

Член-корреспондент АН СССР С.П. КУРДЮМОВ,  
С.А. ПОСАШКОВ, академик А.А. САМАРСКИЙ, А.В. СИНИЛО

### НЕСТАЦИОНАРНЫЕ ТЕПЛОВЫЕ СТРУКТУРЫ В НЕЛИНЕЙНОЙ СРЕДЕ СО СТОКАМИ ТЕПЛА

1. В работе исследуется эволюция конечных возмущений (понижений) температуры на некотором температурном фоне в охлаждающейся среде. Процесс изучается в рамках задачи Коши для квазилинейного уравнения

$$(1) \quad u_t = (u^\sigma u_x)_x - u^\beta, \quad t > 0, \quad x \in R^1 = (-\infty, +\infty),$$

$$(2) \quad u(0, x) = u_0(x) > 0, \quad u_0 \in C(R^1), \quad \lim_{|x| \rightarrow +\infty} u_0(x) > 0,$$

$\sigma < 0, \beta < 0$  — фиксированные постоянные, характеризующие зависимость коэффициента теплопроводности  $k(u) = u^\sigma$  и мощности объемного поглощения тепла  $Q(u) = u^\beta$  от температуры  $u = u(t, x) \geq 0$ .

Уменьшение коэффициента теплопроводности с ростом температуры свойственно, например, оптическим кристаллам, некоторым полупроводниковым кристаллам и органическим жидкостям. Указанная в (1) зависимость коэффициента теплопроводности от температуры встречается также в задачах физики плазмы ("быстрая диффузия" [1]).

Известно, что наличие стоков тепла в среде может явиться причиной локализации тепловых возмущений (см., например, [2, 3] и обзор в [4]). При этом в большинстве рассматриваемых задач объемное охлаждение приводит к выравниванию неоднородностей температуры к некоторому (чаще всего к нулевому) фону.

Эволюция возмущений, описываемая уравнением (1), имеет принципиально иной характер, и, как будет показано ниже, задача (1), (2) есть простейшая модель существующего нестационарного ("сингулярного" по времени) теплового диссипативного процесса полного остывания за конечное время. В этом смысле свойства решений задачи (1), (2) наиболее близки к свойствам решений задачи Коши для уравнения

$$(3) \quad u_t = (u^{\sigma'} u_x)_x + u^{\beta'}, \quad \sigma' > 0, \quad \beta' > 1; \quad t > 0, \quad x \in R^1,$$

которое исследовалось в ряде работ (см., например, [5–8]). Характерной особенностью этого уравнения является наличие у него "сингулярных" по времени автомодельных решений, развивающихся в режиме с обострением:

$$\sup_{x \in R^1} u(t, x) \rightarrow +\infty \quad \text{при} \quad t \rightarrow T_0^- < +\infty$$

( $T_0$  — время обострения). В зависимости от параметров среды  $\sigma', \beta'$  возможны различные (по характеру распространения волны горения) режимы горения среды.

Ниже, как и в случае уравнения (3), будет показано существование различных "сингулярных" по времени процессов поглощения тепла в модели (1), (2).

Существование и единственность решения задачи (1), (2) установлены в [9, 10]. Простейшие проявления эффекта полного остывания изучались ранее в [3, 9, 11].

2. Для удобства изложения вместо (1) будем рассматривать уравнение

$$(4) \quad u_t = (|u|^\sigma u_x)_x - |u|^{\beta-1} u,$$

совпадающее с (1) при  $u \geq 0$ .

Уравнение (4) формально допускает автомодельные решения вида

$$(5) \quad u_A(t, x) = (T_0 - t)^{-1/(\beta-1)} \theta(\eta), \quad \eta = x(T_0 - t)^{-\alpha}, \quad \alpha = \frac{\beta - (\sigma + 1)}{2(\beta - 1)},$$

$T_0 < +\infty$  — время существования решений. Решения вида (5) "сингулярны" по времени в том смысле, что  $\inf_{x \in R^1} u_A(t, x) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow T_0^-$ . Функция  $\theta(\eta) > 0$  в (5)

удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению

$$(6) \quad \frac{d}{d\eta} \left( |\theta|^\sigma \frac{d\theta}{d\eta} \right) - \alpha \eta \frac{d\theta}{d\eta} - \frac{1}{\beta - 1} \theta - |\theta|^{\beta-1} \theta = 0, \quad \eta > 0,$$

для которого поставим краевые условия

$$(7) \quad \theta'(0) = 0, \quad \theta(+\infty) = +\infty.$$

Последнее условие означает, что в автомодельной постановке эволюция возмущения температуры рассматривается "на бесконечном" фоне.

Считая в дальнейшем  $\beta < 0$  и  $\sigma + 1 < 0$ , преобразуем задачу (6), (7) заменой  $\varphi(\xi) = (1 - \beta)^{(\sigma+1)/(\beta-1)} |\theta|^\sigma \theta$ ,  $\xi = \eta(1 - \beta)^{-\alpha}$  к виду

$$(8) \quad \varphi'' + \frac{1}{2}(\beta - \sigma - 1)\xi |\varphi|^{-\sigma/(\sigma+1)} \varphi' + (\sigma + 1)\varphi(|\varphi|^{-\sigma/(\sigma+1)} - |\varphi|^{\beta-\sigma-1}/(\sigma+1)) = 0, \quad \xi > 0,$$

$$(9) \quad \varphi'(0) = 0, \quad \varphi(+\infty) = 0.$$

Для доказательства разрешимости (8), (9) нам удобнее рассматривать семейство задач Коши для уравнения (8), решения которых  $\varphi = \varphi(\xi; \mu)$  удовлетворяют условиям

$$(10) \quad \varphi'(0; \mu) = 0, \quad \varphi(0; \mu) = \mu \neq 1,$$

где  $\mu$  — параметр семейства. Далее будем искать такие значения  $\mu > 0$ , при которых решения задачи (8), (10) положительны и удовлетворяют второму условию в (9).

Укажем некоторые простые свойства решений задачи (8), (10) при  $\beta < \sigma + 1 < 0$  (доказательство их приведено в [12]).

**Л е м м а 1.** Решения задачи (8), (10) бесконечно продолжаемы; если существует  $\lim_{\xi \rightarrow +\infty} \varphi(\xi; \mu) = A$ , то  $A = 0$ .

Следуя идее [6, 7], проведем "линеаризацию" уравнения (8) относительно пространственно однородного решения  $\varphi \equiv 1$ . Полагая  $\varphi(\xi; \mu) = 1 + \epsilon z(\xi; \mu)$ ,  $\mu = 1 + \epsilon z_0$  ( $\epsilon, z_0$  — некоторые постоянные), преобразуем задачу (8), (10) к виду

$$(11) \quad z'' + \frac{1}{2}(\beta - \sigma - 1)\xi z' + (1 - \beta)z = \Phi(z, z', \epsilon), \quad \xi > 0, \\ z(0; \epsilon) = z_0 \neq 0; \quad z'(0) = 0.$$

Здесь  $\Phi(z, z', \epsilon)$  — непрерывно дифференцируемая по всем аргументам функция, обладающая тем свойством, что  $\Phi(z, z', \epsilon) \rightarrow 0$  при  $\epsilon \rightarrow 0$ .

**Л е м м а 2.** Решения  $z = z(\xi; \epsilon)$  задачи (11) на любом компакте  $K \equiv [0, \xi_k]$  непрерывно зависят от параметра  $\epsilon$  в окрестности  $\epsilon = 0$ .

Другими словами, поведение  $z(\xi; \epsilon)$  на  $K$  при малых  $\epsilon$  описывается функцией  $z(\xi; 0)$  — решением вырожденного гипергеометрического уравнения ((11) при  $\epsilon = 0$ ). В случае  $\beta < \sigma + 1 < 0$  функция  $z(\xi; 0)$  имеет немонотонный характер. Число точек локального экстремума у  $z(\xi; 0)$  при  $\xi > 0$  равно  $N = -[-a] - 1$ , где  $a = = (\beta - 1)/(\beta - \sigma - 1) > 1$ ,  $[\cdot]$  — целая часть числа (см. [13]).

Введем следующие множества:

$W_i = \{\mu > 1 \mid \text{решение задачи (8), (10) положительно на некотором отрезке}$

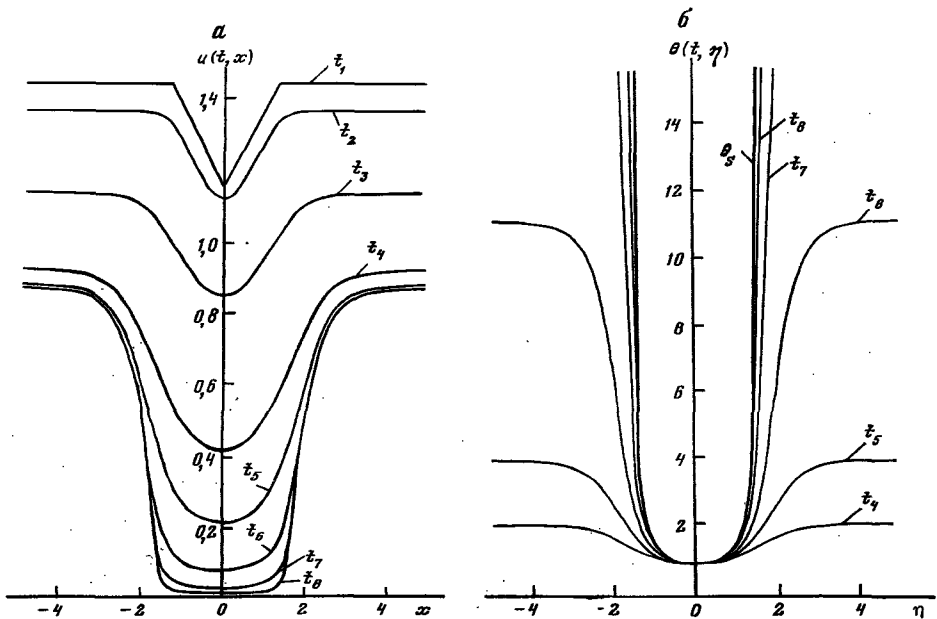


Рис. 1. Результаты расчета задачи (1), (2) в  $S$ -режиме (а) ( $\sigma = -3$ ,  $\beta = -2$ ;  $t_1 = 0$ ,  $t_2 = 0,15$ ,  $t_3 = 0,50$ ,  $t_4 = 0,720$ ,  $t_5 = 0,752$ ,  $t_6 = 0,7577$ ,  $t_7 = 0,75804$ ,  $t_8 = 0,75805$ ) и автоматическая обработка результатов расчета (б); функция  $\theta_S(\eta)$  — аналитическое решение (12) при  $\sigma = -3$ ,  $\beta = -2$

$[0, \xi_*]$  и имеет на этом отрезке не менее  $i$  ( $i \leq [(N+1)/2]$ ) точек минимума};  $U_i = \{0 < \mu < 1 \mid$  решение задачи (8), (10) положительно на некотором отрезке  $[0, \xi_*]$  и имеет на этом отрезке не менее  $i$  ( $i \leq [N/2]$ ) точек минимума (если  $N \geq 2$ )}.

Без труда проверяются следующие утверждения (см. [8, 12]).

**Л е м м а 3.** Множества  $W_i \neq \emptyset$  и ограничены сверху, и если  $N \geq 2$ , то множества  $U_i \neq \emptyset$  и ограничены снизу.

**Л е м м а 4.** Существует такое значение  $\mu = \mu_* < 1$ , что для любых  $0 < \mu < \mu_*$  и любого  $0 \leq \xi_0 < +\infty$  решение задачи Коши для уравнения (8) с условиями  $\varphi(\xi_0; \mu) = \mu$ ,  $\varphi'(\xi_0; \mu) = 0$  положительно на некотором интервале  $(\xi_0, \xi_1)$ ,  $\varphi(\xi_1; \mu) = 0$  и не имеет на этом интервале точек минимума.

Используя леммы 1–4 и методику [8], можно доказать существование положительных решений задачи (8), (9).

**Т е о р е м а.** Задача (8), (9) при  $\beta < \sigma + 1 < 0$  имеет не менее  $N = -[a] - 1 \geq 1$ ,  $a = (\beta - 1)/(\beta - \sigma - 1) > 1$ , различных положительных решений  $\varphi = \varphi(\xi; \mu_i)$ , где  $\mu_i = \sup W_i$  ( $i \leq [(N+1)/2]$ ) или  $\mu_i = \inf U_i$  ( $i \leq [N/2]$ ,  $N \geq 2$ ).

Формальный асимптотический анализ показывает (см. [12]), что при  $\beta < \sigma + 1 < 0$  существует предельная кривая для автомодельных решений (5):  $u_A(t, x) \rightarrow Cx^{-2/(\beta - (\sigma + 1))}$  при  $t \rightarrow T_0^-$ , где  $C = C(\sigma, \beta) > 0$  — постоянная. Следуя [5], будем говорить, что в этом случае реализуется  $LS$ -режим охлаждения среды.

3. При  $\beta = \sigma + 1$ ,  $\sigma < -2$  уравнение (1) имеет простейшее автомодельное решение в разделяющихся переменных

$$(12). \quad u(t, x) = (T_0 - t)^{-1/\sigma} \theta_S(x), \quad \theta_S(x) = \left\{ -\frac{\sigma(\sigma+2)}{2(\sigma+1)} \cos^{-2} \left[ -\frac{\sigma x}{2(-\sigma-1)^{1/2}} \right] \right\}^{-1/\sigma},$$

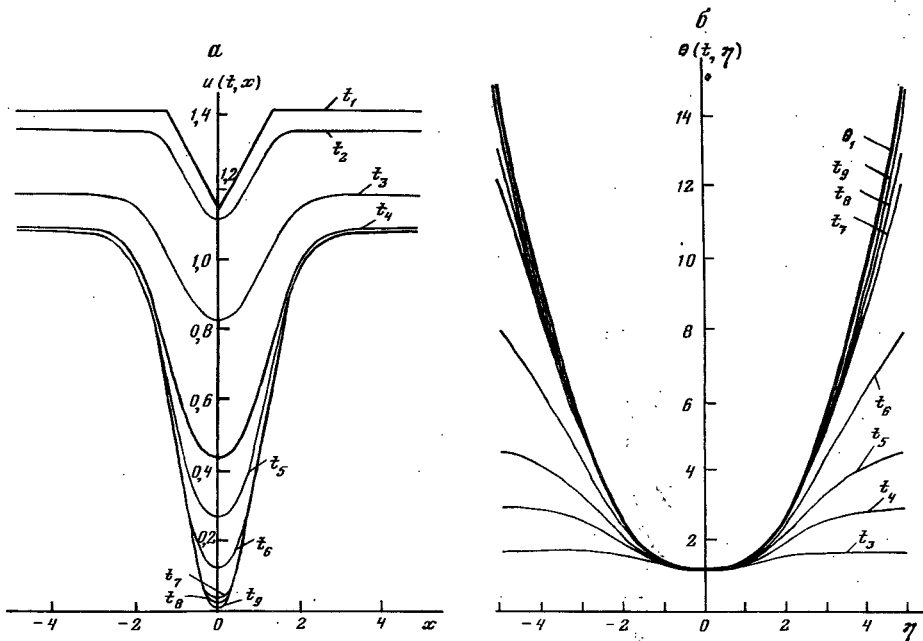


Рис. 2. Результаты расчета задачи (1), (2) в  $LS$ -режиме (а) ( $\sigma = -3$ ,  $\beta = -3$ ;  $t_1 = 0$ ,  $t_2 = 0,15$ ,  $t_3 = 0,50$ ,  $t_4 = 0,633$ ,  $t_5 = 0,644$ ,  $t_6 = 0,6464$ ,  $t_7 = 0,64647$ ,  $t_8 = 0,646473$ ,  $t_9 = 0,6464735$ ) и автоматическая обработка результатов расчета (б); функция  $\theta_1(\eta)$  – простейшее решение задачи (6), (7) при  $\sigma = -3$ ,  $\beta = -3$

которое особенно наглядно иллюстрирует "сингулярный" эффект полного остывания. По терминологии [5] решение (12) описывает локализованный на фундаментальной длине  $L_S = 2\pi(-\sigma - 1)^{1/2}/(-\sigma)$  процесс охлаждения в  $S$ -режиме.

4. В последнее время получены результаты (см., например, [14] и обзор в [4]), указывающие на особую роль инвариантно-групповых решений (в частности, автомодельных) при описании асимптотической стадии развития режимов с обострением в нелинейных средах. В данной работе численно исследована асимптотическая устойчивость построенных автомодельных решений в  $S$ - и  $LS$ -режимах. Асимптотическая устойчивость означает (см. [4]) сходимость при  $t \rightarrow T_0^-$  обработанного по автомодельному закону решения, например

$$(13) \quad \theta(t, \eta) = (T_0 - t)^{1/(\beta - 1)} u(t, \eta(T_0 - t)^\alpha), \quad \alpha = \frac{\beta - (\sigma + 1)}{2(\beta - 1)},$$

к решению задачи (6), (7).

Результаты расчетов задачи (1), (2) при начальных профилях температуры, имеющих один минимум, показывают следующее:

а) в  $S$ -режиме  $\theta(t, \eta) \rightarrow \theta_S(\eta)$  при  $t \rightarrow T_0^-$  на фундаментальной длине  $L_S$  (рис. 1); за пределами фундаментальной длины  $\theta(t, \eta) \rightarrow +\infty$ ;

б) в  $LS$ -режиме  $\theta(t, \eta) \rightarrow \theta_1(\eta)$  при  $t \rightarrow T_0^-$  на любом компакте  $[-\eta, \eta]$ , где  $\theta_1(\eta)$  – простейшее решение задачи (6), (7), имеющее один минимум при  $\eta = 0$  (рис. 2).

Поскольку время обострения  $t = T_0$  в расчетах априорно неизвестно, то в представлении (13) вместо  $(T_0 - t)$  использовалось "эквивалентное" этой разности

выражение  $[\min_{x \in R^1} u(t, x)/\theta(0)]^{-(\beta-1)}$ , где  $\theta(0) = \min_{\eta \in L_S} \theta_S(\eta)$  в  $S$ -режиме и  $\theta(0) = \min_{\eta \in R^1} \theta_1(\eta)$  в  $LS$ -режиме.

Как видно из расчетов, "сингулярность" по времени процесса охлаждения приводит к тому, что при  $t \rightarrow T_0^-$  температурный фон не оказывает влияния на формирование по автомодельному закону профиля температуры вблизи точек минимума.

Авторы благодарны В.А. Галактионову и А.П. Михайлову за полезные обсуждения и замечания.

Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша  
Академии наук СССР, Москва

Поступило  
25 XI 1985

Институт математики  
Академии наук БССР  
Минск

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Okuda H., Dawson J.M. — Phys. Fluids, 1973, vol. 16, p. 408.
2. Мартинсон Л.К., Павлов К.Б. — ЖВМиМФ, 1972, т. 12, № 4, с. 1048.
3. Калашиников А.С. — Там же, 1976, т. 16, № 3, с. 689.
4. Галактионов В.А., Курдюмов С.П., Самарский А.А. — Матем. сб., 1985, т. 126, № 4, с. 435.
5. Самарский А.А., Змитренко Н.В. и др. — ДАН, 1976, т. 227, № 2, с. 321.
6. Самарский А.А., Еленин Г.Г., Курдюмов С.П. и др. — ДАН, 1977, т. 237, № 6, с. 1330.
7. Курдюмов С.П. В кн.: Современные проблемы математической физики и вычислительной математики. М.: Наука, 1982, с. 217.
8. Адытов М.М., Клоков Ю.А., Михайлов А.П. — Дифференц. уравнения, 1983, т. 19, № 7, с. 1107.
9. Сабина Е.С. — Сиб. матем. журн., 1965, т. 6, № 5, с. 1074.
10. Олейник О.А., Кружков С.Н. — УМН, 1961, т. 16, вып. 5, с. 115.
11. Venilan Ph., Crandall M.G. — Indiana Univ. Math. J., 1981, vol. 30, p. 161.
12. Курдюмов С.П., Посашков С.А., Синоло А.В. Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша АН СССР, 1984, № 111.
13. Бейтмен Г., Эрдеи А. Высшие трансцендентные функции I. М.: Наука, 1973, с. 278.
14. Галактионов В.А., Курдюмов С.П., Самарский А.А. — Дифференц. уравнения, 1984, т. 20, № 4, с. 614.

УДК 517.958 + 532.529

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

С.М. ПОНОМАРЕВ

### ПЛОСКИЕ ВОЛНЫ В СРЕДАХ С ОБЪЕМНОЙ ВЯЗКОСТЬЮ И ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ 1-ГО ПОРЯДКА С ВЫРОЖДЕНИЕМ ПОРЯДКА

(Представлено академиком А.Н. Тихоновым 12 VI 1985)

Рассмотрим задачу о распространении одномерной плоской волны в сплошной баротропной среде. Баротропность соответствует предположению, что изменение температуры среды, связанное с тепловыми потерями при распространении волны, не влияет на вид уравнений, определяющих поведение среды. Поэтому в данной задаче система основных уравнений движения сплошной среды (законы сохранения массы и импульса) замыкается одним уравнением, связывающим напряжение  $\sigma$  и деформацию  $\epsilon$  при возрастании и убывании нагрузки.