta\in(1, \sigma+1)$.

Теорема 13. Пусть $1<\beta<\sigma+1$. Тогда решение задачи Коши (51), (52) не локализовано и, если $t=T_0(u_0)<+\infty$ — момент обострения, то справедливы оценки «снизу»

$$h_+(t)\geqslant h_-(0)+\xi_0T_0^m[(1-t/T_0)^m-1], \tag{60}$$

$$h_-(t)\leqslant h_+(0)-\xi_0T_0^m[(1-t/T_0)^m-1], \quad t\in(0, T_0), \tag{61}$$

где $m=[\beta-(\sigma+1)]/2(\beta-1)<0$ (и поэтому $h_\pm(t)\to\pm\infty$ при $t\to T_0^-$). Кроме того, справедливы оценки «сверху»

$$h_+(t)\leqslant h_+(0)+\xi_0T_0^m[(1-t/T_0)^m+1], \tag{62}$$

$$h_-(t)\geqslant h_-(0)-\xi_0T_0^m[(1-t/T_0)^m+1], \quad t\in(0, T_0). \tag{63}$$

Здесь $\xi_0=\xi_0(\sigma, \beta)>0$ — длина носителя финитной автомодельной функции $\theta_A(\xi)$, ($\xi_0=\operatorname{mes}\operatorname{supp}\theta_A<+\infty$), существование которой доказано в теореме 5, п. 3.3.4.

Сформулированные в теореме оценки означают, что

$$h_\pm(t)=\pm\xi_0(T_0-t)^m+O(1), \quad t\to T_0^-, \tag{64}$$

для любого финитного по x решения задачи (51), (52) при $\beta\in(1, \sigma+1)$. Из (64), в частности, непосредственно вытекает единственность автомодельной функции θ_A при $N=1$ (см. теорему 5 в п. 3.3.4) [16].

По способу доказательства теорема 13 практически не отличается от предыдущих. «Располагая» автомодельное решение u_A с моментом обострения $T_0=T_0(u_0)<+\infty$ сначала по одну, а потом по другую сторону $\operatorname{supp} u_0$ так, чтобы в каждом из случаев $N(0)=1$, в силу теоремы сравнения получаем, что $N(t)\leqslant 1$ при всех $t\in(0, T_0)$. Это приводит к оценкам $h_\pm(t)$ снизу и сверху. За подробностями мы отсылаем к работам [15, 16].

В заключение отметим, что отсутствие локализации при $\beta\in(1, \sigma+1)$ также устанавливается методом стационарных состояний в п. 8.1, где, например, показано, что в HS-режиме $u(t, x)\to+\infty$ при $t\to T_0^-$ всюду в $\mathbf{R}^1$.

3.7. Об асимптотической устойчивости неограниченных автомодельных решений. Главная цель этого пункта — доказать «структурную» устойчивость построенных автомодельных решений, т. е. установить условия, при которых асимптотическое поведение $u(t, x)$ при $t\to T_0^-$ описывается $u_A(t, x)$. Ранее уже обсуждались некоторые принципиальные трудности анализа пространственно-временной структуры неограниченных решений, которые возникают при отсутствии устойчивости решений по

отношению к малым возмущениям начальной функции. Поэтому в этом пункте мы не будем стремиться к максимальной общности, которая требует значительных усилий, направленных, в основном, на преодоление непринципиальных затруднений. На примере одномерной задачи Коши излагаются узловые моменты доказательства, использующего некоторые ограничения на вид начального возмущения u_0.

Всюду в дальнейшем будет рассматриваться задача (51), (52), и мы будем считать выполненными сформулированные в п. 3.5 ограничения на u_0 и, кроме того, условия (56). Тогда $u(t, x)$ — четное по x решение и $\sup\limits_x u \equiv u(t, 0)$.

Предварительно укажем оценки амплитуды неограниченных решений задачи (51), (52).

Лемма 6. Пусть $\sigma>0$, $\beta>1$. Тогда, если $T_0=T_0(u_0)<+\infty$, то

$$\sup_{x\in R^1} u(t, x) > \theta_н (T_0-t)^{-1/(\beta-1)}, \quad t\in[0, T_0); \quad \theta_н = (\beta-1)^{-1/(\beta-1)}. \tag{65}$$

Доказательство основано на сравнении финитного по x решения $u(t, x)$ с гомотермическим решением $v(t) = \theta_н (T_0-t)^{-1/(\beta-1)}$ (они обязаны пересекаться, т. е. $N(t)\geqslant 2$ при всех $t\in[0, T_0)$, откуда следует (65)).

Лемма 7. Пусть $\sigma>0$, $\beta>1$ и выполняются (56). Тогда, если $T_0=T_0(u_0)<+\infty$, то существует такая постоянная $\theta_*>\theta_H$, что

$$\sup_{x\in R^1} u(t, x) \equiv u(t, 0) < \theta_* (T_0-t)^{-1/(\beta-1)}, \quad t\in[0, T_0). \tag{66}$$

Доказательство леммы 7 можно найти в [15, 16] (см. также аналогичные по доказательству утверждения в [26—28]). Во всех трех случаях $\beta<\sigma+1$, $\beta=\sigma+1$, $\beta>\sigma+1$ оно проводится путем сравнения $u(t, x)$ с нижним автомодельным решением u_A^- вида

$$u_A^-(t, x) = (T_0-t)^{-1/(\beta-1)}\theta(|\xi|; \mu), \quad \xi = x/(T_0-t)^m, \tag{67}$$

где функция $\theta(\xi; \mu)$ всюду, где она положительна, является решением задачи Коши (42), (43).

Проведем для примера доказательство (66) в случае $\beta>\sigma+1$ (при $\beta\leqslant\sigma+1$ оно еще более упрощается). Как следует из доказательства предложения (а) теоремы 6, при всех достаточно больших $\mu>0$ функция $\theta(\xi; \mu)$ обращается в нуль в некоторой точке $\xi=\xi_\mu>0$ ($\theta(\xi; \mu)>0$ на $[0, \xi_\mu)$). При этом, в силу непрерывной зависимости $\theta^{\sigma+1}$ и $(\theta^{\sigma+1})_\xi'$ от μ в окрестности $\mu=+\infty$, справедливы оценки

$$\xi_\mu \sim \mu^{\frac{\sigma+1-\beta}{2}} \to 0, \quad |[\theta^{\sigma+1}(\xi_\mu; \mu)]'| \sim \mu^{\frac{\beta+\sigma+1}{2}}, \quad \mu\to+\infty$$

(это вытекает из условия $\theta(\xi; \mu)\sim V_\lambda^{1/(\sigma+1)}((\sigma+1)^{1/2}|\xi|)$, $\lambda=\mu^{\sigma+1}$ при $\mu\to+\infty$, см. п. 3.3.5). Поэтому всегда можно выбрать такое

достаточно большое $\mu=\theta_*$, чтобы во-первых, $\overline{\operatorname{supp} u_A^-}(0,x) \subset \operatorname{supp} u_0$ (тогда, очевидно, $\overline{\operatorname{supp} u_A^-}(t, x) \subset \operatorname{supp} u_A^-(0, x) \subset \operatorname{supp} u_0$ при всех $t \in (0, T_0)$) и, во-вторых, $u_0(x)$ и $u_A^-(0, x)$ имели ровно два пересечения. Тогда, в силу теоремы сравнения, $N(t) \equiv 2$ в области $(0, T_0) \times \operatorname{supp} u_A^-(t, x)$, что приводит к (66).

Замечание. Следуя указанной методике, нетрудно показать, что при $1<\beta<\sigma+1$ оценка (66) справедлива для произвольных финитных $u_0(x)$. Действительно, в этом случае $\xi_M \to +\infty$ при $\mu \to +\infty$. Поэтому в силу теоремы 13 (см. также (64)) можно указать такое $\mu=\theta_*$, что, во-первых, $\operatorname{supp} u(t, x) \subset \{|x| < \xi_\mu (T_0-t)^m\}$ при всех $t \in [0, T_0)$ и, во-вторых, $u_0(x) \leqslant u_A^-(0, x)$ в $\{|x| < \xi_\mu T_0^m\}$. Тогда, очевидно, $u(t, x) \leqslant u_A^-(t, x)$ в $\{|x| < \xi_\mu (T_0-t)^m\}$, что дает (66).

3.7.1. Асимптотическая устойчивость автомодельного решения S-режима ($\beta=\sigma+1$). При выполнении условий (56) единственным автомодельным решением, претендующим на то, чтобы быть асимптотически устойчивым, является следующее:

$$u_A(t, x)=(T_0-t)^{-1/\sigma}\theta_s(x), \quad t \in (0, T_0), \quad x \in \mathbf{R}^1, \tag{68}$$

где θ_s — функция (55). Она удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению (см. п. 3.3.2)

$$(\theta_s^\sigma \theta_s')' - \frac{1}{\sigma}\theta_s + \theta_s^{\sigma+1}=0, \quad x \in \mathbf{R}^1. \tag{69}$$

Особо подчеркнем, что $\theta=\theta_s$ является его единственным нетривиальным четным финитным и монотонным по x при $x>0$ решением.

Введем в соответствии со структурой автомодельного решения (68) автомодельную обработку неограниченного решения $u(t, x)$ задачи (51), (52), $\beta=\sigma+1$, со временем обострения $T_0=T_0(u_0)<+\infty$:

$$\theta(t, x)=(T_0-t)^{1/\sigma}u(t, x) \text{ в } (0, T_0) \times \mathbf{R}^1. \tag{70}$$

Асимптотическая (структурная) устойчивость автомодельного решения (68) означает следующее (см. [16]).

Теорема 14. Пусть $\beta=\sigma+1$ и выполняются условия (56). Тогда равномерно в $\mathbf{R}^1$

$$\theta(t, x) \equiv (T_0-t)^{1/\sigma}u(t, x) \to \theta_s(x), \quad t \to T_0^-. \tag{71}$$

Без труда проверяется, что функция $\theta=\theta(\tau, x)$ в новом времени $\tau=-\ln(1-t/T_0): [0, T_0) \to [0, +\infty)$ удовлетворяет задаче Коши

$$\theta_\tau=(\theta^\sigma\theta_x)_x - \frac{1}{\sigma}\theta + \theta^{\sigma+1}, \quad \tau>0, \quad x \in \mathbf{R}^1, \tag{72}$$

$$\theta(0, x)=\theta_0(x) \equiv T_0^{1/\sigma}u_0(x), \quad x \in \mathbf{R}^1. \tag{73}$$

Сопоставление уравнений (72) и (69) показывает, что (71) эквивалентно доказательству стабилизации при $\tau\to+\infty$ решения задачи (72), (73) к стационарному решению $\theta\equiv\theta_s(x)$. Главная трудность при этом заключается в том, что $\theta\equiv\theta_s$ — неустойчивое стационарное решение уравнения (72); устойчивыми здесь являются $\theta\equiv 0$ и, грубо говоря, $\theta=+\infty$ ($\theta\equiv\theta_s$ лежит между ними и, значит, неустойчиво). Соответствующие примеры приведены в [16, 32]. Стабилизацию к другим «стационарам» запрещает следующая

Лемма 8. В условиях теоремы 14 при всех $\tau>0$

$$\sup_{x\in R^1}\theta(\tau, x)>\sigma^{-1/\sigma},\quad \sup_{x\in R^1}\theta(\tau, x)<\theta_*; \tag{74}$$

$$\operatorname{supp}\theta(\tau, x)\subset[-l_0-L_S,\ l_0+L_S],\quad 2l_0=\operatorname{mes}\operatorname{supp}u_0. \tag{75}$$

Оценки (74) доказаны в леммах 6 и 7, включение (75) — в теореме 9. В силу (75) задача Коши (72), (73) эквивалентна краевой задаче в произвольной области $\Omega\supset(-l_0-L_s,\ l_0+L_s)$ с условием $\theta(\tau, x)=0$ на $R_+^1\times\partial\Omega$. Без труда выводятся оценки (см., например, [11, 125])

$$\begin{gathered}\theta^{1+\sigma/2}\in L^\infty(R_+^1;\ L^2(\Omega)),\quad (\theta^{1+\sigma/2})_\tau\in L^2(R_+^1\times\Omega),\\ \theta^{\sigma+1}\in L^\infty(R_+^1;\ H_0^1(\Omega)).\end{gathered} \tag{76}$$

При наличии оценок (74)—(76) стабилизация $\theta(\tau, x)$ в слабом смысле к некоторому стационарному решению уравнения (72) при $\tau=\tau_i\to+\infty$ вытекает из общих результатов [8, 84] с использованием того факта, что эквивалентная краевая задача имеет функцию Ляпунова

$$V(\theta)(\tau)=\int_\Omega\left\{\frac{(\theta^{\sigma+1})_x^2}{2(\sigma+1)}+\frac{(\sigma+1)}{\sigma(\sigma+2)}\theta^{\sigma+2}-\frac{1}{2}\theta^{2(\sigma+1)}\right\}dx,$$

которая не возрастает по τ на любых эволюционных траекториях. Формальные выкладки дают следующее:

$$\frac{d}{d\tau}V(\theta)(\tau)=-\frac{4(\sigma+1)}{(\sigma+2)^2}\int_\Omega(\theta^{1+\sigma/2})_\tau^2dx\leqslant 0.$$

При этом независимость предельной функции от выбора последовательности $\{\tau_i\}$ вытекает из единственности подходящего нетривиального стационарного решения $\theta\equiv\theta_s(x)$. Стабилизация в $C(\Omega)$ следует из более сильных оценок; методом С. Н. Бернштейна в форме [82] нетрудно показать, что $|(\theta^{\sigma+1})_x|\leqslant\text{const}$ в $R_+^1\times R^1$. Отсюда следует, что $\theta^{\sigma+1}(\tau, x)$ непрерывна по Гельдеру и по переменной τ в $R_+^1\times R^1$ [57, 100]. За подробностями мы отсылаем к [16] (см. другие примеры исследования стабилизации решений вырождающих уравнений в [84, 95, 118, 127]).

Замечание. В процессе доказательства теоремы 14 фактически построено множество притяжения W неустойчивого стацио-

нарного решения $\theta=\theta_s(x)$ в задаче Коши для (72) (если $\theta_0\in\mathscr{W}$, то $\theta(\tau,\cdot)\to\theta_s(\cdot)$ при $\tau\to+\infty$ всюду в $\mathbf{R}^1$). Оно имеет вид $\mathscr{W}=\{\theta_0=T_0^{1/\sigma}u_0(x)\,|\,u_0\geqslant 0$ удовлетворяет (56) и $T_0=T_0(u_0)<+\infty\}$. Очевидно, что $\mathscr{W}$ неограничено, например, в $C(\mathbf{R}^1)$, бесконечномерно и, разумеется, не плотно в C. Подчеркнем, что подобное неограниченное множество притяжения неустойчивого решения в принципе нельзя определить путем «линейного» анализа решений вблизи стационара (этим способом доказывается лишь существование функций $\theta_0\in\mathscr{W}$, лежащих в малой окрестности $\theta=\theta_S$, см., например, [106]). Несколько другой подход к построению $\mathscr{W}$ использовался в [120].

Приведем как следствие из (71) такой результат.

Следствие. В условиях теоремы 14, $u(t,x)\to+\infty$ при $t\to T_0^-$ в любой точке области локализации $\{|x|<L_s/2\}$.

При этом условие (71), вообще говоря, не запрещает неограниченный рост решения вне области локализации, который, однако, должен протекать со скоростью $o((T_0-t)^{-1/\sigma})$, т. е. медленнее, чем по автомодельному закону. Один из оптимальных с этой точки зрения результатов можно получить, объединяя теорему 14 и теорему 12 из п. 3.5.3., что дает следующее утверждение.

Теорема 15. В условиях теоремы 12 $u(t,x)\to+\infty$ при $t\to T_0^-$ всюду в $\{|x|<L_s/2\}$ и $u\equiv 0$ в $[0,T_0)\times\{|x|\geqslant L_s/2\}$. При этом горение во всех точках $x\in\mathbf{R}^1$ асимптотически приближается к автомодельному: $(T_0-t)^{1/\sigma}u(t,x)\to\theta_s(x)$, $t\to T_0^-$.

3.7.2. Об асимптотической устойчивости автомодельного *HS*-режима. Как показано ранее, при $1<\beta<\sigma+1$ уравнение (51) имеет единственное автомодельное неограниченное решение

$$u_A=(T_0-t)^{-1/(\beta-1)}\theta_A(\xi),\quad \xi=x/(T_0-t)^m;\quad m=\frac{\beta-(\sigma+1)}{2(\beta-1)},\tag{77}$$

$$(\theta_A^\sigma\theta_A')'-m\theta_A'\xi-\frac{1}{\beta-1}\theta_A+\theta_A^\beta=0,\quad \xi\in\mathbf{R}^1,\tag{78}$$

причем $\theta_A\not\equiv 0$ — четная функция, убывающая при $\xi\in(0,\xi_0)$ ($\xi_0=\mathrm{mes}\{\xi>0\,|\,\theta_A(\xi)>0\}$). Кратко охарактеризуем основные проблемы, которые возникают при доказательстве его асимптотической устойчивости.

Вводя обычным образом автомодельное представление решения $u(t,x)$ задачи (51), (52)

$$\theta(t,\xi)=(T_0-t)^{1/(\beta-1)}u(t,\xi(T_0-t)^m),$$

где $T_0=T_0(u_0)<+\infty$, получим в новом времени $\tau=-\ln(1-t/T_0)$ задачу Коши для $\theta=\theta(\tau,\xi)$:

$$\theta_\tau=(\theta^\sigma\theta_\xi)_\xi-m\theta_\xi\xi-\frac{1}{\beta-1}\theta+\theta^\beta,\quad \tau>0,\quad \xi\in\mathbf{R}^1,\tag{79}$$

$$\theta(0,\xi)=\theta_0(\xi)\equiv T_0^{1/(\beta-1)}u_0(\xi T_0^m),\quad \xi\in\mathbf{R}^1.\tag{80}$$

Для доказательства стабилизации $\theta(\tau, \xi)$ к стационарному решению $\theta \equiv \theta_A$ уравнение (79) необходимы специальные оценки $\theta(\tau, \xi)$. Пусть выполняются условия (56). Тогда в силу лемм 6 и 7 (п. 3.7) и оценок из теоремы 13 (п. 3.6), сразу получаем для всех $\tau \geqslant 0$ следующее:

$$\sup_{\xi \in \mathbf{R}^1} \theta(\tau, \xi) > (\beta - 1)^{-1/(\beta-1)}, \quad \sup_{\xi \in \mathbf{R}^1} \theta(\tau, \xi) < \theta_*; \tag{81}$$

$$\operatorname{supp} \theta(\tau, \xi) \subset [-\xi_0 - (l_0 + \xi_0 T_0^m) T_0^{-m} \exp(m\tau), \xi_0 + (l_0 + \xi_0 T_0^m) T_0^{-m} \exp(m\tau)] \to [-\xi_0, \xi_0], \quad \tau \to +\infty. \tag{82}$$

Последнее включение означает, что, как и в случае $\beta = \sigma + 1$, задача Коши эквивалентна краевой задаче в ограниченной области $\Omega \subset \mathbf{R}^1$ с условием $\theta = 0$ на $\mathbf{R}^1_+ \times \partial\Omega$. Методом С. Н. Бернштейна тогда устанавливается равномерная в $\mathbf{R}^1_+ \times \mathbf{R}^1$ гельдеровость функции $\theta^{\sigma+1}(\tau, \xi)$, поэтому стабилизация $\theta(\tau, \xi)$ при $\tau \to +\infty$ к единственному (см. теорему 5 в п. 3.3.4) стационарному решению $\theta = \theta_A(\xi)$ вытекает из существования функции Ляпунова $V(\theta)(\tau)$ с подходящими свойствами. Функция $V(\theta)$ строится в соответствии с общим подходом [8] (в явном виде она не выписывается). При построении V используются известные свойства двухпараметрического семейства решений стационарного уравнения (78). Доказательство стабилизации существенно использует равномерную ограниченность носителя обобщенного решения задачи Коши (77), (78).

3.7.3. Об устойчивости автомодельного LS-режима, $\beta > \sigma + 1$. Оставляя в силе все выкладки из п. 7.2, охарактеризуем основные проблемы, которые возникают при доказательстве асимптотической устойчивости автомодельного решения (77) при $\beta > \sigma + 1$.

Во-первых, $\operatorname{supp} \theta(\tau, \xi) \to \mathbf{R}^1$ при $\tau \to +\infty$, т. е. возможная предельная функция $\bar{\theta}(\xi)$ ($\theta(\tau, \xi) \to \bar{\theta}(\xi)$ при $\tau \to +\infty$ в $\mathbf{R}^1$) является нефинитной. Поэтому в отличии от S- и HS-режимов здесь пока ничто не запрещает стабилизацию $\theta(\tau, \xi)$ при $\tau \to +\infty$ к пространственно однородному решению[1] $\bar{\theta} \equiv (\beta - 1)^{-1/(\beta-1)}$. Эту трудность, кстати, можно обойти; в п. 3.8.2 получены условия на $u_0(x)$, при которых $u(t, x) \leqslant C_A |x|^{-2/[\beta-(\sigma+1)]}$ в $(0, T_0) \times (\mathbf{R}^1 \setminus \{0\})$, что эквивалентно неравенству $\theta(\tau, \xi) \leqslant C_A |\xi|^{-2/[\beta-(\sigma+1)]}$ в $\mathbf{R}^1_+ \times (\mathbf{R}^1 \setminus \{0\})$ (это, очевидно, запрещает стабилизацию $\theta(\tau, \cdot) \to (\beta - 1)^{-1/(\beta-1)}$ при $\tau \to +\infty$, равномерную на каждом компакте из $\mathbf{R}^1$). Однако дополнительные осложнения возникают при построении функции Ляпунова методом [8] и выводе соответствующих интегральных оценок.

---

[1] Это имеет место, например, в случае $\sigma = 0$; см. п. 4; § 4.

Во-вторых, пока не решен вопрос о единственности автомодельной функции $\theta_A(\xi)$ простейшего вида (что важно для независимости предельной функции от выбора последовательности $\tau_i \to +\infty$). Поэтому вопрос об асимптотической устойчивости автомодельного LS-режима остается открытым.

3.8. Асимптотика неограниченных решений LS-режима вблизи «сингулярной» точки. Здесь, для примера, проводится анализ многомерной задачи Коши (1), (2) при $\beta > \sigma + 1$ в предположении, что $u_0 = u_0(|x|)$ — ограниченная в $\mathbf{R}^N$ функция, причем $u_0^{\sigma+1}$ равномерно непрерывна по Липшицу в $\mathbf{R}^N$, u_0 — не обязательно финитная, $u_0(0) > 0$. Предполагается, что $x = 0$ — точка сингулярности неограниченного решения, т. е. существует такая последовательность $t_k \to T_0^-(u_0) < +\infty$, что $u(t_k, 0) \to +\infty$.

Главная задача заключается в выводе оценок $u(T_0^-, x)$ в окрестности $x = 0$ (в каком смысле следует понимать $u(T_0^-, x)$ будет определено в каждом конкретном случае). Будет показано, что предельное распределение, которое формирует автомодельное решение $u_A(T_0^-, x) = C_A |x|^{-2/[\beta-(\sigma+1)]}$, характерно для широкого класса неавтомодельных решений LS-режима.

3.8.1. Оценка снизу. Это проблема довольно точно может быть решена на основе метода стационарных состояний [13, 14, 17, 26], как возможности своеобразной «аппроксимации» эволюционных свойств решений на непрерывном по некоторому параметру «поле» стационарных решений. Общая характеристика этого метода исследования различных нелинейных эволюционных параболических задач дана в [24], применения к параболическим системам квазилинейных уравнений можно найти в [24, 25].

Обозначим через $\{U(|x|; U_0)\}$ семейство симметричных стационарных решений уравнения (1):

$$\begin{gathered} \frac{1}{r^{N-1}} (r^{N-1} U^\sigma U_r')_r' + U^\beta = 0, \quad r = |x| > 0; \\ U_r'(0; U_0) = 0, \quad U(0; U_0) = U_0, \end{gathered} \tag{83}$$

где $U_0 > 0$ — параметр семейства. Основные свойства функций $\{U\}$ указаны в лемме 4 (п. 3.3.3). В частности, если $\beta \in (1, (\sigma+1) \times \times (N+2)/(N-2)_+)$, то каждая из них обращается в нуль в точке $r_0(U_0) \equiv r_0(1) U_0^{[\sigma+1-\beta]/2} < +\infty$. Приведем также тождество

$$U(|x|; U_0) \equiv U_0 U(|x| U_0^{[\beta-(\sigma+1)]/2}; 1). \tag{84}$$

Доопределим $U(|x|; U_0)$ в области $r > r_0(U_0)$ тождественным нулем. Поскольку $U(|x|; U_0)$ не являются стационарными решениями в $\mathbf{R}^N$, их будет удобно называть стационарными состояниями. При $\beta \geqslant (\sigma+1)(N+2)/(N-2)_+$ функции $U(|x|; U_0) > 0$ — стационарные решения в $\mathbf{R}^N$.

Семейство функций $\{U|x|;\ U_0)\}$ образует на плоскости $\{|x|,\ U\}$ непрерывное по параметру $U_0>0$ «поле» стационарных состояний. При $\beta>\sigma+1$ общей характеристикой семейства $\{U\}$ является огибающая $L=L(r)$, $r>0$ к функциям $U(r;\ U_0)$ на плоскости $\{r,\ U\}$, которая определяется из условия: для любого $r>0$ существует такое $U_0>0$, что

$$L(r)=U(r;\ U_0),\quad L'(r)=U'_r(r;\ U_0). \tag{85}$$

Как будет показано ниже, вид огибающей $L(|x|)$ позволяет оценить структуру предельного распределения $u(T_0^-,\ x)$ вблизи сингулярной точки $x=0$ (см. [13, 17, 26]).

Лемма 9. Пусть $\beta>\sigma+1$. Тогда задача (85) имеет единственное решение

$$L(|x|)=C_0|x|^{-2/[\beta-(\sigma+1)]},\quad |x|>0,$$

где постоянная $C_0=C_0(\sigma,\ \beta,\ N)>0$ определяется из системы трансцендентных уравнений

$$C_0=\alpha_0^{2/[\beta-(\sigma+1)]}U(\alpha_0;\ 1),$$

$$-\frac{2}{[\beta-(\sigma+1)]}C_0=\alpha_0^{1+2/[\beta-(\sigma+1)]}U'_r(\alpha_0;\ 1),\quad \alpha_0>0. \tag{86}$$

При этом справедлива оценка

$$C_0>C_*=\left\{\frac{2N}{\beta-(\sigma+1)}\left[\frac{\beta-(\sigma+1)}{\beta}\right]^{\frac{\beta}{\sigma+1}}\right\}^{\frac{1}{\beta-(\sigma+1)}}>0. \tag{87}$$

Первая часть леммы доказывается непосредственно с использованием тождества (84). Отметим лишь, что касание $L(|x|)$ и $U(|x|;\ U_0)$ в соответствии с равенствами (85) осуществляется при $U_0=(\alpha_0/r)^{2/[\beta-(\sigma+1)]}$, $\alpha_0>0$ — постоянная в (86). Существование и единственность решения системы (86) вытекает из известных свойств функции $U(|x|;\ 1)$ (она выражается через специальную функцию математической физики). Остановимся подробнее на выводе (87) (см. [17, 26]). Используя оценку $r^{1-N}(r^{N-1}U^\sigma U')'=-U^\beta\geqslant -U_0^\beta$, без труда получаем, что

$$U(|x|;\ U_0)>U_0\left(1-r^2\frac{\sigma+1}{2N}U_0^{\beta-(\sigma+1)}\right)_+^{1/(\sigma+1)}\equiv U_-(|x|;\ U_0), \tag{84'}$$

$$0<r<(2N/(\sigma+1))^{1/2}U_0^{(\sigma+1-\beta)/2}.$$

Семейство функций $\{U_-\}$ очень простое и для него из тех же соображений легко строится огибающая следующего вида: $L_-(|x|)=C_*|x|^{-2/[\beta-(\sigma+1)]}$. Однако в силу (84′) $L_*(|x|)>L_-(|x|)$ в $\mathbf{R}^N\setminus\{0\}$, что дает (87).

Теорема 16. Пусть $\sigma+1<\beta<(\sigma+1)(N+2)/(N-2)_+$. Тогда в сделанных относительно $u_0=u_0(|x|)$ предположениях существует такое $\varepsilon>0$, что неограниченное решение задачи (1)

(2) удовлетворяет оценке снизу

$$u(T_0^-, x) \equiv \varliminf_{t \to T_0^-} u(t, x) \geqslant C_0 |x|^{-2/[\beta-(\sigma+1)]}, \quad x \in \{0 < |x| < \varepsilon\}. \quad (88)$$

Доказательство. Выберем $U_0^* > u_0(0)$ столь большим, чтобы, во-первых, $\{|x| \leqslant r_0(U_0)\} \subset \operatorname{supp} u_0$ при любых $U_0 \geqslant U_0^*$ и, во-вторых, $U(|x|; U_0)$ пересекалась с $u_0(|x|)$ по $|x|$ ровно в двух точках для всех $U_0 \geqslant U_0^*$. Положим $\varepsilon = r_0(U_0^*)$. Тогда, очевидно, $u(t, x) > 0 = U(|x|; U_0)$ при $|x| = r_0(U_0)$, если $U_0 \geqslant U_0^*$. В соответствии с теоремой сравнения число пересечений $N(t)$ различных решений $U(|x|; U_0)$ и $u(t, x)$ уравнения (1) в $\{r = |x| < r_0(U_0)\}$ таково, что $N(t) \leqslant 2$ при всех $t \in (0, T_0)$. Поскольку $x = 0$ — сингулярная точка, найдется такое $t_k \in (0, T_0)$, что $u(t_k, 0) > U_0$. Но тогда, в силу симметрии, $N(t_k) = 0$, и, следовательно, $u(t_k, x) \geqslant U(|x|; U_0)$ в $\mathbf{R}^N$. В силу принципа максимума, это же будет справедливо при всех $t \in (t_k, T_0)$. Учитывая теперь, что $U_0 \geqslant U_0^*$ выбрано произвольно, получаем:

$$u(T_0^-, x) \geqslant \sup_{U_0 \geqslant U_0^*} U(|x|; U_0) \equiv L(|x|), \quad 0 < |x| < \varepsilon, \quad (89)$$

что, в силу леммы 9, дает (88).

Отметим одно любопытное следствие из способа доказательства теоремы.

Следствие 1. В условиях теоремы 16 найдется такое $t_0 \in [0, T_0)$, что $u_t(t, 0) \geqslant 0$ при всех $t \in [t_0, T_0)$.

Таким образом, приведенное в начале параграфа определение сингулярной точки $x = 0$ в симметричном случае эквивалентно требованию $u(t, 0) \to +\infty$ при $t \to T_0^-$. Отметим, что при $N = 1$ это справедливо для произвольных решений. Доказательство в общем случае требует применения специальной теоремы сравнения, основанной на анализе характера пространственных пересечений различных решений и здесь не рассматривается (см. по этому поводу [27, 28] и § 4).

Следствие 2. В условиях теоремы 16 при любых $p \geqslant [\beta - (\sigma+1)]N/2$

$$\varliminf_{t \to T_0^-} \int_{\{|x| < \varepsilon\}} u^p(t, x)\, dx = +\infty. \quad (90)$$

Справедливость (90) прямо следует из (88). Ранее подобное утверждение было известно для случая $\sigma = 0$; см. [86, 103, 128], где (90) не доказано при «критическом» значении $p = [\beta - 1]N/2$, когда интеграл имеет в точке $x = 0$ слабую логарифмическую расходимость. Доказательство в [86, 128], использовало полулинейную структуру уравнения при $\sigma = 0$. С позиций метода стационарных состояний для вывода интегральных и поточечных

оценок $u(T_0^-, x)$ безразличен тип нелинейности в дифференциальном операторе уравнения; примеры приведены в [13, 17, 24].

Если применить метод стационарных состояний для исследования HS-режима, то получится следующий результат [19, 13]. Пусть $1<\beta<\sigma+1$, $u_0=u_0(|x|)\geqslant 0$ в $\mathbf{R}^N$, $u_0^{\sigma+1}$ — равномерно ограниченная, невозрастающая и непрерывная по Липшицу функция. Тогда $u(t, x)\to+\infty$ при $t\to T_0^-(u_0)<+\infty$ всюду в $\mathbf{R}^N$. При доказательстве используется тот факт, что при $\beta<\sigma+1$ $U(|x|; U_0)\to+\infty$ при $U_0\to+\infty$ всюду в $\mathbf{R}^N$. Поэтому справедливость сформулированного утверждения вытекает из такой же, как в (89), оценки

$$u(T_0^-, x)\geqslant \sup_{U_0>U_0^*} U(|x|; U_0)=+\infty, \quad x\in\mathbf{R}^N.$$

3.8.2. Оценка сверху. Покажем, что при определенных условиях оценка снизу (88) по характеру зависимости от $|x|$ вблизи $x=0$ является точной. Один пример уже известен — это автомодельное решение (20′), которое при $\sigma+1<\beta\leqslant(\sigma+1)N/(N-2)_+$, как показано в теореме 7, ограничено сверху: $u_A(t, x)<u(T_0^-, x)\equiv\equiv C_A|x|^{-2/[\beta-(\sigma+1)]}$ в $\mathbf{R}^N\setminus\{0\}$. С помощью этого результата ниже получена подобная оценка сверху для широкого класса $u_0(x)$, удовлетворяющих всем введенным ранее условиям.

Теорема 17. Пусть $1\leqslant\beta\leqslant(\sigma+1)N/(N-2)_+$, $T_0=T_0(u_0)<<+\infty$ и $u_0=u_0(|x|)$ пересекается по $r=|x|$ с функцией $T_0^{-1/(\beta-1)}\theta_A(|x|/T_0^m)$ (θ_A определена в теореме 6) ровно в двух точках, причем $u_0(0)>T_0^{-1/(\beta-1)}\theta_A(0)$. Пусть, кроме того, u_0 — критическая, т. е. $u_t\geqslant 0$ в $P[u]$. Тогда, если $x=0$ — сингулярная точка решения $u(t, x)$, то

$$u(t, x)<C_A|x|^{-2/[\beta-(\sigma+1)]} \text{ в } (0, T_0)\times(\mathbf{R}^N\setminus\{0\}). \tag{91}$$

Прежде, чем переходить к доказательству теоремы, покажем, что ограничения на u_0 в ее условиях не слишком обременительны. Что касается требования критичности $u_0(x)$, то этот вопрос решается весьма просто. Если например, $u_0\in C^2(\mathbf{R}^N)$, $u_0>0$ и

$$\mathbf{A}(u_0)\equiv\nabla(u_0^\sigma\nabla u_0)+u_0^\beta\geqslant 0 \text{ в } \mathbf{R}^N, \tag{92}$$

то, в силу принципа максимума, $u_t\geqslant 0$ в $(0, T_0)\times\mathbf{R}^N$, так как функция $z=u_t$ удовлетворяет «линейному» параболическому уравнению. Условию (92) удовлетворяет, например, $u_0(x)=\equiv A\exp(-\alpha|x|^2)$, если $A^{\beta-(\sigma+1)}\geqslant 2\alpha\exp\{[\beta-(\sigma+1)]/2(\sigma+1)\}$, $\alpha>0$. Другим примером критической функции является $u_0(x)=\equiv U(|x|; U_0)$ при любом $U_0>0$ (см. [14, 17, 26]).

Несколько сложнее проверяется условие наличия ровно двух пересечений $u_0(x)$ и автомодельной функции $u_A(0, x)$, где u_A

имеет тот же момент обострения. Не останавливаясь на этом подробно, отметим, что всем условиям теоремы удовлетворяет финитная функция $u_0=U(|x|;\ U_0)$, см. [17]. Заметим также, что требование критичности u_0 при $N=1$, вообще говоря, является лишним; см. об этом в п. 1, § 4.

Доказательство теоремы 17. Предположим, что (91) не выполнено и существуют такие $r_*>0$ и $t_*\in(0,\ T_0)$, что $u(t_*,\ r_*)\geqslant C_A r_*^{-2/[\beta-(\sigma+1)]}$. Тогда, в силу критичности, это же выполнено в $(t_*,\ T_0)\times\{|x|=r_*\}$. Рассмотрим в области $S_*=(t_*,\ T_0)\times\{|x|<r_*\}$ два решения u и u_A с одинаковым моментом обострения $t=T_0<+\infty$. При сделанных предположениях $N(t)\equiv 0$ в $[t_*,\ T_0)$, а поскольку на $(t_*,\ T_0)\times\{|x|=r_*\}$ — боковой границе S_* — справедлива оценка

$$\inf_{t\in(t_*,T_0)} u(t,\ x)\geqslant \sup_{t\in(t_*,T_0)} u_A(t,\ x),\quad |x|=r_*,$$

нетрудно показать, что существует такое малое $\tau>0$, что $u_A(t+\tau,\ x)\leqslant u(t,\ x)$ в $(t_*,\ T_0-\tau)\times\{|x|<r_*\}$. Это противоречит равенству моментов обострения решений u и u_A.

Следствие. В условиях теоремы 17 при любом $p\in(0,\ [\beta-(\sigma+1)]N/2)$ и $\varepsilon>0$

$$\int\limits_{\{|x|<\varepsilon\}} u^p(t,\ x)\,dx<C_A^p\int\limits_{\{|x|<\varepsilon\}} |x|^{-2p/[\beta-(\sigma+1)]}\,dx<+\infty,\quad t\in(0,\ T_0).$$

§ 4. Полулинейное параболическое уравнение $u_t=u_{xx}+u^\beta$

В этом параграфе излагаются некоторые результаты исследования задачи Коши для одномерного полулинейного параболического уравнения

$$u_t=u_{xx}+u^\beta,\ t>0,\ x\in\mathbf{R}^1;\ \beta=\mathrm{const}>1, \tag{1}$$

$$u(0,\ x)=u_0(x)\geqslant 0,\ x\in\mathbf{R}^1. \tag{2}$$

Многие из приведенных ниже результатов без особых изменений могут быть перенесены на случай многомерного уравнения $u_t=\Delta u+u^\beta$.

Эта задача имеет много общего со своим квазилинейным аналогом; поэтому главное внимание в дальнейшем будет уделено тем свойствам неограниченных решений, которых не было в квазилинейном случае. Условия возникновения неограниченных решений задачи Коши (1), (2) изучаются более двадцати лет; см., например, [93, 97, 108, 112, 113] и библиографию в обзоре в [21]. Не останавливаясь на этом подробно, отметим лишь, что при $1<\beta\leqslant 3$ всякое решение $u\not\equiv 0$ является неограниченным, а при $\beta>3$ существует класс глобальных решений, см. [63, 97].

На начальную функцию u_0 накладываются следующие ограничения:

$$\sup u_0 = M_1 < +\infty; \quad |u_0(x_1) - u_0(x_2)| \leqslant M_2 |x_1 - x_2|, \quad x_1, x_2 \in \mathbf{R}^1, \tag{3}$$

где M_1, M_2 — положительные постоянные.

Всюду в дальнейшем считаем $T_0 = T_0(u_0) < +\infty$.

4.1. Множество критичности. Сформулированная ниже теорема упрощает изложение последующих результатов.

Теорема 1. В сделанных предположениях существует такая постоянная $M_K = M_K(M_1, M_2) > 0$, что если $u(t_0, x_0) \geqslant M_K$, то $u_t(t, x_0) \geqslant 0$ при всех $t \in [t_0, T_0)$.

В частности это означает, что условия: существует такая последовательность $t_k \to T_0^- < +\infty$, что $u(t_k, x_0) \to +\infty$ при $k \to +\infty$ (условие того, что $x = x_0$ — точка сингулярности неограниченного решения), и $u(t, x_0) \to +\infty$ при $t \to T_0^-$ — эквивалентны.

Доказательство теоремы 1 [27] использует довольно тонкую теорему сравнения $u(t, x)$ с семейством стационарных решений $\{v(x) \equiv U(x-a;\ U_0),\ U_0 \in \mathbf{R}^1_+,\ a \in \mathbf{R}^1\}$, основанную на анализе характера пересечений по x функций u и v. Приблизительная формулировка этой теоремы сравнения такова: если $N(0) = 2$ при любых малых «C^1 — деформациях» $u_0(x)$ и $v(x)$, то в любой точке пересечения $x = x_0$, $w(t, x_0) \equiv u(t, x_0) - v(x_0) = 0$ выполняется условие $w_x(t, x_0) \neq 0$. В этой связи отметим, что решения уравнения (1) являются аналитическими по x [92], поэтому все пересечения при $t > 0$ являются изолированными (по x) точками.

4.2. Оценка амплитуды неограниченного решения сверху. Известно несколько подходов к выводу важной оценки амплитуды неограниченного решения сверху, см. [15, 16, 26—28, 96, 129, 130]. Самым общим является следующий результат [27, 28] (см. также [26]).

Теорема 2. Пусть выполнено (3) и $u_0(x) \to 0$ при $|x| \to +\infty$. Тогда существует такая постоянная $\mu_* = \mu_*(T_0, M_1, M_2) > 0$, что

$$u(t, x) < \mu_* (T_0 - t)^{-1/(\beta-1)} \text{ в } [0, T_0) \times \mathbf{R}^1. \tag{4}$$

Доказательство основано на сравнении (анализ характера пересечений) $u(t, x)$ с семейством построенных в [26, 27] неограниченных нижних автомодельных решений.

4.3. Оценка амплитуды снизу. Следующий результат непосредственно вытекает из теоремы 8 в § 3, см. утверждение (II). В качестве функции сравнения v берется пространственно однородное решение $v \equiv (\beta-1)^{-1/(\beta-1)} (T_0 - t)^{-1/(\beta-1)}$.

Теорема 3. В условиях теоремы 2

$$\sup_{x \in \mathbf{R}^1} u(t, x) > (\beta-1)^{-1/(\beta-1)} (T_0 - t)^{-1/(\beta-1)} \text{ в } [0, T_0). \tag{5}$$

4.4. Асимптотическое поведение неограниченных решений. Асимптотика $u(t, x)$ при $t \to T_0^- < +\infty$ в задаче Коши для полу-

линейного уравнения существенно другая по сравнению с той, которую следует ожидать в квазилинейном случае.

Теорема 4. Пусть выполнены (3) и, кроме того, $u_0(-x) = u_0(x)$ в $\mathbf{R}^1$, $u_0(x)$ не возрастает по x в $\mathbf{R}^1_+$. Тогда

$$\theta(t, \xi) \equiv (T_0 - t)^{1/(\beta-1)} u(t, \xi(T_0 - t)^{1/2}) \to \\ \to (\beta - 1)^{-1/(\beta-1)} \text{ при } t \to T_0^- \tag{6}$$

равномерно на каждом компакте по ξ из $\mathbf{R}^1$.

Доказательство [27, 28], в основном, проводится по той же схеме, которая использовалась в п. 3.7, § 3. Уравнение для автомодельного представления $\theta = \theta(\tau, \xi)$, $\tau = -\ln(1 - t/T_0)$ имеет вид

$$\theta_\tau = A(\theta) \equiv \theta_{\xi\xi} - \frac{1}{2}\xi\theta_\xi - \frac{1}{\beta-1}\theta + \theta^\beta, \quad \tau > 0, \quad \xi \in \mathbf{R}^1. \tag{7}$$

При сделанных предположениях $x = 0$ является точкой сингулярности решения $u(t, x)$, причем $\sup\limits_{x \in \mathbf{R}^1} u(t, x) \equiv u(t, 0)$. Тогда, в силу теоремы 2, решение θ задачи Коши для (7) является равномерно ограниченным: $\theta(\tau, \xi) < \mu_*$ в $\mathbf{R}^1_+ \times \mathbf{R}^1$, и методом С. Н. Бернштейна устанавливается равномерная ограниченность θ_ξ, а также ограниченность θ_τ на каждом множестве вида $[1, +\infty) \times \{|\xi| < l\}$. Теорема 3 тогда запрещает стабилизацию к тривиальному решению стационарного уравнения (7) $\theta \equiv 0$, так как (5) означает, что $\theta(\tau, 0) > \theta_H = (\beta - 1)^{-1/(\beta-1)}$ в $\mathbf{R}^1_+$. Важное значение при доказательстве (6) имеет следующая

Лемма 1. Функция $\theta \equiv \theta_H$ — единственное нетривиальное неотрицательное решение уравнения $\mathbf{A}(\theta) = 0$ в $\mathbf{R}^1$.

Для $\beta = 3$ она доказана в [104], при произвольных $\beta > 1$ — в [3].

Для завершения доказательства теоремы 4 теперь достаточно заметить, что (7) допускает функцию Ляпунова

$$V(\theta)(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\xi^2/4)\left(\frac{1}{2}\theta_\xi^2 + \frac{1}{2(\beta-1)}\theta^2 - \frac{1}{\beta+1}\theta^{\beta+1}\right) d\xi,$$

которая монотонна на эволюционных траекториях:

$$\frac{d}{d\tau} V(\theta)(\tau) = -\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\xi^2/4)\, \theta_\tau^2 d\xi \leqslant 0.$$

Из последнего равенства вытекает равномерная оценка ($C_1 > 0$ не зависит от $T > 1$)

$$\int_1^T \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\xi^2/4)\, \theta_\tau^2 d\xi d\tau \leqslant C_1.$$

Замечание 1. Как показано в работе [99], сформулированные в теореме 4 и лемме 1 утверждения характерны и для многомерной задачи

$$u_t=\Delta u+u^\beta,\ t>0,\ x\in\mathbf{R}^N. \tag{8}$$

При этом возникает проблема исследования разрешимости эллиптического уравнения (аналога одномерного $\mathbf{A}(\theta)=0$, см. (7)):

$$\Delta_\xi\theta-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial\theta}{\partial\xi_i}\xi_i-\frac{1}{\beta-1}\theta+\theta^\beta=0 \text{ в } \mathbf{R}^N.$$

В [99] установлено, что $\theta\equiv\theta_{\text{н}}$ является единственным нетривиальным решением при $1<\beta\leqslant(N+2)/(N-2)_+$. Основа доказательства этого интересного факта — вывод на основе техники [69, 70] специального энергетического тождества. При $\beta>(N+2)/(N-2)_+$ могут существовать нетривиальные решения $\theta(\xi)\to0$, $|\xi|\to+\infty$; пример такого решения построен в [22] для случая $\beta=2$ и $6<N<16$ (нижнее ограничение размерности пространства $N>6$ как раз связано с неравенством $\beta>(N+2)/(N-2)=2$ при $N=6$). Отметим, что при наличии оценок (4) и (5) теорема 4 вытекает из результата [99], где для доказательства стабилизации использовались близкие к [26, 28] методы.

Замечание 2. Возвращаясь от автомодельного представления $\theta(\tau,\xi)$ к $u(t,x)$, получаем, что теорема 4 дает представление об асимптотическом поведении неограниченного решения $u(t,x)$ на любых компактах вида $P_a(t)=\{|x|\leqslant a(T_0-t)^{1/2}\}$: $u(t,x)\cong\theta_{\text{н}}(T_0-t)^{-1/(\beta-1)}$ в $P_a(t)$. Это, конечно, не позволяет установить пространственно временную структуру $u(t,x)$ в окрестности точки $t=T_0^-$, $x=0$, так как определяет лишь амплитуду решения, но не его пространственную ширину. В [26] (ранее для случая $\beta=3$ в [104]) показано, что поведение $u(t,x)$ при $t\to T_0^-$ в больших по размеру областях $\{|x|<a(T_0-t)^{1/2}\times|\ln(T_0-t)|^{1/2}\}$ описывается *вырожденным приближенным автомодельным решением* с нетривиальной пространственной структурой

$$u_a(t,x)=(T_0-t)^{-1(\beta-1)}f_*(\eta),\quad \eta=x/(T_0-t)^{1/2}|\ln(T_0-t)|^{1/2}. \tag{9}$$

Функция u_a удовлетворяет уравнению без диффузии $u_t=u^\beta$, подстановка в которое выражения (9) после предельного перехода $t\to T_0^-$ приводит к следующему обыкновенному дифференциальному уравнению первого порядка для $f=f_*(\eta)$:

$$-\frac{1}{2}\eta f'_\eta-\frac{1}{\beta-1}f+f^\beta=0,\quad \eta\in\mathbf{R}^1.$$

Оно имеет целое семейство решений $f(\eta)=\{(\beta-1)+C\eta^2\}^{-1/(\beta-1)}$, $C>0$. Значение

$$C=C_*=(\beta-1)^2/4\beta, \tag{10}$$

которому отвечает функция $f_*(\eta)$ в (9), подбирается из довольно естественного требования аналитичности $\theta(\tau, \xi)$ в точке $\tau = +\infty$, $\eta = 0$.

Вопрос строгого обоснования асимптотики (9) остается открытым. Численная проверка проводилась в [26, 104]. В п. 4.6 приведен один результат, косвенно свидетельствующий в пользу асимптотики (9).

4.5. Локализация неограниченных решений задачи Коши. В этом пункте получены условия эффективной локализации неограниченных решений, т. е. ограниченности множества (области локализации)

$$\omega_L = \{x \in \mathbf{R}^1 \mid u(T_0^-, x) \equiv \overline{\lim_{t \to T_0^-}} u(t, x) = +\infty\}. \tag{11}$$

Теорема 5. Пусть выполнены условия (3) и, кроме того, существует такая постоянная $d > 0$, что

$$u_0(x) \leqslant d\,|x|^{-2/(\beta-1)} \text{ при всех достаточно больших } |x|; \tag{12}$$

$$u_0(x) \text{ монотонно убывает по } |x| \text{ при } |x| \to +\infty. \tag{13}$$

Тогда область локализации (11) ограничена.

Доказательство (см. [27, 28], а также [26]) основано на сравнении $u(t, x)$ со специальным нижним автомодельным решением уравнения (1) обычного вида:

$$u_A(t, x) = (T_0 - t)^{-1/(\beta-1)}\theta(\xi), \quad \xi = x/(T_0 - t)^{1/2},$$

где функция $\theta \geqslant 0$ удовлетворяет уравнению $\boldsymbol{A}(\theta) = 0$, $\boldsymbol{A}$ — оператор в (7). Оно не имеет нетривиального решения $\theta \equiv \theta_H$ в $\mathbf{R}^1$ (лемма 1), однако допускает специальные нижние решения, проявляющие свойство локализации.

Лемма 2 [26]. Для любого $d > 0$ найдется такое $C > d$, что уравнение $\boldsymbol{A}(\theta) = 0$ имеет в $(-\xi_0, +\infty)$, $\xi_0 > 0$ решение $\theta = \theta(\xi) > 0$, причем $\theta(-\xi_0) = 0$, $\theta'(-\xi_0) > 0$ и

$$\theta(\xi) = C\xi^{-2/(\beta-1)} + o(\xi^{-2/(\beta-1)}), \quad \xi \to +\infty. \tag{14}$$

В следующей лемме указаны простейшие свойства автомодельного решения

$$v(t, x; x_0) \equiv u_A(t, x - x_0) \equiv$$

$$\equiv (T_0 - t)^{-1/(\beta-1)}\theta((x - x_0)/(T_0 - t)^{1/2}), \tag{15}$$

которое строго положительно в области $(0, T_0) \times (\eta_1(t), +\infty) \equiv (0, T_0) \times \Omega(t; x_0)$, $\eta_1(t) = x_0 - \xi_0(T_0 - t)^{1/2}$, причем $v = 0$ на $(0, T_0) \times \partial\Omega$.

Лемма 3 [26]. Для любого фиксированного $t_0 \in [0, T_0)$

$$v(t_0, x; x_0)/x^{-2/(\beta-1)} \to C, \quad x \to +\infty; \tag{16}$$

для любого фиксированного $x > x_0$ существует предел

$$v(t, x; x_0) \to C(x - x_0)^{-2/(\beta-1)}, \quad t \to T_0^-; \tag{17}$$

всюду в $(0, T_0) \times \{x > x_0\}$ решение v — критическое ($v_t > 0$) и в силу (17)

$$v(t, x; x_0) < v(T_0^-, x; x_0) \equiv C|x - x_0|^{-2/(\beta-1)}. \tag{18}$$

Справедливость теоремы 5 вытекает из такого утверждения, в котором, для определенности, устанавливается ограниченность ω_L справа. Предварительно напомним, что в силу теоремы 1 решение задачи Коши является критическим в области $\{x \in \mathbf{R}^1, u > M_K\}$.

Лемма 4. В условиях теоремы 5 существует такая постоянная $C > d$ и $x_0 \in \mathbf{R}^1$, что

$$u(t, x) \leqslant \max\{C(x - x_0)^{-2/(\beta-1)}, M_K\}, \quad t \in (0, T_0), \quad x > x_0, \tag{19}$$

т. е. $\omega_L \cap \{x > x_0\} = \varnothing$.

Доказательство. В силу лемм 2 и 3, в семействе автомодельных решений (15) найдется такая функция $v(T_0 = T_0(u_0) < +\infty$ и $C > d$ в (14)), что $u_0(x)$ и $v(0, x; x_0)$ пересекаются в $\Omega(0; x_0)$ ровно в одной точке, т. е. $N(0) = 1$. Это обеспечивается условиями (12), (13). Тогда в силу теоремы сравнения (п. 3.4, § 3) $N(t) \leqslant 1$ при $t \in (0, T_0)$. Но тогда как нетрудно проверить, нарушение (19) хотя бы в одной точке $(t_*, x_*) \in (0, T_0) \times \{x > x_0\}$ будет означать, что (19) не выполняется всюду в $(t_*, T_0) \times \{x = x_*\}$, что противоречит равенству моментов обострения неограниченных решений u и v, рассматриваемых в области $(t_*, T_0) \times \{\eta_1(t) < x < x_*\}$. (подробное доказательство приведено в [27], аналогичная техника использовалась в [26, 28]).

4.6. Поведение неорганиченных решений вблизи сингулярной точки. Главная цель этого пункта — показать, что при определенных условиях неограниченное возрастание $u(t, x)$ при $t \to T_0^-(u_0) < +\infty$ имеет место лишь в одной точке (т. е. развивается LS-режим с обострением) и установить оценки предельного распределения $u(T_0^-, x)$ в окрестности сингулярной точки снизу и сверху.

4.6.1. Оценка снизу. Она может быть получена тем же способом, что и в квазилинейном случае, п. 3.8, § 3. В то же время наличие у каждого решения множества критичности (теорема 1) позволяет получить в данном случае более сильный результат.

Теорема 6. Пусть выполнены (3) и $x = 0$ — точка сингулярности решения задачи. Тогда существует такое $\varepsilon_0 > 0$, что

$$\max\{u(T_0^-, x), u(T_0^-, -x)\} \geqslant C_0|x|^{-2/(\beta-1)}, \quad x \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0) \setminus \{0\}, \tag{20}$$

где $C_0 = C_0(\beta) > 0$ — постоянная, причем $C_0 > C_* = (\beta - 1) \times (2\beta^{-\beta})^{1/(\beta-1)}$.

Доказательство, как и в квазилинейном случае, основано на сравнении $u(t, x)$ с семейством $\{U(|x|; U_0)\}$ стационарных решений уравнения (1). Огибающая $L=L(|x|)>0$ в $\mathbf{R}^1\setminus\{0\}$ к семейству $\{U\}$ определяется так же, как в п. 3.8.1, § 3, и указана в правой части неравенства (20).

Выберем величину $U_0^*>0$ столь большой, чтобы $U_0^*>M_1=\sup u_0$ и, кроме того, $U(|x|; U_0)$ при всех $U_0>U_0^*$ пересекалась с $u_0(x)$ равно в двух точках. Положим $\varepsilon_0=\max\{\varepsilon>0 \mid L(\varepsilon)\geqslant U_0^*,\ L(\varepsilon)\geqslant M_K\}$. Тогда для любого $x_*\in(-\varepsilon_0, \varepsilon_0)\setminus\{0\}$ будем иметь следующее: функция $U(|x|; U_0)$, где $U_0>0$ определяется из условия $L(|x_*|)=U(|x_*|; U_0)$ (т. е. огибающая $L=L(|x|)$, касается $U(|x|; U_0)$ в точках $x=\pm|x_*|$), такова, что число пересечений $u_0(x)$ и $U(|x|; U_0)$ есть $N(0)=2$. Тогда в силу теоремы сравнения $N(t)\leqslant 2$ при всех $t\in[0, T_0)$. В силу непрерывности $u(t, 0)$ по $t\in[0, T_0)$ найдется такое $t_0\in(0, T_0)$, что $u(t_0, 0)=U_0\equiv U(0; U_0)$. Но тогда, поскольку $N(t_0)\leqslant 2$, все пересечения $u_0(x)$ и $U(|x|; U_0)$ будут лежать либо при $x\geqslant 0$, либо при $x\leqslant 0$ и, следовательно, $u(t_0, x)\geqslant U(|x|; U_0)$ либо при $x<0$, либо при $x>0$. Во всяком случае получаем, что $\max\{u(t_0, x_*), u(t_0, -x_*)\}\geqslant L(|x_*|)\equiv C_0|x_*|^{-2/(\beta-1)}$. Пусть для определенности $u(t_0, x_*)\geqslant L(|x_*|)$. Но $L(|x_*|)\geqslant M_K$ по построению. Следовательно, $u_t(t, x_*)\geqslant 0$ при всех $t\in[t_0, T_0)$ (теорема 1), т. е. $u(t, x_*)\geqslant L(|x_*|)$ при всех $t\in[t_0, T_0)$, что доказывает (20).

Несколько иной вариант доказательства теоремы 6 приведен в [27]. Из (20) непосредственно вытекает такое

Следствие. В условиях теоремы 6 при любом $p\geqslant(\beta-1)/2$ и $\varepsilon>0$

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} u^p(t, x)\,dx\to+\infty, \quad t\to T_0^-. \tag{21}$$

Подобный результат ранее был получен для интервала значений $p>\max\{1, (\beta-1)/2\}$ (см. [86, 128]), не содержащего «критическое» $p=(\beta-1)/2$. Отметим, что справедливость неравенства типа (21) при $\varepsilon=+\infty$, $p\geqslant(\beta-1)/2$ удается доказать без специального выделения конкретной точки сингулярности [27].

4.6.2. Оценка сверху. Главная задача этого пункта — определить степень оптимальности оценки снизу (20) по характеру зависимости $u(T_0^-, x)$ от $|x|$. В отличие от квазилинейного случая, при $\sigma=0$ уравнение (1) не имеет локализованных автомодельных решений (лемма 1). Поэтому оценка $u(T_0^-, x)$ сверху не может быть выведена тем методом, который применялся в п. 3.8.2, §3. Для этой цели эффективным оказался подход, предложенный в [96]. Ниже будет получена, по-видимому, оптимальная (в рамках этого метода) оценка $u(T_0^-, x)$ сверху. Для простоты мы проведем исследование краевой задачи для (1) в области $(0, T_0)\times(-R, R)$, $R=\mathrm{const}>0$ с условиями

$u(t, -R) = u(t, R) = 0,\ t > 0;\ u(0, x) = u_0(x) \geqslant 0,\ x \in (-R, R)$ (22)
(задача такого типа рассматривалась в [96], где исследование проводилось для многомерного уравнения (8)). Предполагается, что $u_0 \in C^1([-R, R])$ и $T_0 = T_0(u_0) < +\infty$.

Идея [96] состоит в выводе оценки функции

$$w(t, x) = u_x + c(x) F(u),$$

где $c(x) \geqslant 0$, $F(u) \geqslant 0$ — некоторые подлежащие определению гладкие функции. Функция w удовлетворяет некоторому «линейному» (по w) параболическому уравнению и тогда, в силу принципа максимума, делается вывод о том, что $w \leqslant 0$ в $(0, T_0) \times \times (-R, R)$, если $w(0, x) \leqslant 0$, $w_x(t, \pm R) \lesseqgtr 0$ и, кроме того, применительно к уравнению (1)

$$\beta u^{\beta-1} F - u^\beta F'_u - 2c'_x F'_u F \geqslant 0, \quad F'' \geqslant 0, \quad c'' \geqslant 0 \tag{23}$$

при всех $u \geqslant 0$, $x \in [-R, R]$. Интегрирование неравенства $w \equiv u_x + + c(x) F(u) \leqslant 0$ при подходящем выборе функций c и F, как нетрудно проверить, позволяет получить оценку $u(T_0^-, x)$ сверху.

В [96] для этой цели выбирались $c = \varepsilon |x|^{1+\delta}$, $F(u) = u^\gamma$, где $1 < \gamma < \beta$, $\delta > 0$ — произвольное и $\varepsilon > 0$ достаточно мало. Легко проверить, что (23) тогда будут выполнены. Не останавливаясь на процедуре выбора подходящих начальных функций $u_0(x)$ и $\varepsilon > 0$ (чтобы $w(0, x) \leqslant 0$ и $w_x(t, \pm R) \leqslant 0$), отметим лишь, что интегрирование неравенства $u_x + \varepsilon |x|^{1+\delta} u^\gamma \leqslant 0$ по $(0, x)$ приводит к оценке

$$u(t, x) \leqslant \varkappa |x|^{-2/(\nu-1)}, \quad 1 < \nu < \beta, \tag{24}$$

где величина ν может быть, вообще говоря, сделана сколь угодно близкой к значению β^-; $\varkappa > 0$ в (24) зависит от ν, δ, ε и $u_0(x)$. По характеру зависимости от $|x|$ оценки $u(T_0^-, x)$ сверху (24) и снизу (20) довольно близки. «Зазор» между ними, как сейчас будет показано, можно сделать еще меньше.

Для этого сначала мы рассмотрим вместо (22) краевую задачу с условиями

$$u(t, \pm R) = A,\ t > 0;\ u(0, x) = u_0^*(x) \geqslant A,\ x \in (-R, R), \tag{25}$$

где $u_0^*(x) = A(2 - x^2/R^2)$, $A > 0$ — достаточно велико. Последнее обеспечивает неограниченность решения задачи, при этом $u(t, x) \geqslant A$ в $(0, T_0^*) \times (-R, R)$.

Теорема 7. Для любого $R > 0$ найдется такое $A > 0$, что решение задачи (25) является неограниченным, $T_0^* = T_0(u_0^*) < < +\infty$ и справедлива следующая асимптотически точная оценка:

$$u(T_0^-, x) \leqslant \left[\frac{(\beta-1)^2}{8\beta}\right]^{-1/(\beta-1)} |x|^{-2/(\beta-1)} |\ln|x||^{1/(\beta-1)}, \quad |x| \to 0. \tag{26}$$

Для доказательства в [28] было найдено точное по характеру зависимости $F(u)$ от u при $u \to +\infty$ решение системы неравенств (23). Оно имеет вид $c(x) = |x|/2\beta$, $F(u) = u^\beta / \ln u$ ($F''(u) \geqslant 0$ при $u \geqslant \exp[2/(\beta-1)]$). Тогда, интегрируя неравенство $u_x + xu^\beta/2\beta \ln u \leqslant 0$ по $(0, x)$, $x \in (0, R)$ и учитывая, что в силу теоремы 4 $u(t, 0) = (\beta-1)^{-1/(\beta-1)}(T_0 - t)^{-1/(\beta-1)} + o((T_0-t)^{-1/(\beta-1)})$ (в силу оценок (4) и (5) она справедлива и для краевой задачи (25), см. также общее утверждение в [98]), получаем следующую асимптотически точную при $t \to T_0^-$, $x \to 0$ оценку:

$$u(t, x) \leqslant [(T_0 - t)|\ln(T_0 - t)|]^{-1/(\beta-1)} \times$$
$$\times \left\{(\beta-1) + \frac{(\beta-1)^2}{4\beta}\left[\frac{|x|}{(T_0-t)^{1/2}|\ln(T_0-t)|^{1/2}}\right]^2\right\}^{-1/(\beta-1)} \times$$
$$\times \left\{\ln[(T_0-t)|\ln(T_0-t)| + \frac{(\beta-1)}{4\beta}x^2]\right\}^{1/(\beta-1)}. \qquad (27)$$

Полагая здесь $t = T_0^-$, приходим к (26).

Оценки сверху (26) и снизу (20) (она справедлива также для решения краевой задачи) теперь отличаются по характеру зависимости $u(T_0^-, x)$ от $|x|$ лишь слабо растущим при $|x| \to 0$ логарифмическим множителем. Неравенство (26) устанавливает, кроме того, оптимальность следствия из теоремы 6. Из (26) также вытекает такая оценка: в условиях теоремы 7 при любых $\alpha < -3/2$, $\varepsilon > 0$ — достаточно мало

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} u^{(\beta-1)/2}(T_0^-, x)\,|\ln u(T_0^-, x)|^\alpha dx < +\infty.$$

Замечание. Из (27) нетрудно получить такую оценку: на траекториях $\eta \equiv |x|/(T_0-t)^{1/2}|\ln(T_0-t)|^{1/2} = \mathrm{const}$ при $t \to T_0^-$ справедлива оценка

$$u(t, x) \leqslant (T_0-t)^{-1/(\beta-1)}\left\{(\beta-1) + \frac{(\beta-1)^2}{4\beta}\eta^2\right\}^{-1/(\beta-1)}. \qquad (28)$$

При этом справа возникает приближенное автомодельное решение u_a (см. (9) в п. 4.4), которое построено в [26], исходя из других соображений.

Переход от частного результата, сформулированного в теореме 7, к достаточно общим решениям краевой задачи (22) осуществляется с помощью теоремы сравнения. Например, справедлива

Теорема 8. Пусть $x = 0$ — точка сингулярности неограниченного решения задачи (22), функции $u_0(x)$ и $u_0^*(x)$ пересекаются ровно в двух точках, причем $T_0(u_0) = T_0(u_0^*) = T_0 < +\infty$. Тогда при всех достаточно малых $|x| > 0$ справедлива асимпто-

тически точная оценка:

$$\min\{u(T_0^-, x), u(T_0^-, -x)\} \leqslant$$
$$\leqslant \left[\frac{(\beta-1)^2}{8\beta}\right]^{-1/(\beta-1)} |x|^{-2/(\beta-1)} |\ln|x||^{1/(\beta-1)}.$$

По поводу способа доказательства см. п. 3.8.2, § 3, а также [27].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. Поиск общих принципов локализации, а также условий образования, самоподдержания и усложнения структур должен проводиться на содержательных моделях минимальной размерсти, не перегруженных деталями. Относительная простота модели позволяет разработать ряд новых математических методов изучения развитой нелинейной стадии эволюционных процессов. Вычислительный эксперимент позволяет проиграть сценарии нетривиального поведения открытой нелинейной системы.

2. Исследования простейшей модели теплопроводной среды оказались содержательными. В зависимости от соотношений показателей нелинейности среды (σ, β), ее нагрев может протекать в трех режимах. Наиболее интересным оказался LS-режим с обострением. Нагрев среды в этом режиме может приводить к простым и сложным диссипативным структурам, локализованным на фундаментальных длинах. Сложные структуры можно рассматривать как определенный способ существования простых структур, имеющих, вообще говоря, различные моменты обострения. Области локализации простых структур внутри сложной перекрываются таким образом, чтобы структуры синхронизовали свой темп роста — имели один общий момент обострения. Построение собственных функций автомодельной задачи обеспечивает все возможные типы такого согласования. Критерием «жизнеспособного» объединения частей в целое в такой среде является синхронизация процессов нагрева и диффузии тепла. При нарушении синхронизации наступает быстрое вырождение сложной структуры в простые.

3. Режимы с обострением и сопровождающие их явления локализации и образования структур имеют характер промежуточных асимптотик. Для проявления свойств локализации требуется рост по закону с обострением лишь на один, два порядка.

4. Асимптотическая стадия процессов в моделях, не допускающих инвариантно-групповых решений, может, как показано с помощью метода приближенных автомодельных решений, описываться инвариантно-групповыми решениями других уравнений.

5. Из анализа структур LS-режима с обострением следует, что процессы вблизи центра структур в определенном смысле

характерны для их состояния в прошлом, а процессы на периферии связаны с будущим. В *HS*-режиме с обострением места пространственного проявления прошлого и будущего меняются. Парадоксальным принципом построения диссипативных структур указанного типа является связь прошлого и будущего в пространственной структуре, существующей в настоящем.

6. Развитие понятий и методов исследования, установленных в процессе анализа явлений в нелинейных средах, может сыграть существенную роль для понимания тенденций эволюционных процессов в задаче получения спектра элементарных частиц в единой теории поля, объяснения и предсказания спектра биологических, экономических, социальных структур как продуктов самоорганизации процессов в соответствующих средах.

7. При таком подходе среда как целое содержит в своих материальных характеристиках в непроявленной, потенциальной форме все типы структур, которые могут в ней возникнуть и устойчиво или метастабильно существовать как асимптотики или своеобразные промежуточные «цели» эволюционного развития.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Адьютов М. М., Клоков Ю. А., Михайлов А. П.*, Исследование автомодельных структур в нелинейной среде. Ин-т прикл. мат. АН СССР. Препр., 1982, № 108, 26 с. (РЖМат, 1983, 3Б718)
2. —, *Клоков Ю. А., Михайлов А. П.*, Автомодельные тепловые структуры с сокращающейся полушириной. Дифференц. уравнения, 1983, *19*, № 7, 1107—1114 (РЖМат, 1983, 12Б727)
3. —, *Лепин Л. А.*, Отсутствие обостряющихся автомодельных структур в среде с источником при постоянной теплопроводности. Дифференц. уравнения, 1984, *20*, № 7, 1279—1281
4. *Бакирова М. И., Боршукова С. Н., Дородницын В. А., Свирщевский С. Р.*, О направленном распространении тепла в нелинейной анизотропной среде. Ин-т прикл. мат. АН СССР. Препр. 1985, № 182, 24 с.
5. *Баренблатт Г. И.*, О некоторых неустановившихся движениях жидкости и газа в пористой среде. Прикл. мат. и мех., 1952, *16*, № 11, 67—78
6. —, *Вишик М. И.*, О конечной скорости распространения в задачах нестационарной фильтрации жидкости и газа. Прикл. мат. и мех., 1956, *20*, № 3, 411—417 (РЖМат, 1957, 5615)
7. *Бейтмен Г., Эрдейи А.*, Высшие трансцендентные функции. Том I. М.: Наука, 1973, 294 с.
8. *Белоносов В. С., Зеленяк Т. И.*, Нелокальные проблемы в теории квазилинейных параболических уравнений. Новосибирск: Изд-во Новосиб. ун-та, 1976, 155 с.
9. *Вольперт А. И., Худяев С. И.*, О задаче Коши для квазилинейных вырождающихся уравнений второго порядка. Мат. сб., 1969, *78*, № 3, 374—396 (РЖМат, 1969, 9Б299)
10. —, —, Анализ в классах разрывных функций и уравнения математической физики. М.: Наука, 1975, 284 с. (РЖМат, 1975, 12Б761К)
11. *Галактионов В. А.*, Об одной краевой задаче для нелинейного параболи-

ческого уравнения $u_t = \Delta u^{\sigma+1} + u^{\beta}$. Дифференц. уравнения, 1981, *17*, № 5, 836—842
12. —, О некоторых свойствах бегущих волн в среде с нелинейной теплопроводностью и источником тепла. Ж. вычисл. мат. и мат. физ., 1981, *21*, № 4, 980—989 (РЖМат, 1981, 12Б592)
13. —, Об условиях локализации неограниченных решений квазилинейных параболических уравнений. Докл. АН СССР, 1982, *264*, № 5, 1035—1040 (РЖМат,, 1983, 10Б375)
14. —, О неразрешимым в целом задачах Коши для квазилинейных параболических уравнений. Ж. вычисл. мат. и мат. физ. 1983, *23*, № 5, 1072—1087 (РЖМат, 1984, 2Б582)
15. —, Доказательство локализации неограниченных решений нелинейного параболического уравнения $u_t = (u^{\sigma} u_x)_x + u^{\sigma}$. Дифференц. уравнения, 1985, *21*, № 1, 15—23
16. —, Асимптотическое поведение неограниченных решений нелинейного параболического уравнения $u_t = (u^{\sigma} u_x)_x + u^{\sigma+1}$. Дифференц. уравнения, 1985, *21*, № 7, 1126—1134
17. —, Асимптотика неограниченных решений нелинейного уравнения $u_t = (u^{\sigma} u_x)_x + u^{\sigma}$ вблизи «сингулярной» точки. Докл. АН СССР, 1986, *288*, № 6, 1293—1297
18. —, *Еленин Г. Г., Курдюмов С. П., Михайлов А. П.* Влияние выгорания на локализацию горения и образование структур в нелинейной среде. Ин-т Прикл. мат. АН СССР. Препр., 1979, № 27, 38 с. (РЖМат, 1979, 9Б333)
19. —, *Курдюмов С. П., Михайлов А. П., Самарский А. А.*, О неограниченных решениях задачи Коши для параболического уравнения $u_t = \nabla(u^{\sigma} \nabla u) + u^{\beta}$. Докл. АН СССР, 1980, *252*, № 6, 1362—1364 (РЖМат, 1980, 11Б432)
20. —, —, *Посашков С. А., Самарский А. А.*, Квазилинейное параболическое уравнение со сложным спектром неограниченных автомодельных решений. В сб.: Математическое моделирование (Процессы в нелинейных средах). М.: Наука, 1986, 142—182
21. —, —, *Самарский А. А.*, Об одной параболической системе квазилинейных уравнений. I. Дифференц. уравнения, 1983, *19*, № 12, 2123—2140 (РЖМат, 1984, 3Б514)
22. —, —, —, Об асимптотической устойчивости инвариантных решений нелинейных уравнений теплопроводности с источником. Дифференц. уравнения, 1984, *20*, № 4, 614—632 (РЖМат, 1984, 9Б345)
23. —, —, —, О приближенных автомодельных решениях одного класса квазилинейных уравнений теплопроводности с источником. Мат. сб., 1984, *124*, № 2, 163—188 (РЖМат, 1984, 10Б471)
24. —, —, —, О методе стационарных состояний для нелинейных эволюционных параболических задач. Докл. АН СССР, 1984, *278*, № 6, 1296—1300 (РЖМат, 1985, 2Б481)
25. —, —, —, Об одной параболической системе квазилинейных уравнений. II. Дифференц. уравнения, 1985, *21*, № 9, 1544—1559 (РЖМат, 1986, 2Б535)
26. —, *Посашков С. А.*, Уравнение $u_t = u_{xx} + u^{\beta}$. Локализация и асимптотическое поведение неограниченных решений. Ин-т прикл. мат. АН СССР. Препр., 1985, № 97, 30 с.
27. —. —, Новые варианты использования сильного принципа максимума для параболических уравнений и некоторые их приложения. Ин-т прикл. мат. АН СССР, Препр., 1985, № 167, 30 с.
28. —, Применение новых теорем сравнения к исследованию неограниченных решений нелинейных параболических уравнений. Дифференц. уравнения, 1986, *22*, № 7, 1165—1173
29. *Гленсдорф П., Пригожин И.*, Термодинамическая теория структуры, устойчивости и флуктуаций. М.: Мир, 1973, 280 с.

30. *Дородницын В. А.*, Групповые свойства и инвариантные решения уравнения нелинейной теплопроводности с источником или стоком. Ин-т прикл. мат. АН СССР. Препр., 1979, № 57, 31 с. (РЖМат, 1979, 9Б334)
31. —, Об инвариантных решениях уравнения нелинейной теплопроводности с источником. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1982, *22*, № 6, 1393—1400 (РЖМат, 1983, 3Б510)
32. —, *Еленин Г. Г., Курдюмов С. П.*, О некоторых инвариантных решениях уравнения теплопроводности с источником. Ин-т прикл. мат. АН СССР. Препр., 1980, № 31, 24 с. (РЖМат, 1980, 9Б399)
33. —, *Князева И. В., Свирщевский С. Р.*, Групповые свойства уравнения нелинейной теплопроводности с источником в двумерном и трехмерном случаях. Ин-т прикл. мат. АН СССР. Препр., 1982, № 79, 24 с. (РЖМат, 1983, 3Б513)
34. —, —, —, Групповые свойства уравнения анизотропной теплопроводности с источником. Ин-т прикл. мат. АН СССР. Препр., 1982, № 134, 20 с. (РЖМат, 1983, 5Б431)
35. —, —, —, Групповые свойства уравнения теплопроводности с источником в двумерном и трехмерном случаях. Дифференц. уравнения, 1983, *19*, № 7, 1215—1223 (РЖМат, 1983, 11Б535)
36. *Свирщевский С. Р.*, О группах Ли—Беклунда, допускаемых уравнением теплопроводности с источником. Ин-т прикл. мат. АН СССР. Препр., 1983, № 101, 28 с. (РЖМат, 1984, 5Б565)
37. *Дубинский Ю. А.*, Слабая сходимость в нелинейных эллиптических и параболических уравнениях. Мат. сб., 1965, *67*, № 4, 609—642 (РЖМат, 1967, 3Б314)
38. *Еленин Г. Г.*, Образование квазистационарных бегущих волн из неустойчивых потоков баротропного газа. Ин-т прикл. мат. АН СССР. Препр., 1977, № 126, 78 с.
39. —, *Крылов В. В., Полежаев А. А., Чернавский Д. С.*, Особенности формирования контрастных диссипативных структур. Докл. АН СССР, 1983, *271*, № 1, 84—88
40. —, *Курдюмов С. П.*, Условия усложнения организации нелинейной диссипативной среды. Ин-т прикл. мат. АН СССР. Препр., 1977, № 106, 80 с.
41. —, —, *Самарский А. А.*, Нестационарные диссипативные структуры в нелинейной теплопроводной среде. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1983, *23*, № 2, 380—390 (РЖМат, 1983, 9Б580)
42. —, *Плохотников К. Э.*, Об одном способе качественного исследования одномерного квазилинейного уравнения теплопроводности с нелинейным источником тепла. Ин-т прикл. мат. АН СССР. Препр., 1977, № 91, 29 с. (РЖМат, 1978, 4Б274 К)
43. *Зельдович Я. Б., Компанеец А. С.*, К теории распространения тепла при теплопроводности, зависящей от температуры. Сб., посвященный семидесятилетию академика А. Ф. Иоффе. М.: Изд-во АН СССР, 1950, 61—71
44. —, *Райзер Ю. П.*, Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. М.: Наука, 1966, 538 с.
45. *Змитренко Н. В., Курдюмов С. П., Михайлов А. П., Самарский А. А.*, Возникновение структур в нелинейных средах и нестационарная термодинамика режимов с обострением. Ин-т прикл. мат. АН СССР. Препр., 1976, № 74, 67 с.
46. *Ибрагимов Н. Х.*, К групповой классификации дифференциальных уравнений второго порядка. Докл. АН СССР, 1968, *183*, № 2, 174—177 (РЖМат, 1969, 4А568)
47. —, К теории групп преобразований Ли-Беклунда. — Мат. сб., 1979, *109*, № 2, 229—253 (РЖМат, 1979, 10А528)
48. —, Группы преобразований в математической физике. М.: Наука, 1983, 280 с. (РЖМат, 1983, 11А813 К)

49. *Иваницкий Г. Р., Кринский И. Ш., Сельков Е. Е.*, Математическая биофизика клетки. М.: Наука, 1978, 308 с.
50. *Калашников А. С.*, О дифференциальных свойствах обобщенных решений уравнений типа нестационарной фильтрации. Вест. МГУ. Мат., мех., 1974, № 1, 62—68 (РЖМат, 1974, 6Б369)
51. —, О характере распространения возмущений в задачах нелинейной теплопроводности с поглощением. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1974, *14*, № 4, 891—905 (РЖМат, 1974, 11Б425)
52. —, О влиянии поглощения на распространение тепла в среде с теплопроводностью, зависящей от температуры. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1976, *16*, № 3, 689—697 (РЖМат, 1976, 10Б394)
53. *Камке Э.*, Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1976, 703 с.
54. *Капцов О. В.*, Классификация эволюционных уравнений по законам сохранения. Функциональный анализ, 1982, *16*, вып. 1, 72—73 (РЖМат, 1982, 6Б616)
55. *Крешнер Р.*, О некоторых свойствах обобщенных решений квазилинейных вырождающихся параболических уравнений. Acta Math. Acad. Sci. Hungaricae, 1978, *32*, № 3—4, 301—330
56. *Колмогоров А. Н., Петровский И. Г., Пискунов Н. С.*, Исследование уравнения диффузии, соединенной с возрастанием количества вещества, и его применение к одной биологической проблеме. Бюлл. МГУ, 1937, *1*, № 6, 1—26
57. *Кружков С. Н.*, Результаты о характере непрерывности решений параболических уравнений и некоторые их применения. Мат. заметки, 1969, 6, № 1, 97—108 (РЖМат, 1969, 11Б382)
58. *Курдюмов С. П.*, Исследования локализации тепла и возникновения структур в нелинейных средах. Дифференц. уравнения и применения. Тр. 2. Конф., Руссе 29 июня — 2 июля, 1982. Руссе, 1982, 393—397 (РЖМат, 1983, 1Б570)
59. —, Собственные функции горения нелинейной среды и конструктивные законы построения ее организации. В кн.: Современные проблемы математической физики и вычислительной математики. М.: Наука, 1982, 217—243 (РЖМат, 1982, 11Б605)
60. —, *Куркина Е. С., Потапов А. Б., Самарский А. А.*, Архитектура многомерных тепловых структур. Докл. СССР, 1984, *274*, № 5, 1071—1075 (РЖМат, 1984, 8Б670)
61. —, *Малинецкий Г. Г., Повещенко Ю. А., Попов Ю. П., Самарский А. А.*, Взаимодействие диссипативных тепловых структур в нелинейных средах. Докл. АН СССР, 1980, *251*, № 4, 836—839
62. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.*, Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967, 437 с. (РЖМат, 1968, 8Б339К)
63. *Лионс Ж.-Л.*, Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М.: Мир, 1972, 587 с. (РЖМат, 1973, 1Б271 К)
64. *Николис Г., Пригожин И.*, Самоорганизация в неравновесных системах. М.: Мир, 1979, 512 с.
65. *Овсянников Л. В.*, Групповые свойства уравнения нелинейной теплопроводности. Докл. АН СССР, 1959, *125*, № 3, 492—495 (РЖМат, 1961, 10Б197)
66. —, Групповые свойства дифференциальных уравнений. Новосибирск: Изд-во Новосиб. ун-та, 1962, 246 с.
67. —, Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978, 416 с. (РЖМат, 1978, 11Б883 К)
68. *Олейник О. А., Калашников А. С., Чжоу Юй-линь*, Задача Коши и краевые задачи для уравнений типа нестационарной фильтрации. Изв. АН СССР. Сер. мат., 1958, *22*, № 5, 667—704 (РЖМат, 1959, 4707)
69. *Похожаев С. И.*, О собственных функциях уравнения $\Delta u+\lambda f(u)=0$. Докл. АН СССР, 1965, *165*, № 1, 36—39

70. —, О собственных функциях квазилинейных эллиптических задач. Мат. сб., 1970, *82*, № 2, 192—212 (РЖМат, 1970, 10Б305)
71. *Романовский Ю. М., Степанова Н. В., Чернавский Д. С.*, Математическая биофизика. М.: Наука, 1984, 304 с.
72. *Самарский А. А.* Математическое моделирование и вычислительный эксперимент, Вестн. АН СССР, 1979, № 5, 39—49
73. —, *Еленин Г. Г., Змитренко Н. В., Курдюмов С. П., Михайлов А. П.*, Горение нелинейной среды в виде сложных структур. Докл. АН СССР, 1977, *237*, № 6, 1330—1333
74. —, *Змитренко Н. В., Курдюмов С. П., Михайлов А. П.*, Тепловые структуры и фундаментальная длина в среде с нелинейной теплопроводностью и объемными источниками тепла. Докл. АН СССР, 1976, *227*, № 2, 321—324 (РЖМат, 1976, 8Б565)
75. *Свирежев Ю. М., Логофет Д. О.*, Устойчивость биологических сообществ. М.: Наука, 1978, 352 с.
76. *Свирщевский С. Р.*, Групповые свойства системы уравнений теплопроводности гиперболического типа. Ин-т прикл. мат. АН СССР. Препр., 1986, № 20, 22 с.
77. *Слинько М. Г.*, Проблемы теории химических реакторов. Химическая промышленность, 1984, № 5, 3—7
78. *Фролов И. Т.*, Жизнь и познание. М.: Мысль, 1981, 268 с.
79. *Хакен Г.*, Синергетика. М.: Мир, 1980, 404 с.
80. *Эбелинг В.*, Образование структур при необратимых процессах. М.: Мир, 1979, 279 с.
81. *Эйген М.*, Самоорганизация материи и эволюции биологических макромолекул. М.: Мир, 1973, 120 с.
82. *Aronson D. G.*, Regularity properties of flows through porous media. SIAM J. Appl. Math., 1969, *17*, № 4, 461—467
83. —, Regularity properties if flows through porous media: the interface. Arch. Ration. Mech. and Anal., 1970, *37*, № 1, 1—10
84. —, *Crandall M., Peletier L. A.*, Stabilization of solutions of a degenerate nonlinear diffusion problem. Nonlinear Anal., Theory, Meth. Appl., 1982, *6*, № 10, 1001—1022 (РЖМат, 1983, 3Б517)
85. —, *Weinberger H. F.*, Multidimensional nonlinear diffusion arising in popular genetics. Adv. Math., 1978, *30*, № 1, 33—76
86. *Ball J. M.*, Remarks on blow-up and nonexistence theorems for nonlinear evolution equations. Quart. J. Math., 1977, *28*, № 112, 473—486 (РЖМат, 1978, 8Б818)
87. *Berryman J. G., Holland C. J.*, Stability of the separable solution for fast diffusion. Arch. Ration. Mech. and Anal., 1980, *74*, № 4, 379—388 (РЖМат, 1981, 5Б508)
88. *Bertsch M., Kersner R., Peletier L. A.*, Positivity versus localization in degenerate diffusion equations. Nonlinear Anal., Theory, Meth. Appl., 1985, *9*, № 10, 987—1008
89. *Bluman G., Kumei S.*, On the remarkable nonlinear diffusion equation $(\partial/\partial x)[a(b+u)^{-2}(\partial u/\partial x)]-(\partial u/\partial t)=0$. J. Math. Phys., 1980, *21*, № 5, 1019—1023 (РЖМат, 1981, 1Б509)
90. *Caffarelli L. A., Friedman A.*, Regularity of the free boundary of gas flow in an n-dimensional porous medium. Indiana Univ. Math. J., 1980, *29*, № 3, 361—391 (РЖМат, 1981, 2Б445)
91. *Fokas A. S., Yortsos Y. C.*, On the exactly solvable equation $u_t=((\alpha u+\beta)^{-2}u_x)_x+\gamma(\alpha u+\beta)^{-2}u_x$ occuring in two-phase flow in porous media. SIAM J. Appl. Math., 1982, *42*, № 3, 318—332
92. *Friedman A.*, On the regularity of the solutions of nonlinear elliptic and parabolic systems of partial differential equations. J. Math. and Mech., 1958, *7*, № 1, 43—59 (РЖМат, 1959, 3832)
93. —, Remarks on nonlinear parabolic equations. In: Applications of Nonlinear Partial Differential Equations in Mathematical Physics. Providence, Rhode Island: Amer. Math. Soc., 1965, 3—23

94. —, Variational principles and free-boundary problems. New York: A Wiley — Interscience Publications, 1982, 707 p.
95. —, *Kamin S.*, The asymptotic behavior of gas in an n-dimensional porous medium. Trans. Amer. Math. Soc., 1980, *262*, № 2, 551—563 (РЖМат, 1981, 7Б495)
96. —, *McLeod B.*, Blow-up of positive solutions of semilinear heat equations. Indiana Univ. Math. J., 1985, *34*, № 4, 425—447 (РЖМат, 1986, 3Б553)
97. *Fujita H.* On the blowing up of solutions to the Cauchy problem for $u_t=\Delta u+u^{1+\alpha}$. J. Fac. Sci. Univ. Tokyo., 1966, Sect. IA, *13*, № 1, 109—124 (РЖМат, 1967, 11Б328)
98. *Gidas B., Spruck J.*, Global and local behavior of positive solutions of nonlinear elliptic equations. Commun. Pure and Appl. Math., 1981, *34*, № 5, 525—598
99. *Giga Y., Kohn R. V.*, Asypmtotically self-simmlar blow-up for semilinear heat equations. Commun. Pure and Appl. Math., 1985, *38*, № 2, 297—319 (РЖМат, 1986, 1Б631)
100. *Gilding B. H.*, Hölder continuity of solutions of parabolic equations. J. London Math. Soc., 1976, *13*, № 1, 103—106 (РЖМат, 1977, 1Б404)
101. *Haraus A., Weissler F. B.*, Non-uniqueness for a semilinear initial value problem. Indiana Univ. Math. J., 1982, *31*, № 2, 167—189 (РЖМат, 1982, 11Б438)
102. *Hayakawa K.*, On nonexistence of global solutions of some semilinear parabolic differential equations. Proc. Jap. Acad., 1973, *49*, № 7, 503—505 (РЖМат, 1974, 4Б341)
103. *Henry D.*, Geometric theory of semilinear parabolic equations. Lect. Notes Math., 1981, *840*, 348 p.
104. *Hocking L. M., Stewartson K., Stuart J. T.*, A non-linear instability burst in plane parallel flow. J. Fluid Mech., 1972, *51*, 705—735
105. *Ibragimov N. H.*, Sur l'équivalence des équations d'évolution, qui admettent une algèbre de Lie-Bäcklund infinie. C. r. Acad. sci. 1981, *293*, sér 1, № 5, 657—660
106. *Ito M.*, The conditional stability of stationary solutions for semilinear parabolic differential equations. J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, 1978, Sec. 1A, *25*, № 3, 263—275 (РЖМат, 1979, 11Б369)
107. *Joseph D. D., Lundgren T. S.*, Quasilinear Dirichlet problems driven by positive sources. Arch. Ration. Mech. and Anal., 1973, *49*, № 4, 241—269 (РЖМат, 1973, 9Б253)
108. *Kaplan S.*, On the growth of solutions of quasilinear parabolic equations. Commun. Pure et Appl. Math., 1963, *16*, № 3, 305—330 (РЖМат, 1964, 6Б312)
109. *Knerr B. F.*, The porous medium equation in one dimension. Trans. Amer. Math. Soc., 1977, *234*, № 2, 381—415 (РЖМат, 1978, 10Б414)
110. —, The behavior of the support of solutions of the equations of nonlinear heat conduction with absorption in one dimension. Trans. Amer. Math. Soc., 1979, *249*, 409—424 (РЖМат, 1980, 3Б337)
111. *Kobayashi K., Sirao T., Tanaka H.*, On the growing up problems for semilinear heat equations. J. Math. Soc. Japan, 1977, *29*, № 3, 407—424 (РЖМат, 1978, 10Б423)
112. *Levine H. A.*, Some nonexistence and instability theorems for solutions of formally parabolic equations of the form $Pu_t=-Au+F(u)$. Arch. Ration. Mech. and Anal., 1973, *51*, № 5, 371—386 (РЖМат, 1974, 3Б359)
113. —, Nonexistence of global weak solutions to some properly and improperly posed problems of mathematical physics: the method of unbounded Fourier coefficients. Math. Ann., 1975, *214*, № 3, 205—220 (РЖМат, 1975, 12Б403)
114. —, Sacks P. E., Some existence and nonexistence theorems for solutions of degenerate parabolic equations. J. Different. Equat., 1984, *52*, № 2, 135—161 (РЖМат, 1984, 12Б593)
115. Lie S., Über die Integration durch bestimmte Integrale von einer Klasser

linearer partiellen Differentialgleichungen. Arch. Math., 1881, *6*, 328—368
116. *Loewner C., Nirenberg L.*, Partial differential equations invariant under conformal or projective transformations. In Contrib. Analysis. New York-London: Acad. Press, 1974, 245—272 (РЖМат, 1975, 9Б132)
117. *Matano H.*, Nonincrease of lap-number of a solution for a one dimensional semilinear parabolic equation. J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, 1982, Sect 1A, *29*, № 2, 401—441 (РЖМат, 1983, 1Б462)
118. *Mottoni D., Schiaffino A., Tesei A.*, Attractivity properties of non-negative solutions for a class of nonlinear degenerate parabolic problems. Ann. mat. pura ed appl., 1984, *136*, № 1, 35—48 (РЖМат, 1985, 2Б484)
119. *Munier A., Burgan J. R., Guttierres J., Fijalkow E., Feix M. R.*, Group transformations and the nonlinear heat diffusion equation. SIAM J. Appl. Math., 1981, *40*, № 2, 191—207
120. *Ni W.-M., Sacks P. E., Tavantzis J.*, On the asymptotic behavior of solutions of certain quasilinear parabolic equations. J. Different. Equat., 1984, *54*, № 1, 97—120 (РЖМат, 1985, 7Б493)
121. —, *Sacks P.*, The number of peaks of positive solutions of semilinear parabolic equations. SIAM J. Math. Anal., 1985, *16*, 460—471 (РЖМат, 1986, 1Б626)
122. *Olver P. J.*, Evolution equations posessing infinity many symmetries. J. Math. Phys., 1977, *18*, № 6, 1212—1215 (РЖМат, 1977, 12Б609)
123. *Peletier L. A.*, The porous media equation. In: Applications of Nonlinear Analysis in the Physical Sciences. Boston/Melbourne: Pitman, 1981, 229—241.
124. *Sacks P. E.*, The initial and boundary value problem for a class of degenerate parabolic equations. Commun. Part. Differ. Equat., 1983, *8*, № 7, 693—733 (РЖМат, 1983, 11Б564)
125. —, Global behavior for a class of nonlinear evolution equations. SIAM J. Math. Anal., 1985, *16*, № 2, 233—250 (РЖМат, 1985, 12Б464)
126. *Sattinger D. H.*, On the total variation of solutions of parabolic equations. Math. Ann., 1969, *183*, № 1, 78—92 (РЖМат, 1970, 6Б362)
127. *Schatzman M.*, Stationary solutions and asymptotic behavior of a quasilinear degenerate parabolic equations. Indiana Univ. Math. J., 1984, *33*, № 1, 1—29 (РЖМат, 1984, 12Б581)
128. *Weissler F. B.*, Local existence and nonexistence for semilinear parabolic equations in L^p, Indiana Univ. Math. J., 1980, *29*, № 1, 79—102 (РЖМат, 1981, 1Б504)
129. —, Single point blow-up for a semilinear initial value problem. J. Different. Equat., 1984, *55*, № 2, 204—224 (РЖМат, 1985, 7Б487)
130. —, An L^∞ blow-up estimate for a nonlinear heat equation. Commun. Pure and Appl. Math., 1985, *38*, № 3, 291—295 (РЖМат, 1986, 1Б632)