ЖУРНАЛ
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Том 26, 1986 № 8

УДК 517.958:536.2

СЛОЖНЫЕ МНОГОМЕРНЫЕ СТРУКТУРЫ ГОРЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ СРЕДЫ

КУРДЮМОВ С. П., КУРКИНА Е. С., ПОТАПОВ А. Б., САМАРСКИЙ А. А.

(Москва)

Изучается процесс горения в среде с коэффициентом теплопроводности $kT=k_0T^\sigma$ и объемным источником тепла $Q(T)=q_0T^\beta$. При определенных условиях горение идет в режиме с обострением и имеет место явление локализации тепла, приводящее к возникновению нестационарных диссипативных структур, число и вид которых определяются только свойствами среды. Структуры описываются решениями – собственными функциями (с. ф.) – задачи для квазилинейного эллиптического уравнения. Предлагается аналитический метод построения приближений к с. ф., который дал возможность оценить их количество, исследовать архитектуру и построить ряд с. ф. численно.

Введение

Процессы самоорганизации в различных физических, биологических и химических системах с единой точки зрения изучает создаваемая в последние годы теория диссипативных структур и автоволновых процессов, или синергетика [1]–[3]. К настоящему времени показано, как, не впадая в противоречие со вторым законом термодинамики, объяснить тенденцию к усложнению [3]. Возникновение упорядоченных структур происходит за счет диссипации энергии в открытых системах, находящихся вдали от состояния термодинамического равновесия [1]. Универсальность свойств диссипативных структур объясняется тем, что, несмотря на различную природу, они описываются одними и теми же нелинейными уравнениями. Это, как правило, системы параболических уравнений с нелинейными источниками и стоками [1]–[3]. Математически возникновение самоорганизации во многих случаях связывают с потерей устойчивости однородного решения и либо с появлением периодических по времени решений типа волн или автоволн [4], [5], либо с выходом на пространственно-неоднородные стационары [1]–[3], либо с возникновением макростохастических режимов [6]–[8].

Однако существует другой класс явлений самоорганизации, в котором нарушение однородного состояния сопровождается возникновением нестационарных диссипативных структур при развитии в среде очень быстрых процессов. Настоящая работа посвящена исследованию именно нестационарных тепловых структур, которые возникают в среде с нелинейным коэффициентом теплопроводности и объемным источником тепла. В работах [9]–[21] показано, что при определенных условиях в такой среде процессы горения происходят в режиме с обострением, при котором некоторые величины (например, максимум распределения температуры) неограниченно возрастают за конечное время t_f (время обострения) хотя бы в одной точке пространства.

Режимы с обострением являются промежуточной асимптотикой реальных очень быстрых процессов, наблюдаемых в природе. Горение в режиме с обострением обладает рядом интересных свойств, стимулирующих

их подробное исследование. К ним относится парадоксальное явление локализации тепла, при котором тепло и горение не распространяются в холодную среду. В области локализации происходит интенсивное энерговыделение и температура стремится к бесконечности за конечное время t_f, а вне этой области температура либо равна нулю, либо ограниченна. Последнее определяется характером начальных данных. В среде возникают нестационарные диссипативные структуры — интенсивные процессы горения, локализованные на отдельных участках среды. Рождение, самоподдержание и размножение такого типа структур наблюдается в плазме [22], и их примером может служить Т-слой [23].

Режимы с обострением и явление локализации имеют место в широком классе задач математической физики. По ним существует обширная библиография, обзоры даны в [9]—[12], [18], см. также [24]—[27]. Конечно, в природе не существует процессов, в которых какая-либо величина растет до бесконечности. Но все особенности режимов с обострением, как показано в работах [28], [29], проявляются, когда величины увеличиваются по закону обострения в конечное число раз и это число определяется свойствами рассматриваемой нелинейной среды.

Распределение температуры в области локализации может иметь сложный немонотонный характер, т. е. в среде могут развиваться структуры разной сложности [9], [10], [13], [16]. В одномерном случае показано, что с.ф. нелинейной автомодельной задачи определяют все типы структур и волн в среде с заданными параметрами [10].

Возникает вопрос: существуют ли двумерные и трехмерные тепловые структуры, имеющие сложную форму области локализации со специальным расположением максимумов распределения температуры в ней, а если они существуют — то как будет происходить возникновение и эволюция таких сложных структур. Для решения этой проблемы в работах [30], [31] было предложено рассмотреть новый класс автомодельных решений уравнения квазилинейной теплопроводности с нелинейным источником, а именно многомерных, неоднородных по углу. Такая постановка является новой и нетрадиционной для тепловых задач. Она связана с тем, что автомодельные, а в общем случае — инвариантно-групповые решения передают характерные черты изучаемых процессов, а не просто являются частными решениями задач математической физики. Они представляют собой промежуточные асимптотики широкого класса других решений с произвольными начальными данными [32], а для ряда процессов — даже асимптотики другого класса уравнений, которые сами инвариантно-групповых решений не допускают [19].

Когда автомодельная задача на собственные значения (с.з.) и с.ф. сформулирована и получено нелинейное эллиптическое уравнение, возникает проблема его решения. Необходимо вначале выяснить, имеются ли вообще решения, отличные от центрально-симметричных. При попытках численного решения этой задачи встает следующая проблема: чтобы итерационным методом построить различные с.ф., надо иметь достаточно хорошие начальные приближения к ним, а следовательно, задачу надо исследовать сначала аналитически.

В аналитическом исследовании решающую роль сыграл новый подход, развитый в работах [9], [10], [30], [31], [33], [34], а также использованный в [35]—[37], который основан на линеаризации нелинейного уравнения теплопроводности около частного пространственно-однородного

решения с дополнительным условием сшивания решения с асимптотикой нелинейной задачи. Такой подход аналогичен поиску решений в классической квазиравновесной термодинамике, когда они ищутся как отклонения от равновесного состояния, но в случае нестационарной термодинамики рассматриваются отклонения от растущего в режиме с обострением фона. Существенно отметить, что применение этого подхода в одном частном случае позволило свести автомодельное уравнение к стационарному уравнению Шрёдингера с кулоновским потенциалом и соответствующими граничными условиями [9], [16], [34]. Это навело на мысль о существовании экзотических структур горения среды с областью локализации, например, в виде гантели, звезды и др.

В дальнейшем решения линейной задачи были исследованы подробно и сопоставлены с решениями нелинейной автомодельной задачи. Линеаризация работает в центральной части структуры, описывая всю область немонотонности многомерного автомодельного распределения температуры. У границы области локализации температура асимптотически стремится к нулю. В одномерном случае, «сшивая» решение линеаризованного уравнения непрерывным образом с асимптотикой нелинейной задачи, удалось получить хорошее приближение к с.ф. нелинейной задачи [30], отличавшееся от них в среднем на 5%. Ранее с.ф. одномерной задачи были построены численно [10], [16], при этом их число оказалось конечным и определялось только параметрами нелинейной среды. Метод сшивания позволил получить все существующие с.ф. В этом смысле сшивание с асимптотикой играет роль условия квантования спектра, эквивалентную роли условия нормировки для уравнения Шрёдингера или принципа отбора у Бора.

Чтобы произвести аналогичную процедуру «сшивания» в двумерном и трехмерном случаях, в настоящей работе построены два класса собственных функций, отличающихся друг от друга принципом расположения максимумов. Полученные аналитические приближения оказались очень хорошими и позволили построить с.ф. нелинейной автомодельной задачи численно и тем самым подтвердить их существование в большинстве случаев.

Рассмотрим свойства этих многомерных автомодельных решений и законы их развития. Так, это — локализованные диссипативные структуры горения нелинейной среды, развивающиеся в режиме с обострением. Вопрос о локализации обсуждается в § 5. Разного типа структуры различаются числом максимумов в области локализации и формой области локализации. При этом максимумы растут в режиме с обострением и движутся к центру симметрии и при $t \to t_f$ «падают» на него. Горение вне области локализации структур или не происходит совсем, или идет медленнее (с другим t_f). Количество с.ф. и их вид определяются только параметрами нелинейной среды. Как наиболее наглядный, рассмотрим двумерный случай. Существуют очень красивые структуры, форма области локализации которых представляет собой эллипс, звезду, крест, прямоугольник и т. д. Архитектуру сложной структуры приблизительно можно характеризовать двумя параметрами. Для этого надо разбить ее на слои (в одном случае — это концентрические окружности, в другом — прямоугольники) и следить за числом максимумов в слое. Чем сложнее структура, тем больше слоев она имеет и тем больше максимумов на нем. Аналогичная картина в трехмерном случае [23]. В целом архитектура сложной трех-

мерной структуры напоминает строение атома, который характеризуется количеством электронных оболочек и количеством электронов в них. (В нашем случае это — слои и максимумы.) Однако есть и принципиальные различия. Подробному описанию архитектуры с.ф. посвящен § 4.

С представлением о сложной структуре связано еще одно фундаментальное свойство нелинейных сред: принцип объединения простых структур (имеющих всего один максимум) в сложные, или принцип суперпозиции в нелинейных задачах [9]. Вопросы объединения простых структур в сложные, законы построения организации нелинейной среды, а также вопросы устойчивости такой организации рассматриваются в § 5. В частности, установлено, что в нелинейной среде может существовать длительное время только такая организация, которая соответствует одной из с.ф. автомодельной задачи. Если горение возбуждено не в соответствии с профилями с.ф., то оно или затухает, или, «разваливаясь», вырождается в горение в виде простых структур.

§ 1. Постановка задачи

Рассматривается процесс горения в среде с объемным источником тепла и коэффициентом теплопроводности, зависящими от температуры по степенному закону. Распределение температуры $T(\mathbf{r}, t)$ в пространстве удовлетворяет уравнению

$$\rho c_v \frac{\partial T}{\partial t} = \operatorname{div}(\varkappa_0 T^\sigma \operatorname{grad} T) + q_0 \rho T^\beta, \tag{1.1}$$

где $\varkappa_0>0$, $q_0>0$, $\sigma>0$, $\beta>1$, $c_v>0$ — заданные параметры.

Считается, что плотность зависит от радиуса по степенному закону и в частном случае может быть постоянной: $\rho=Ar^{s-2}$, $A,s>0$.

Горение инициируется заданием некоторого начального ограниченного распределения температуры $T(\mathbf{r}, 0)=T_0(\mathbf{r})<\infty$, которое в дальнейшем будет уточнено.

Граничные условия на бесконечности имеют вид $T\to 0$, $\varkappa_0 T^\sigma \operatorname{grad} T\to 0$ при $r\to\infty$. Задача состоит в том, чтобы найти все типы тепловых структур, которые могут возникать в заданной нелинейной среде. С этой целью исследуются автомодельные решения задачи (1.1) вида

$$T(\mathbf{r}, t) = g(t)\, y^{1/(\sigma+1)}(\xi), \qquad \xi = \frac{\mathbf{r}}{\psi(t)}, \qquad \xi = |\xi|. \tag{1.2}$$

Подстановка (1.2) в уравнение (1.1) однозначно определяет вид функций g и ψ:

$$g(t) = \left(1-\frac{t}{\tau}\right)^\mu, \qquad \psi(t) = \left(1-\frac{t}{\tau}\right)^n, \qquad \mu = -\frac{1}{\beta-1}, \tag{1.3}$$

$$n = \frac{\beta-\sigma-1}{s(\beta-1)},$$

и вид многомерного автомодельного уравнения относительно функции y. Удобно провести преобразование координат: $\hat{t}=t_0 t$, $t_0=q_0 c_v^{-1}$, $\hat{r}=r_0 r$, $r_0=(\varkappa_0 q_0^{-1})^{1/s}$. Функция $y(\xi)$ удовлетворяет квазилинейному эллиптиче-

скому уравнению

$$(1.4)\qquad \frac{1}{\sigma+1}\Delta y-\frac{\beta-\sigma-1}{\tau s(\beta-1)}\xi^{s-1}\frac{\partial}{\partial\xi}y^{1/(\sigma+1)}+$$
$$+\xi^{s-2}\left(y^{\beta/(\sigma+1)}-\frac{1}{\tau(\beta-1)}y^{1/(\sigma+1)}\right)=0,$$

где τ — произвольный параметр разделения переменных (1.3).

В соответствии с постановкой задачи будем искать автомодельные решения уравнения (1.4), удовлетворяющие следующим граничным условиям:

$$(1.5)\qquad y<\infty \text{ при } \xi=0,\qquad y\to 0,\quad \operatorname{grad} y\to 0 \text{ при } \xi\to\infty.$$

Задача (1.4), (1.5) является задачей на с.з. τ и с.ф. $y(\xi,\tau)$. Отметим некоторые свойства с.з. и с.ф., которые следуют непосредственно из анализа функций $g(t)$, $\psi(t)$ и уравнения (1.4). Так как $\beta>1$, то при положительном с.з. τ с.ф. существует конечное время $t_f=\tau$ и развивается в режиме с обострением. При отрицательном с.з. τ с.ф. $y(\xi,\tau)$ существует для любого $t>0$ и описывает затухающий режим. Поскольку нас интересуют режимы с обострением, то мы будем рассматривать только $\tau>0$. Если исследуемая задача имеет решение при некотором значении $\tau=\tau_1>0$, то она имеет решение и при любом другом значении $\tau=\tau_2>0$. Эти решения связаны преобразованием подобия [10], [16]. Описанное свойство с.ф. и с.з. позволяет не рассматривать все возможные значения τ, а выбрать удобное. В дальнейшем положим $\tau=(\beta-1)^{-1}$.

Итак, вначале исследуются с.ф. автомодельной задачи (1.5), (1.4), а затем условия их реализации, т. е. устойчивость.

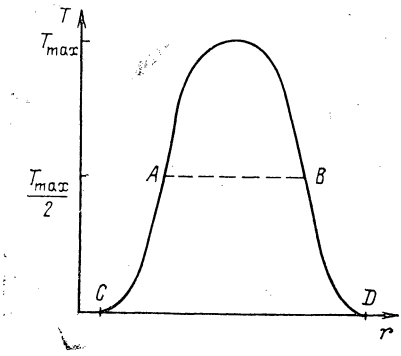
§ 2. Автомодельные решения в одномерном случае

1. Три типа автомодельных решений. Рассмотрим решения поставленной задачи, являющиеся функциями только одной переменной ξ (плоский, цилиндрически- и сферически-симметричный случаи). Изучение таких автомодельных решений было проведено в [10], [13], [16]. В [13], [16] было показано, что в зависимости от соотношения между показателями β и σ существуют три различных типа автомодельных решений, описывающих процессы горения среды. При $1<\beta<\sigma+1$ реализуется так называемый HS-режим, представляющий собой тепловую волну, распространяющуюся с конечным фронтом, амплитуда и скорость которой растут в режиме с обострением. При $\beta=\sigma+1$ автомодельная задача имеет единственное монотонное решение. Оно представляет собой нестационарную диссипативную структуру, локализованную на фундаментальной длине L_T (фиг. 1: область локализации CD, полуширина AB). В случае плоской геометрии и постоянной плотности аналитическое решение имеет вид [38] (см. фиг. 1)

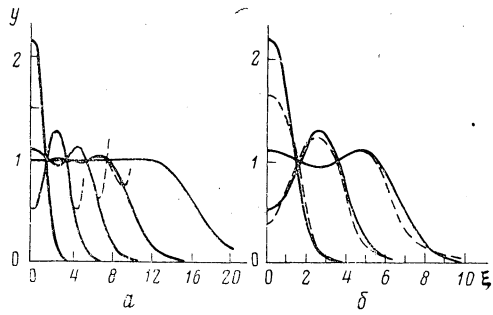
$$T(x,t)=q_0t_f\left(1-\frac{t}{t_f}\right)^{-1/\sigma}\left[\frac{2(\sigma+1)}{\sigma(\sigma+2)}\cos^2\left(\frac{\pi x}{L_T}\right)\right]^{1/\sigma},$$
$$L_T=\frac{2\pi}{\sigma}\left[\frac{\varkappa_0}{q_0}(\sigma+1)\right]^{1/2},\qquad t_f=(q_0\sigma T_0{}^{\sigma})^{-1}.$$

На границе области локализации и вне ее температура и тепловой поток остаются равными нулю. При $\beta>\sigma+1$ реализуется LS-режим, который и рассматривается в настоящей работе.

Остановимся подробнее на свойствах автомодельных решений в LS-режиме. Если $\beta>\sigma+1$, то автомодельный показатель $n>0$, а поскольку $r=\xi(1-t\tau^{-1})^n$, то полуширина профиля температуры сокращается со временем. Автомодельное решение не может иметь конечный фронт, так как его радиус должен был бы также сокращаться. Из асимптотического ана-



Фиг. 1



Фиг. 2

Фиг. 2. Цилиндрически-симметричные с. ф., зависящие только от одной переменной ξ: *а* — все возможные с. ф., штриховая — решение линеаризованного уравнения $1+\alpha_i u(\xi)$, наложенное на 2-ю, 3-ю, 4-ю с. ф.; *б* — первые три с. ф. и линейные приближения $\tilde{y}^{1/2}(\xi)$ к ним

лиза следует, что при $\xi\to\infty$ решения имеют асимптотику [16]

$$y=C\xi^{-p}+\ldots,\qquad p=\frac{s(\sigma+1)}{\beta-\sigma-1}. \tag{2.1}$$

Если подставить (1.2) и (1.3) в (2.1), то получится, что главный член асимптотического разложения температуры $r\to\infty$ не зависит от времени:

$$T(r,t)=Cr^{-p}-B(C)\left(1-\frac{t}{\tau}\right)r^{-q}+\ldots,\qquad q=\frac{s(\sigma+\beta)}{\beta-\sigma-1}. \tag{2.2}$$

Это обстоятельство указывает на локализацию горения: температура увеличивается в режиме с обострением в сокращающейся области вблизи центра симметрии, в то время как вне этой области она стремится к предельному, постоянному по времени распределению температуры (2.2).

В многомерном случае также реализуются три режима горения среды с обострением при тех же соотношениях между β и σ. Асимптотика с.ф. LS-режима имеет вид (2.1), где C уже является функцией направления:

$$C=C(\xi/\xi)=C(\theta,\varphi).$$

2. Спектр автомодельных решений в LS-режиме. Запишем уравнение (1.5) для случая зависимости y только от одной переменной ξ:

$$\frac{1}{\sigma+1}\xi^{-\nu}\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\xi^{\nu}\frac{\partial y}{\partial\xi}\right)-\frac{\beta-\sigma-1}{s}\xi^{s-1}\frac{\partial}{\partial\xi}y^{1/(\sigma+1)}+ \tag{2.3}$$
$$+\xi^{s-2}\left(y^{\beta/(\sigma+1)}-y^{1/(\sigma+1)}\right)=0.$$

Численные расчеты задачи (2.3), (1.5) показали, что она имеет конечное число N с.ф. $y_i(\xi)$, $i=1, 2, \ldots, N$. Число с.ф. и их качественное поведение не зависят ни от характера распределения плотности s, ни от геомет-

рии области ν и определяются формулой

$$N=[a-[[a]a^{-1}]]+1, \qquad a=\frac{\beta-1}{\beta-\sigma-1}.$$

На фиг. 2 приведены графики всех возможных с.ф. ($N=5$) для случая $\sigma=2$, $\beta=3.5$, $s=2$, $\nu=1$. Первая с.ф. монотонно убывает. Следующие являются немонотонными, с числом локальных экстремумов, равным их номеру. В области своей немонотонности, как следует из расчетов, с.ф. совершают колебания около гомотермического (пространственно-однородного) решения уравнения (2.3): $y_0\equiv1$. Колебания эти малы и уменьшаются с ростом номера с.ф., а также с увеличением значений σ и β. Расчеты также показали, что с.ф. выходят на асимптотику с хорошей точностью при небольших значениях ξ сразу после выхода из области немонотонности. В области немонотонности с.ф. хорошо описываются решениями линеаризованного около y_0 уравнения (2.3):

$$\xi^2u''+\nu\xi u'-\frac{\beta-\sigma-1}{s}\xi^{s+1}u'+(\beta-1)\xi^s u=0$$

(удобно считать, что $u(0)=1$, а $y=1+\alpha u$, $\alpha<\infty$), если правильно задать амплитуду α решения линейной задачи. Каждая с.ф. описывается решением линейной задачи со своей амплитудой α_i, причем старшая с.ф. в наибольшей области (по сравнению с областями для младших с.ф.) совпадает с решением линейного уравнения. Она близка к нему во всей области немонотонности. Остальные с.ф. «передают» только одно, два и т. д. колебаний решения линейного уравнения в соответствии с их номером. Следовательно, с.ф. можно построить с хорошей точностью (помимо численного решения), если разрешить проблему отбора ряда дискретных значений α. Эта проблема была решена методом сшивания. Пространство разбивается на две части: $0\leqslant\xi<\xi_0$ и $\xi_0<\xi<\infty$. В 1-й области в качестве приближенного решения $\tilde{y}$ выбирается $1+\alpha u$, во 2-й — асимптотика $C\xi^{-p}$, а неизвестные α, C, ξ_0 определяются из условия сшивания, т. е. из равенства при $\xi=\xi_0$ обеих функций и их 1-х, 2-х производных. Оказалось, что число таких приближений равно числу с.ф. и они хорошо описывают поведение с.ф. качественно и количественно (количественное совпадение можно улучшить, если вместо $\tilde{y}$ взять $\tilde{y}^{1/2}$). Главной же ценностью этой методики является то, что идеи сшивания удалось распространить на многомерный случай и численно построить ряд принципиально новых структур.

§ 3. Двумерные собственные функции. Построение приближений

Перейдем к рассмотрению двумерных собственных функций. Линеаризуем уравнение (1.4) около гомотермического решения: $y=1+u$, $|u|\ll1$. Тогда получим линейное уравнение относительно функции $u(\xi, \varphi)$:

$$\Delta u-\frac{\beta-\sigma-1}{s}\xi^{s-1}\frac{\partial u}{\partial\xi}+(\beta-1)\xi^{s-2}u=0, \qquad |u|<\infty, \quad \xi=0. \tag{3.1}$$

Непосредственное перенесение методики сшивания на двумерную и трехмерную задачи представляет большие трудности и по существу не упрощает проблему: необходимо решать задачу со свободной границей $\xi_0(\varphi)$, а α и C из чисел превращаются в бесконечные наборы коэффициентов Фурье. Однако если решать задачу в координатах, где переменные в уравнении (3.1) разделяются, и предположить, что с.ф. обладают некото-

рой внутренней симметрией, т. е .достаточно точно описываются одной гармоникой, то методика сшивания существенно упрощается. Для двумерной задачи таких систем координат две — полярная и (при целых s) декартова. В соответствии с этим были построены и две системы приближений к с.ф.

1. Приближение класса EjMm. Будем решать уравнение (3.1) в полярных координатах методом разделения переменных ξ и φ. Тогда общее решение имеет вид

$$u=\sum_{m\geqslant 0}\alpha_m R_m(\xi)\cos(m\varphi+\varphi_{0m}), \tag{3.2}$$

где

$$R_m(\xi)=\xi^m M\left(-a_m, b_m, \frac{\beta-\sigma-1}{s^2}\xi^s\right),$$

$a_m=a-m/s$, $b_m=1+2m/s$, $a=(\beta-1)/(\beta-\sigma-1)$, $M(a, b, z)$ — вырожденная гипергеометрическая функция, α_m — произвольные постоянные.

Предположим, что в с.ф. по φ доминирует m-я гармоника. Тогда в ряду (3.2) можно ограничиться только членом $\alpha_m R_m(\xi)\cos(m\varphi)$, а функция $C(\varphi)$ в асимптотике имеет вид $C(\varphi)=C_0+C_m\cos(m\varphi)$ и, следовательно, можно применять метод сшивания. Для этого строятся две функции:

$$f_j(\xi)=\begin{cases}1+\alpha_j R_m(\xi), & \xi<\xi_j,\\ C_j\xi^{-p}, & \xi>\xi_j,\end{cases} \tag{3.3а}$$

$$f^*_{j+1}(\xi)=\begin{cases}1-\alpha_j R_m(\xi), & \xi<\xi^*_{j+1},\\ C^*_{j+1}\xi^{-p}, & \xi>\xi^*_{j+1}.\end{cases} \tag{3.3б}$$

Величины α_j, $C_j, C^*_{j+1}, \xi_j, \xi^*_{j+1}$ определяются из следующих условий: f_j и f^*_{j+1} положительны, функция f_j имеет две непрерывные производные, f^*_{j+1} — одну, а число экстремумов функций равно их номеру. Далее берется полусумма этих функций:

$$G(\xi)=0.5(f_j+f^*_{j+1})\equiv 1, \qquad \xi<\xi_j,$$
$$G(\xi)=C_0\xi^{-p}=0.5(C_j+C^*_{j+1})\xi^{-p}, \qquad \xi>\xi^*_{j+1},$$

и их полуразность:

$$R(\xi)=0.5(f_j-f^*_{j+1})=\alpha_j R_m(\xi), \qquad \xi<\xi_j,$$
$$R(\xi)=0.5(C_j-C^*_{j+1})\xi^{-p}=C_m\xi^{-p}, \qquad \xi>\xi^*_{j+1},$$

а в качестве приближения выбирается функция

$$\tilde{y}_{mj}(\xi,\varphi)=G(\xi)+R(\xi)\cos(m\varphi),$$

которая равна $1+u$ при малых ξ и $C(\varphi)\xi^{-p}$ при больших ξ, т. е. удовлетворяет граничным условиям. Такие приближения и соответствующие с.ф. удобно обозначить EjMm. Из формул (3.2) и (3.3) следует, что при каждом m число приближений, которые можно построить, равно числу действительных положительных нулей функции $R_m(\xi)$:

$$N_m=j_{\max}=[a_m-[[a_m]a_m^{-1}]]+1. \tag{3.4}$$

Из (3.5) следует, что с ростом m число приближений N_m уменьшается. При $m\geqslant as$ функция R_m становится монотонной, $R_m(\xi)\neq 0$ при $\xi>0$ и произвести сшивание и построить приближения нельзя. Поэтому общее

число приближений EjMm, которым оценивается число собственных функций, составляет

$$N_{\text{EM}} = \sum_{0<m<as} N_m.$$

2. Приближение класса Ei/j. Рассмотрим случай постоянной плотности $s=2$. Поскольку $\xi\partial/\partial\xi=\xi_1\partial/\partial\xi_1+\xi_2\partial/\partial\xi_2$, где ξ_1, ξ_2 — декартовы координаты, то линеаризованное уравнение допускает разделение переменных ξ_1 и ξ_2. Если параметр $s\neq2$, но является целым, то разделение производится по переменным

$$\xi_1=\frac{2}{s}\xi^{s/2}\cos\frac{s\varphi}{2}, \qquad \xi_2=\frac{2}{s}\xi^{s/2}\sin\frac{s\varphi}{2}.$$

Решение уравнения (3.1) ищется в виде

$$u=\alpha_1 G(\xi_1)+\alpha_2 G(\xi_2), \qquad G(x)=M\left(-a, 0.5, \frac{\beta-\sigma-1}{4}x^2\right),$$

где α_1, α_2 — постоянные. Сшивание с асимптотикой производится отдельно по ξ_1 и ξ_2. Для этого по аналогии с предыдущим случаем строятся функции

$$f_j(x)=\begin{cases}1+\alpha_j G(x), & |x|<\xi_{0j},\\ C|x|^{-p}, & |x|>\xi_{0j}.\end{cases}$$

Они по построению совпадают с линейными приближениями к одномерным с.ф. в плоском случае (одна пространственная переменная), полученными в § 2 и зависящими только от одной координаты ξ_i. Их количество определяется формулой

$$N_1=j_{\max}=[a-[[a]a^{-1}]]+1.$$

В качестве искомого двумерного приближения берется функция

$$\tilde{y}_{i/j}(\xi_1, \xi_2)=f_i(\xi_1)f_j(\xi_2).$$

При этом для $|\xi_1|<\xi_{0i}$, $|\xi_2|<\xi_{0j}$

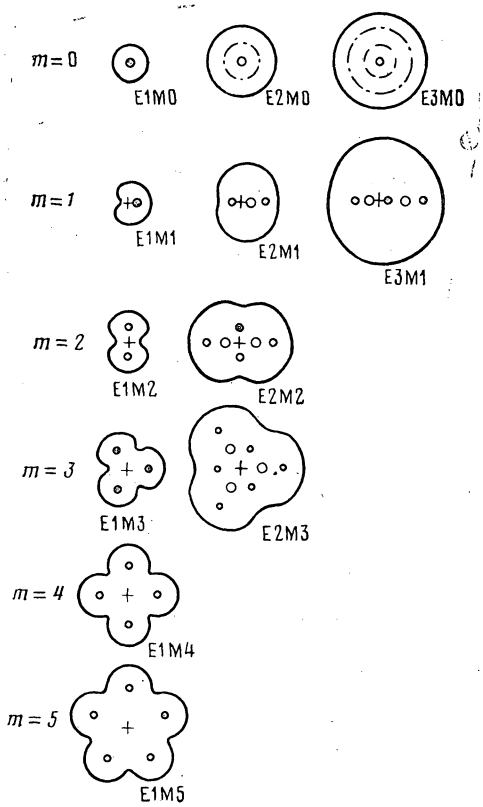
$$\tilde{y}_{i/j}=1+u+\alpha_1\alpha_2 G(\xi_1)G(\xi_2)\approx1+u.$$

Такие приближения и соответствующие с.ф. будем обозначать Ei/j. Функции Ei/j и Ej/i тождественны с точностью до поворота на угол π/s, поэтому можно считать, что $i\leqslant j$. Полное число приближений Ei/j оценивается формулой $N=N_1(N_1+1)/2$.

§ 4. Архитектура двумерных собственных функций

Наличие приближенных решений автомодельной задачи позволило получить многие с.ф. численно и тем самым подтвердить их существование. При этом функции $\tilde{y}$ служили в качестве начального приближения, обеспечивая сходимость численного итерационного процесса к соответствующей с.ф. Было получено свыше 20 с.ф. при различных значениях β, σ, s. В большинстве случаев в расположении максимумов и соотношении их высот хорошо выполняются предсказания линейного анализа.

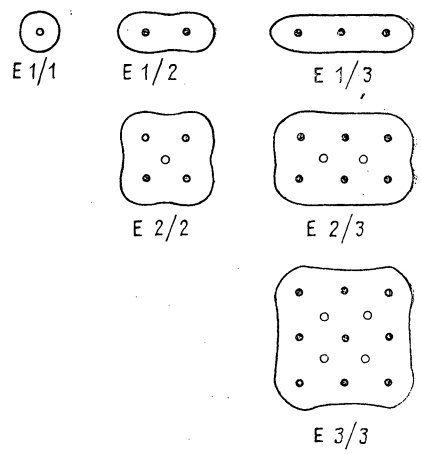
1. Архитектура с.ф. класса EjMm. Все с.ф. EjMm имеют вид системы максимумов («холмов»), расположенных вблизи точки $\xi=0$.



Фиг. 3

Фиг. 3. —·—, · максимум; — — —, ○ минимум; + центр ($\xi=0$); — $\tilde{y}_{mj}=0.1$

Фиг. 4. · максимум, ○ минимум, — $\tilde{y}_{vj}=0.1$



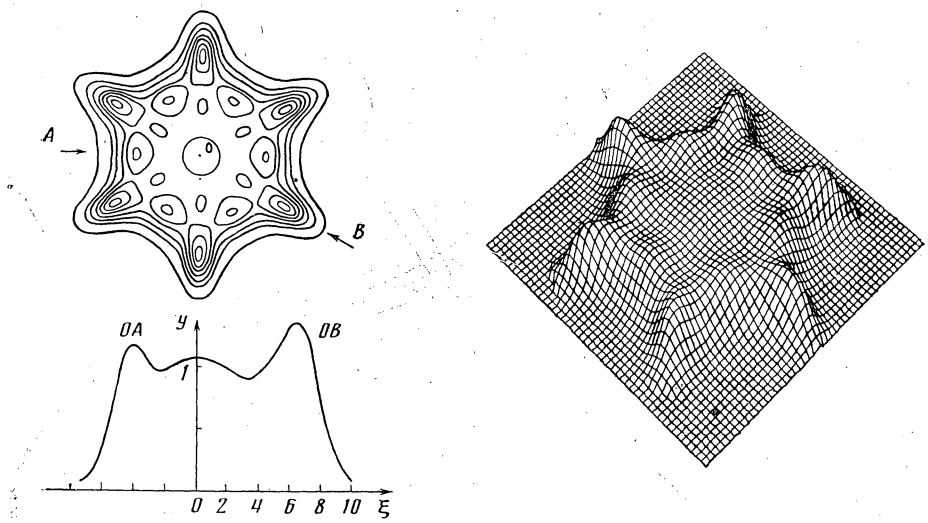
Фиг. 4

Удобно классифицировать их по количеству и расположению максимумов согласно значениям m и j.

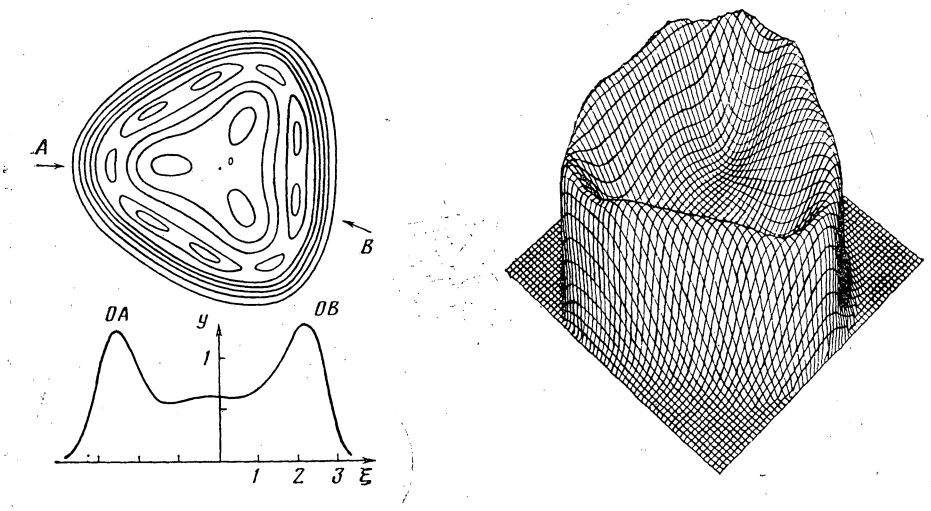
При $j=1$ с.ф. имеет m максимумов, находящихся на окружности в углах правильного m-угольника. В случае $j=2$ максимумы расположены в два слоя на двух концентрических окружностях по m штук на каждой в углах правильных m-угольников, которые повернуты на угол π/m один относительно другого. Аналогично организованы и другие с.ф. EjMm: они имеют jm максимумов, расположенных в j слоях на концентрических окружностях в вершинах правильных m-угольников. Т. е. усложнение организации идет по двум направлениям: увеличение числа максимумов в слое и увеличение числа слоев. Это схематически проиллюстрировано фиг. 3 ($\beta=2.5$, $\sigma=1$, $s=2$). Там же показаны формы эффективных областей локализации соответствующих приближений (линии уровня $\tilde{y}=0.1$). Высоты максимумов в каждой данной с.ф. монотонно растут с удалением от центра.

2. Архитектура с.ф. класса Ei/j. Как и в случае с.ф. EjMm, будем описывать вид линейных приближений Ei/j, указывая количество и расположение максимумов и минимумов. Сначала рассмотрим случай $s=2$.

При $-\infty<x<\infty$ функция $f_i(x)$, $1\leqslant i\leqslant N_1$, имеет i максимумов и $i-1$ минимумов. Функция $\tilde{y}_{i/j}(\xi_1, \xi_2)$ будет иметь максимум в тех точках, в которых имеют максимум $f_i(\xi_1)$ и $f_j(\xi_2)$ одновременно (то же самое справедливо для минимумов). Следовательно, приближение Ei/j состоит из i рядов максимумов, в каждом по j штук и $i-1$ рядов из $j-1$ миниму-



Фиг. 5



Фиг. 6

мов. На фиг. 4 схематически изображены все с.ф. Ei/j, даваемые линейным приближением для среды с $\beta=2.5$, $\sigma=1$, $s=2$.

При других значениях s максимумы и минимумы располагаются вдоль линий $|\xi_1|=\text{const}$ и $|\xi_2|=\text{const}$.

Интересно, что иногда расположение максимумов в с.ф. Ei/j и EjMm совпадает или сходно. В этом случае они описывают одну и ту же реально существующую с.ф. Примерами на фиг. 3 и 4 являются с.ф. E1M0 и E1/1, E1M4 и E2/2, E1M2 и E1/2. В рядах (как горизонтальных, так и вертикальных) величины максимумов растут от середины к краю, но строгая закономерность роста максимумов по мере удаления от центра с.ф. иногда нарушается.

3. Результаты численных расчетов автомодельной задачи. Нам удалось построить с.ф. обоих классов, хорошо описывающиеся приближениями. На фиг. 5 представлена с.ф. E2M6 среды с $\beta=3.5$, $\sigma=2$, $s=2.5$. Расположения максимумов и их высот хорошо передаются линейным приближением. Но в нескольких случаях наблюдались довольно сильные отклонения от приближенных решений. Например, приближение E2M3 состоит из двух слоев, в каждом из которых по три максимума,

в центре $\tilde{y}=1$. У построенной численно с.ф. ($\beta=3.5$, $\sigma=2$, $s=4$) в центре наблюдается значительный минимум, а максимумы внешнего слоя раздвоились и имеют меньшую высоту по сравнению с 1-м слоем (см. фиг. 6). Возможно, для описания такой структуры в линейном приближении следует использовать по крайней мере три гармоники ($m=0, 3, 6$).

Однако построены не все предсказанные с.ф. В ряде случаев итерационный процесс не сходился и сделать какие-либо выводы о существовании соответствующих с.ф. было трудно. В семействе EjMm, не считая одномерных с.ф. для $m=0$, удавалось построить около 30% предсказанных с.ф. Например, на фиг. 3 из 9 предсказанных с.ф. получены 2 (E1M2 и E1M4, которые можно рассматривать и как E1/2 и E2/2), для с.ф. E2M2 итерационный процесс сошелся к с.ф. E2/3. Для семейства Ei/j результаты значительно лучше. Так, на фиг. 4 из 6 предсказанных с.ф. получены 5 (кроме E3/3).

Интересно отметить, что если приближения EjMm и Ei/j аналогичны, то чаще реализуется с.ф., больше похожая на Ei/j (получено в 5 случаях), независимо от координат, в которых ведутся расчеты. Обратное наблюдалось лишь однажды: при $\beta=4.5$, $\sigma=3$, $s=2$ реализовывалась с.ф. E1M4 ($y(0)\approx 1$), а не E2/2 (в центре минимум).

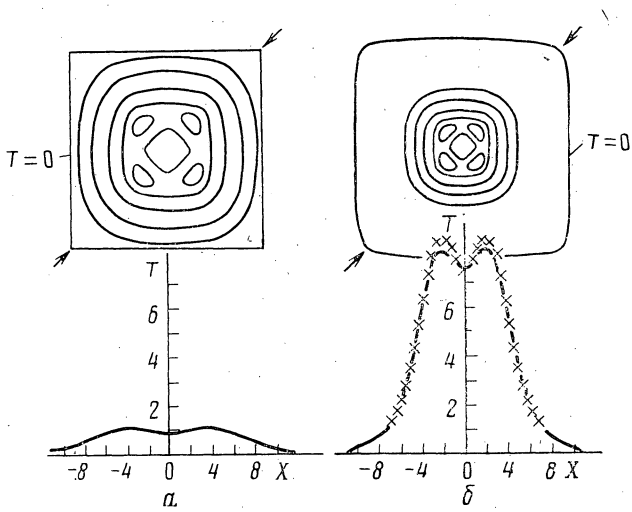
Таким образом, вопрос о числе различных классов двумерных с.ф. и о числе с.ф. в каждом классе пока остается открытым. Основным результатом выполненных исследований является подтверждение существования сложных двумерных структур.

§ 5. Локализация и условия возникновения тепловых структур

1. Численные расчеты задачи Коши для двумерного и трехмерного уравнения теплопроводности [17], [39], а также многочисленные исследования одномерной задачи показали следующее [10], [16]. Автомодельные решения неустойчивы по начальным данным в смысле Ляпунова. Малые возмущения начального распределения приводят к малому изменению времени обострения. Это, в свою очередь, приводит к сколь угодно большому различию между решениями начиная с некоторого момента времени, близкого к моменту обострения. В работах [10], [33] была впервые исследована устойчивость автомодельных решений в режиме с обострением. Там же введено понятие С-устойчивости (структурной) автомодельных решений, т. е. устойчивости в смысле выхода на автомодельный режим. В LS-режиме С-устойчивым автомодельным решением является только первая с.ф., имеющая всего один максимум. Сложные с.ф. этим свойством не обладают, поэтому, чтобы их получить, среду надо резонансно возбудить, т. е. поставить в качестве начальных условий автомодельный или достаточно близкий к нему профиль. При приближении к моменту обострения такие структуры, как правило, распадаются на отдельно горящие простые структуры или сливаются в одну. Однако время существования сложной структуры велико: $\Delta t \sim 0.99 t_f$, и температура успевает вырасти в 10—100 раз.

С представлением о сложной структуре связан принцип объединения простых структур в сложные и принцип суперпозиции в нелинейных системах [9]. Все с.ф. автомодельной задачи (кроме первой, которая описывает простую структуру с одним максимумом) можно рассматривать как объединение нескольких простых структур (каждая из которых имеет свой момент обострения t_{fi}, как если бы они горели изолированно). Слож-

ная структура имеет уже другой момент обострения, $t_f=\tau$, общий для всей системы. Впервые это было показано в [33] для одномерных структур, где исследовалось взаимодействие двух простых структур с одним максимумом температуры. Показано, что если расстояние l между ними больше так называемой резонансной длины L_T^*, то они горят независимо, если $l<L_T^*$ — то довольно быстро сливаются в один, а если $l\approx l_0\approx L_T^*$, то они длительное время горят согласованно и образуют сложную структуру



Фиг. 7

с двумя максимумами, соответствующую второй с.ф. Оценка для L_T^* в плоском случае при постоянной плотности $s=2$ получена в [14], [38]:

$$L_T^* = \pi \left[\frac{2(\beta+\sigma+1)}{\sigma(\beta-1)} \right]^{1/2} T_{\max}^{[\beta-(\sigma+1)]/2}.$$

Более строгие оценки приведены в [21], [40].

Для двумерных структур аналогичные исследования проводились в [17], [39]. При этом важно не только расстояние между простыми структурами, но и их конфигурация, которая должна обладать некоторой симметрией. Результаты данной статьи подтверждают этот вывод.

Таким образом, чтобы несколько максимумов, расположенных в пространстве, развивались с одним моментом обострения, сохраняя свою форму, необходимо, чтобы их конфигурация соответствовала многомерной с.ф. Основным организующим принципом при объединении простых структур в сложные является синхронизация происходящих в них процессов (установление общего момента обострения).

2. Автомодельные решения в LS-режиме не имеют конечного фронта. Однако, как видно из приведенных рисунков, они быстро выходят на асимптотику, которая соответствует застывшему температурному профилю. Это обстоятельство указывает на локализацию процесса горения в LS-режиме. Из теорем операторного сравнения и метода стационарных состояний [18]—[21], [40] следует локализация простых структур с одним максимумом температуры. В случае сложных структур локализация подтверждается численными расчетами [10], [17], [33]. Линия уровня 0.05—0.01 фактически определяет форму области локализации. Внутри этой области процесс горения описывается автомодельным законом, который искажается только вблизи границ. На фиг. 3 и 4 представлены

формы областей локализации двумерных структур. Как видим, они имеют необычный вид: крест, звезда, эллипс, прямоугольник и т. д. Численные расчеты задачи (1.1), (1.2) подтвердили вывод о факте локализации и о форме областей локализации.

Пример такого расчета приведен на фиг. 7. В качестве начального профиля брался автомодельный. Локализованная структура имеет тип E2/2, $\beta=2.5$, $\sigma=1$, $s=2$. Время обострения $t_f=0.6535$. Приведены линии уровня и сечения для моментов времени $t_1=0.0$ (фиг. 7, *а*) и $t_2=0.6250$ (фиг. 7, *б*). Происходит самоподдержание архитектуры структуры, однако из-за случайных возмущений в численном счете профиль отклоняется от автомодельного, отмеченного при $t=t_2$ крестиками. Видно, что структуры действительно локализованы, вне области локализации вплоть до $t=t_f$ температура остается равной нулю. Автомодельный профиль, сохраняясь в течение длительного времени, воспроизводится на все меньших масштабах. Распадается он только, когда температура возрастает примерно в 50 раз. Время существования близко к моменту обострения.

Замечание. Эффект локализации диффузионных процессов теоретически строго доказан для широкого класса сред в задачах с граничными режимами и для задачи Коши в среде без источников (см. обзоры [15], [18], [41], возможные его применения обсуждались в работах [9], [11], [28], [29], [41]–[46]). Явление локализации имеет место также в гидродинамических процессах [11], [47]–[49] и в других средах [11], [12].

3. Отличительной чертой изучаемой автомодельности $\xi=r[A(t_f-t)^n]^{-1}$ при $n>0$ в LS-режиме является сокращение масштабов. Область интенсивного горения с максимумами сжимается к центру, а при $t=t_f$ остается предельное распределение температуры $T=Cr^{-p}$, которое соответствует асимптотике. Таким образом, асимптотика при $\xi\to\infty$ дает представление о будущем структуры ($t\to t_f$). С другой стороны, поведение автомодельного решения у центра при ξ, близком к нулю, соответствует прошлому структуры, когда малым ξ соответствовали большие значения r и, следовательно, область немонотонности по r имела большие размеры. Т. е., изучая характер процессов в настоящем в разных пространственных участках диссипативных структур с инвариантом пространства-времени типа $\xi=r[A(t_f-t)^n]^{-1}$, можно судить о тенденциях их поведения и организации процессов в них в прошлом и будущем.

Заключение

В настоящее время проявляется большой интерес к изучению асимптотик нелинейных процессов, так как они несут в себе наиболее характерные черты процессов в различных средах. Диссипативные структуры часто являются такими асимптотиками. Таковы, например, спектры стационарных и осциллирующих решений в [1]–[3], бегущие волны [3]–[5], [31]. Эти асимптотики, как правило, являются инвариантно-групповыми, автомодельными решениями [7], [50], [51].

В настоящей статье исследовано, как возникают, развиваются и что собой представляют сложные многомерные тепловые структуры в среде с нелинейным коэффициентом теплопроводности и объемным источником тепла, как их число и тип зависят от параметров нелинейной среды. Построен спектр структур для автомодельности вида $\xi=axt^n$. Получен спектр форм, характерных только для данной нелинейной среды и опре-

деляемых только ее параметрами. Фундаментальным утверждением является доказательство того, что среда благодаря нелинейности содержит в потенциальном виде все структуры, которые могут существовать в ней на развитой асимптотической стадии и к которым, как к аттракторам, будут стремиться протекающие в ней процессы. Интересно, что эти результаты близки к идеям философов Эллады и Древнего Востока о потенциальных, непроявленных формах, содержащихся в единой, первоначально однородной субстанции.

Литература

1. *Пригожин И., Николис Г.* Самоорганизация в неравновесных системах. М.: Мир, 1979.
2. *Хакен Г.* Синергетика. М.: Мир, 1980.
3. *Эбелинг В.* Образование структур при необратимых процессах. М.: Мир, 1979.
4. Автоволновые процессы в системах с диффузией. Горький: Ин-т прикл. физ., 1981.
5. *Колмогоров А. Н., Петровский И. Г., Пискунов Н. С.* Исследование уравнения диффузии, соединенной с возрастанием количества вещества, и его применение к одной биологической проблеме.— Бюлл. МГУ, 1937, т. 1, № 6.
6. *Ахромеева Т. С. и др.* О классификации двухкомпонентных систем в окрестности точки бифуркации.— Докл. АН СССР, 1984, т. 279, № 3, с. 591—595.
7. *Ахромеева Т. С. и др.* О диффузионном хаосе в нелинейных диссипативных системах.— Докл. АН СССР, 1984, т. 279, № 5, с. 1091—1096.
8. *Ахромеева Т. С., Курдюмов С. П., Малинецкий Г. Г.* Парадоксы мира нестационарных структур. М.: Знание, 1985.
9. *Курдюмов С. П.* Собственные функции горения нелинейной среды и конструктивные законы построения ее организации.— В кн.: Современные пробл. матем. физ. и вычисл. матем. М.: Наука, 1983, с. 217—243.
10. *Еленин Г. Г., Курдюмов С. П., Самарский А. А.* Нестационарные диссипативные структуры в нелинейной теплопроводной среде.— Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1983, т. 23, № 2, с. 380—390.
11. *Курдюмов С. П., Змитренко Н. В.* N- и S-режимы сжатия конечной массы плазмы и особенности режимов с обострением.— Прикл. механ. и техн. физ., 1977, № 1, с. 3—23.
12. *Галактионов В. А., Курдюмов С. П., Самарский А. А.* Об одной параболической системе квазилинейных уравнений.— Дифференц. ур-ния, 1983, т. 19, № 12, с. 2123—2140.
13. *Самарский А. А. и др.* Горение нелинейной среды в виде сложных структур.— Докл. АН СССР, 1977, т. 237, № 6, с. 1330—1333.
14. *Самарский А. А. и др.* Тепловые структуры и фундаментальная длина в среде с нелинейной теплопроводностью и объемным источником тепла.— Докл. АН СССР, 1976, т. 237, № 2, с. 321—324.
15. *Самарский А. А. и др.* Эффект метастабильной локализации тепла в среде с нелинейной теплопроводностью.— Докл. АН СССР, 1975, т. 223, № 6, с. 1344—1347.
16. *Курдюмов С. П. и др.* Диссипативные структуры в неоднородной нелинейной горящей среде.— Докл. АН СССР, 1980, т. 251, № 3, с. 587—591.
17. *Курдюмов С. П. и др.* Взаимодействие диссипативных тепловых структур в нелинейных средах.— Докл. АН СССР, 1980, т. 251, № 4, с. 836—839.
18. *Галактионов В. А. и др.* Локализация тепла в нелинейных средах.— Дифференц. ур-ния, 1981, т. 17, № 10, с. 1826—1841.
19. *Галактионов В. А., Курдюмов С. П., Самарский А. А.* Об асимптотической устойчивости инвариантных решений нелинейных уравнений теплопроводности с источником.— Дифференц. ур-ния, 1984, т. 20, № 4, с. 614—632.
20. *Галактионов В. А., Курдюмов С. П., Самарский А. А.* О методе стационарных состояний для нелинейных эволюционных параболических задач.— Докл. АН СССР, 1984, т. 278, № 6, с. 1296—1300.
21. *Галактионов В. А.* Доказательство локализации неограниченных решений нелинейного параболического уравнения $u_t=\Delta(u^{\sigma+1})+u^{\beta}$.— Дифференц. ур-ния, 1985, т. 21, № 1, с. 15—23.

22. *Захаров А. К. и др.* Экспериментальное наблюдение Т-слоев в движущейся плазме, взаимодействующей с магнитным полем.— Докл. АН СССР, 1973, т. 212, № 5, с. 1092—1095.
23. *Тихонов А. Н. и др.* Эффект Т-слоя в магнитной гидродинамике. М.: ИПМатем. АН СССР, 1969.
24. *Дегтярев Л. М., Захаров В. Е., Рудаков Л. И.* Два примера коллапса ленгмюровских волн.— Ж. эксперим. и теор. физ., 1975, т. 68, вып. 1, с. 115—126.
25. *Стар В.* Физика явлений с отрицательной вязкостью. М.: Мир, 1971.
26. *Полиновский Е. Н., Фридман В. Б.* Взрывная неустойчивость нелинейных волн в средах с отрицательной вязкостью.— Прикл. матем. и механ., 1974, т. 38, № 6, с. 991—995.
27. *Волосевич П. П. и др.* Процесс сверхвысокого сжатия вещества и инициирования термоядерной реакции мощным импульсом лазерного излучения.— Физ. плазмы, 1976, т. 2, № 6, с. 883—897.
28. *Змитренко Н. В. и др.* Метастабильная локализация тепла в среде с нелинейной теплопроводностью и условия проявления ее в эксперименте.— Препринт ИПМатем. АН СССР. М., 1977, № 103.
29. *Змитренко Н. В., Михайлов А. П.* Инерция тепла. М.: Знание, 1982.
30. *Курдюмов С. П., Куркина Е. С., Потапов А. Б.* Исследование многомерной архитектуры собственных функций нелинейной среды.— Препринт ИПМатем. АН СССР. М., 1982, № 75.
31. *Курдюмов С. П. и др.* Архитектура многомерных тепловых структур.— Докл. АН СССР, 1984, т. 274, № 5, с. 1071—1075.
32. *Баренблатт Г. И.* Подобие, автомодельность, промежуточная асимптотика. М.: Гидрометеоиздат, 1978.
33. *Еленин Г. Г., Курдюмов С. П.* Условия усложнения организации нелинейной диссипативной среды.— Препринт ИПМатем. АН СССР. М., 1977, № 106.
34. *Курдюмов С. П., Куркина Е. С., Малинецкий Г. Г.* Диссипативные структуры в средах с распределенными параметрами.— Препринт ИПМатем. АН СССР. М., 1979, № 16.
35. *Адъютов М. М., Клоков Ю. А., Михайлов А. П.* Автомодельные тепловые структуры с сокращающейся полушириной.— Дифференц. ур-ния, 1983, т. 19, № 7, с. 1107—1114.
36. *Курдюмов С. П., Посашков С. А., Синило А. В.* Автомодельные тепловые структуры в нелинейной среде со стоками тепла.— Препринт ИПМатем. АН СССР. М., 1984, № 111.
37. *Галактионов В. А., Посашков С. А.* Об одной «линеаризованной» нелинейной эллиптической задаче, возникающей в теории режимов с обострением.— Препринт ИПМатем. АН СССР. М., 1985, № 10.
38. *Змитренко Н. В. и др.* Возникновение структур в нелинейных средах и нестационарная термодинамика режимов обострения.— Препринт ИПМатем. АН СССР. М., 1976, № 74.
39. *Курдюмов С. П. и др.* Взаимодействие тепловых структур.— Препринт ИПМатем. АН СССР. М., 1978, № 77.
40. *Галактионов В. А., Курдюмов С. П. Самарский А. А.* Об асимптотических собственных функциях» задачи Коши для одного нелинейного параболического уравнения.— Матем сб. (нов. сер.), 1985, т. 126, № 4, с. 435—472.
41. *Samarskii A. A.* Numerical simulation and nonlinear processes in dissipative media.— In: Self-Organization. Autowaves and Structures Far from Equilibrium. Berlin etc.: Springer, 1984, p. 119—129.
42. *Змитренко Н. В. и др.* Локализация термоядерного горения в плазме с электронной теплопроводностью.— Письма в ЖЭТФ, 1977, т. 26, вып. 9, с. 620—623.
43. *Курдюмов С. П., Малинецкий Г. Г.* Синергетика — теория самоорганизации. Идеи, методы, перспективы. М.: Знание, 1983.
44. *Самарский А. А., Курдюмов С. П.* Нелинейные процессы в плотной плазме и их роль в проблеме лазерного УТС.— В кн.: Тр. кафедры волновой и газовой динамики механ.-матем. фак-та МГУ. М.: Изд-во МГУ, 1979, с. 18—28.
45. *Змитренко Н. В., Курдюмов С. П., Самарский А. А.* Возможность использования локализации тепла в режимах сжатия θ-пинча с обострением.— Препринт ИПМатем. АН СССР. М., 1980, № 153.
46. *Zmitrenko N. V., Kurdyumov S. P.* Plasma finite mass compression and rarefaction

regimes permitting a time-reverse in a dissipative medium.— In: 10th Europ. Conf. Contr. Fusion and Plasma Phys. Vol. I. Moscow, 1981, p. F-16.

47. *Змитренко Н. В., Курдюмов С. П.* Автомодельный режим сжатия конечной массы плазмы.— Докл. АН СССР, 1974, т. 218, № 6, с. 1306—1309.

48. *Михайлов А. П., Степанова В. В.* Локализация газодинамических процессов и структуры при адиабатическом сжатии вещества в режиме с обострением.— Прикл. матем. и механ., 1984, т. 48, вып. 6, с. 921—928.

49. *Ануфриева М. А., Михайлов А. П.* Локализация газодинамических процессов при изэнтропическом сжатии газа в режиме с обострением.— Дифференц. ур-ния, 1983, т. 19, № 3, с. 483—490.

50. *Дородницын В. А.* Об инвариантных решениях нелинейного уравнения теплопроводности с источником.— Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1982, т. 22, № 6, с. 1393—1400.

51. *Самарский А. А.* О новых методах исследования асимптотических свойств нелинейных параболических уравнений.— Тр. Матем. ин-та АН СССР. М., 1981, т. 158, с. 153—158.

Поступила в редакцию 19.VII.1985