ЖУРНАЛ
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Том 26, 1986 № 3

УДК 517.956.2

ОБ ОДНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ ЗАДАЧЕ СО СЛОЖНЫМ СПЕКТРОМ РЕШЕНИЙ

ГАЛАКТИОНОВ В. А., КУРДЮМОВ С. П., ПОСАШКОВ С. А., САМАРСКИЙ А. А.

(Москва)

Рассматриваются радиально-симметричные положительные решения нелинейного эллиптического уравнения в R^N, возникающего при исследовании неограниченных автомодельных решений одного квазилинейного параболического уравнения с источником. Показано, что эллиптическая задача имеет четыре различных семейства решений, три дискретных (счетных) и одно континуальное. В одномерном случае решения построены численно, дана картина ветвления.

§ 1. Введение

1. В работе изучается один класс неограниченных автомодельных решений квазилинейного параболического уравнения

$$u_t=\nabla(|\nabla u|^\sigma\nabla u)+u^\beta,\quad t>0,\quad x\in R^N, \tag{1}$$

где $\sigma>0$, $\beta>\sigma+1$ — фиксированные постоянные, $\nabla(\cdot)=\mathrm{grad}_x(\cdot)$. При определенных условиях (1) можно рассматривать как уравнение диффузии тепла в сплошной нелинейной среде с коэффициентом теплопроводности $k=|\nabla u|^\sigma\geqslant 0$, зависящим от градиента температуры $u=u(t, x)$. При этом в среде имеется объемное энерговыделение, мощность источника тепла $Q=u^\beta\geqslant 0$ в каждой точке пространства определяется величиной температуры. Многие свойства решений задачи Коши для (1) в настоящее время подробно изучены. Хорошо известно, например, что за счет интенсивного энерговыделения ($\beta>1$) процесс горения может протекать в режиме с обострением. Другими словами, задача Коши для (1) может не иметь глобального (по времени) решения и в некоторый момент времени $t=T_0<+\infty$ (момент обострения) амплитуда решения становится бесконечно большой:

$$\sup_{x\in R^N} u(t,x)\to+\infty,\qquad t\to T_0^- \tag{2}$$

(см. обзор в [1], [2]).

Условия глобальной разрешимости и неразрешимости в целом задачи Коши для (1) получены в [3] (см. также цитируемую там библиографию), где показано, что при любых $1<\beta<\sigma+1+(\sigma+2)/N$ все нетривиальные ($u\not\equiv 0$) решения являются неограниченными в смысле (2). Если же $\beta>\sigma+1+(\sigma+2)/N$, то в зависимости от величины начального возмущения $u_0(x)=u(0, x)\geqslant 0$ в R^N возможны как глобальные, определенные при всех $t\geqslant 0$, так и неограниченные решения. Кроме того, в [3] получены условия локализации неограниченных решений уравнения (1). Неограниченное решение называется локализованным [2], если оно возрастает до

бесконечности при $t \to T_0^-$ в области ограниченных размеров. И наоборот: если $u(t, x) \to \infty$ при $t \to T_0^-$ всюду в R^N, то локализация отсутствует. В [3] установлено, что для (1) последнее имеет место при всех $\beta \in (1, \sigma+1)$. С помощью численных расчетов, а также некоторых качественных оценок в [3] было также показано, что в случае $\beta \geqslant \sigma+1$ решения локализованы. В частности, там был приведен пример при $\beta=\sigma+1$ локализованного решения, представимого в явном виде.

Диапазон параметров β и σ, при которых существует эффект локализации в задаче Коши, для (1) тот же самый, что и в случае уравнения $u_t = \nabla(u^\sigma \nabla u) + u^\beta$. Доказательство локализации финитных неограниченных решений последнего при $\beta \geqslant \sigma+1$, проведенное в [4] для $N=1$, по всей видимости, переносится на случай уравнения (1).

2. Ниже изучается «тонкая структура» неограниченных локализованных автомодельных решений задачи Коши для (1) при $\beta > \sigma+1$ следующего вида:

$$u(t,x) = (T_0-t)^{-1/(\beta-1)}\theta(\eta), \qquad \eta = \frac{x}{(T_0-t)^{[\beta-(\sigma+1)]/(\sigma+2)(\beta-1)}}. \tag{3}$$

Подстановка выражения (3) в (1) дает для функции $\theta(\eta) \geqslant 0$ квазилинейное эллиптическое уравнение

$$\nabla_\eta(|\nabla_\eta\theta|^\sigma \nabla_\eta\theta) - \frac{\beta-(\sigma+1)}{(\sigma+2)(\beta-1)}\nabla_\eta\theta\cdot\eta - \frac{1}{\beta-1}\theta + \theta^\beta = 0, \quad \eta \in R^N. \tag{4}$$

В соответствии с постановкой исходной задачи нас будут интересовать нетривиальные ($\theta \not\equiv 0$) неотрицательные решения уравнения (4), удовлетворяющие в бесконечно удаленных точках условию

$$\theta(\eta) \to 0, \qquad \|\eta\| \to +\infty. \tag{5}$$

Пространственно-временная структура автомодельного решения (3) дает представление о характере эволюции теплового возмущения в рассматриваемой нелинейной задаче. В частности, из (3) видно, что при $\beta > \sigma+1$ процесс горения локализован, эффективная ширина образующейся тепловой структуры $x_{эф}(t)$ сокращается со временем: $\|x_{эф}(t)\| \sim (T_0-t)^{[\beta-(\sigma+1)]/(\sigma+2)(\beta-1)} \to 0$ при $t \to T_0^-$. Таким образом, полученная эллиптическая задача (4), (5) позволяет выделить многообразие тепловых структур, свойственных этой среде, и детально описать их пространственную геометрию («архитектуру» — в терминологии [5]). Однако исследование всего многообразия решений данной нелинейной эллиптической задачи в R^N в общей постановке вряд ли возможно, несмотря на успехи, достигнутые за последнее время в теории эллиптических задач. В этой связи отметим, что основные продвижения теории связаны с вариационными методами (см., например, [6]—[8] и библиографию в них); что касается задачи (4), (5), то она не допускает эквивалентной вариационной формулировки.

Ограничимся поэтому исследованием частного класса радиально-симметричных решений задачи (4), (5), зависящих от одной координаты $\xi = \|\eta\| \geqslant 0$. Все они удовлетворяют краевой задаче для обыкновенного дифференциального уравнения:

$$\frac{1}{\xi^{N-1}}(\xi^{N-1}|\theta'|^\sigma\theta')' - \frac{\beta-(\sigma+1)}{(\sigma+2)(\beta-1)}\theta'\xi - \frac{1}{\beta-1}\theta + \theta^\beta = 0, \qquad \xi > 0, \tag{6а}$$

$$\theta'(0) = 0, \qquad \theta(+\infty) = 0. \tag{6б}$$

Оказывается, даже в одномерном случае ($N=1$) многообразие решений задачи (6) является весьма сложным. Грубо говоря, спектр обобщенных решений состоит из четырех семейств немонотонных неотрицательных функций $\theta=\theta(\xi)$, см. § 3. При этом три из них являются дискретными, причем по крайней мере два состоят из бесконечного (счетного) набора решений. Четвертое семейство представляет собой «непрерывное» (континуальное) множество. В § 3 для случая $\sigma=1$, $\beta=3$, $N=1$ приведена любопытная картина ветвления решений задачи (6), упорядоченных по некоторому параметру. Кроме того, функции θ из трех семейств можно попарно объединять, получая в результате новые решения, которые при $N=1$ являются радиально-несимметричными. Соответствующие примеры приведены в § 3. Построение функций $\theta=\theta(\xi)$ проводится численными методами.

В § 2 проводится некоторое предварительное исследование, позволяющее выяснить характер осцилляций всех возможных решений задачи (6) относительно пространственно-однородного решения $\theta=(\beta-1)^{-1/(\beta-1)}$. На основе подходов, развитых в [2], [5], [9], [10], этот «локальный» анализ дает важную (даже исчерпывающую) информацию о принципах построения решений задачи (6), которая используется в численных расчетах, а также определяет главное содержание теорем о разрешимости и «числе» решений.

3. Не будет преувеличением сказать, что теория режимов с обострением в нелинейных средах (см., например, [2]–[5], [9], [10] и обзор в [1], [2]) сформулировала ряд новых нелинейных эллиптических задач с уникальными свойствами. Это относится как к задаче (4), (5), так и к уравнению другого типа [2], [5], [9], [10]:

$$\nabla_\eta(\theta^\sigma\nabla_\eta\theta)-\frac{\beta-(\sigma+1)}{2(\beta-1)}\nabla_\eta\theta\cdot\eta-\frac{1}{\beta-1}\theta+\theta^\beta=0,\qquad \eta\in R^N, \tag{7}$$

которое возникает при построении неограниченных автомодельных решений параболического уравнения с иным, чем в (1), характером нелинейности:

$$u_t=\nabla(u^\sigma\nabla u)+u^\beta,\qquad t>0,\quad x\in R^N. \tag{8}$$

Автомодельное решение уравнения (8) ищется в виде

$$u(t,x)=(T_0-t)^{-1/(\beta-1)}\theta(\eta),\qquad \eta=x(T_0-t)^{-[\beta-(\sigma+1)]/[2(\beta-1)]};$$

тогда $\theta(\eta)\geqslant 0$ удовлетворяет эллиптическому уравнению (7). Задача (7), (5) при $\sigma>0$, $\beta>\sigma+1$ имеет дискретный и, по-видимому, конечный набор положительных решений, обладающих весьма разнообразной пространственной структурой. В частности, в одномерном случае существует $M\sim(\beta-1)/[\beta-(\sigma+1)]$ различных немонотонных решений [2], [9], [10]. При $N>1$ такие решения были построены численно [5].

Подчеркнем, что наличие «дискретного» спектра решений уравнения (7) или (4) связано именно с тем, что они возникают при исследовании автомодельных решений, развивающихся в режиме с обострением. Здесь уместно провести сравнение с близкими эллиптическими задачами, которые появляются при автомодельном описании обычных, не обостряющихся тепловых процессов. Например, уравнение со стоком

$$u_t=\nabla(u^\sigma\nabla u)-u^\beta,\qquad t>0,\quad x\in R^N,\quad \sigma\geqslant 0,\quad \beta>1,$$

которое отличается от (8) знаком перед младшим членом, также допускает автомодельное решение

$$(9)\qquad u(t,x)=(T+t)^{-1/(\beta-1)}\theta(\eta),\qquad \eta=x(T+t)^{-[\beta-(\sigma+1)]/[2(\beta-1)]},$$
$$T=\mathrm{const}\geqslant 0.$$

Оно определено при всех t ($u(t,x)\to 0$ при $t\to+\infty$); функция $\theta(\eta)\geqslant 0$ такова, что

$$(10)\qquad \nabla_\eta(\theta^\sigma\nabla_\eta\theta)+\frac{\beta-(\sigma+1)}{2(\beta-1)}\nabla_\eta\theta\cdot\eta+\frac{1}{\beta-1}\theta-\theta^\beta=0,\qquad \eta\in R^N.$$

Это уравнение отличается от (7) знаками при трех последних членах, что резко меняет многообразие решений. В недавней работе [11] показано, что эллиптическая задача (10), (5) при $\sigma=0$, $\beta>1+2/N$, $N\geqslant 2$ всегда имеет бесконечномерное множество решений (при $N=1$ оно двумерно). Радиально-симметричные решения уравнения (10) при $\sigma=0$ и произвольных $\beta>1$ образуют одну непрерывную ветвь решений [12] (континуальное множество). Кроме того, все решения вида (9) асимптотически устойчивы [11], [12].

Таким образом, «дискретизация» спектра решений (или, другими словами, собственных функций нелинейной среды [2]) происходит именно при развитии режимов с обострением, что свидетельствует о своеобразном усилении принципов эволюционного отбора устойчивых решений на высокоинтенсивной стадии теплового процесса.

§ 2. «Линеаризованное» нелинейное уравнение

1. Легко видеть, что (6а) (как, впрочем, и исходное эллиптическое уравнение (4)) имеет очевидное пространственно-однородное решение $\theta=\theta_H=(\beta-1)^{-1/(\beta-1)}$. Преобразуем для удобства (6а) так, чтобы оно перешло в $\theta\equiv 1$. Это достигается заменой

$$\theta\to(\beta-1)^{-1/(\beta-1)}\theta,\quad \xi\to(\beta-1)^{[\beta-(\sigma+1)]/(\sigma+2)(\beta-1)}\xi.$$

В результате получаем задачу

$$(11а)\qquad \frac{1}{\xi^{N-1}}(\xi^{N-1}|\theta'|^\sigma\theta')'-\frac{\beta-(\sigma+1)}{\sigma+2}\theta'\xi-\theta+\theta^\beta=0,\qquad \xi>0,$$

$$(11б)\qquad \theta'(0)=0,\qquad \theta(+\infty)=0.$$

Как уже отмечалось во Введении, многообразие (число и характер немонотонности) решений задачи (11) зависит от количества и пространственного поведения различных семейств решений уравнения, полученного за счет линеаризации исходного относительно однородного решения $\theta\equiv 1$. Полагая $\theta(\xi)=1+z(\xi)$ и проводя в (11а) процедуру линеаризации (формально считая, что $|z(\xi)|\ll 1$), получаем другое (но все равно нелинейное!) уравнение относительно функции $z(\xi)$:

$$(12)\qquad \frac{1}{\xi^{N-1}}(\xi^{N-1}|z'|^\sigma z')'-\frac{\beta-(\sigma+1)}{\sigma+2}z'\xi+(\beta-1)z=0,\qquad \xi>0.$$

Естественно, $z(\xi)$ должна удовлетворять лишь одному краевому условию симметрии при $\xi=0$:

$$(13)\qquad z'(0)=0.$$

Задача (12), (13) фактически описывает возможные колебания решения $\theta(\xi)$ исходной задачи (11) относительно ее однородного решения $\theta\equiv 1$.

2. Сформулируем теперь главный результат этого параграфа.

Предложение. *Пусть* $\sigma>0$, $\beta>\sigma+1$ *и, кроме того,*

$$a_*=\frac{\beta(\sigma-1)+1}{\sigma}\geqslant 0. \tag{14}$$

Тогда задача (12), (13) *при любом* $N\geqslant 1$ *имеет четыре различных семейства решений, бесконечно осциллирующих в любой окрестности точки* $\xi=+\infty$:

($\mathscr{P}$) — *однопараметрическое семейство решений* $\mathscr{P}_\mu=\{z=z(\xi,\mu),\ \mu\neq 0\}$, *удовлетворяющих краевым условиям* $z'(0,\mu)=0$, $z(0,\mu)=\mu$;

(Q) — *однопараметрическое семейство решений* $Q_a=\{z=z(\xi,a), a>0\}$ *таких, что* $z(\xi,a)=0$ *при* $\xi\in[0,a)$, $z(\xi,a)\not\equiv 0$ *в некоторой правой окрестности точки* $\xi=a$ *и* $z(a,a)=z'(a,a)=0$;

($\mathscr{R}$) — *двухпараметрическое семейство нетривиальных решений* $\mathscr{R}_\nu=\{z=z(\xi,\nu),\ \nu=(\nu_1,\nu_2)\}$, *удовлетворяющих условиям* $z(0,\nu)=z'(0,\nu)=0$ *и знакопостоянных в достаточно малой правой окрестности точки* $\xi=0$;

(S) — *однопараметрическое семейство решений* $S_\lambda=\{z=z(\xi,\lambda)\}$, $z(0,\lambda)=z'(0,\lambda)=0$ *и, в отличие от функций из* $\mathscr{R}_\nu$, *бесконечно осциллирующих в любой сколь угодно малой окрестности* $\xi=0$.

Замечание. Эти же семейства решений существуют и в случае $a_*<0$, когда (14) не выполнено. Однако при этом доказательство осциллируемости решений в окрестности бесконечности (принципиально важный результат) требует довольно громоздкого анализа фазовой плоскости уравнения первого порядка, эквивалентного (12).

Доказательство данного предложения в достаточной общности проведено в [13]. Кратко охарактеризуем основные его этапы. Локальное существование решений из $\mathscr{P}_\mu$ и Q_a доказано в [13] с помощью теорем о неподвижных точках непрерывных преобразований. Глобальные свойства (в частности, осциллируемость) решений из $\mathscr{P}_\mu$, Q_a, $\mathscr{R}_\nu$ и S_λ устанавливаются путем сведения уравнения (12) заменой

$$z(\xi)=\xi^{(\sigma+2)/\sigma}\varphi(\eta),\quad \eta=\ln\xi,\qquad P=d\varphi/d\eta \tag{15}$$

к уравнению первого порядка

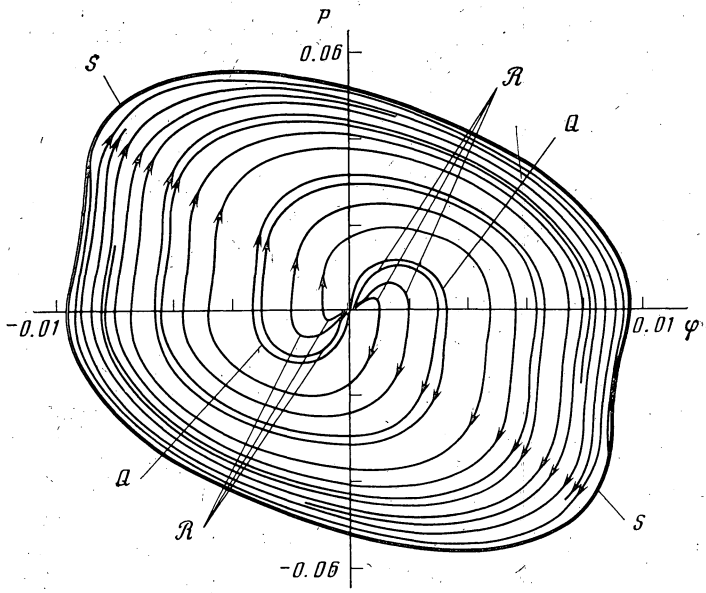
$$\frac{dP}{d\varphi}=-\frac{1}{(\sigma+1)P}\left[\frac{a_*\varphi-mP}{|\varphi(\sigma+2)/\sigma+P|^\sigma}+b\varphi+cP\right], \tag{16}$$

где введены обозначения

$$a_*=\frac{\beta(\sigma-1)+1}{\sigma},\qquad m=\frac{\beta-(\sigma+1)}{\sigma+2},$$

$$b=\left[N-1+\frac{2(\sigma+1)}{\sigma}\right]\frac{\sigma+2}{\sigma}>0,\qquad c=N-1+\frac{(\sigma+1)(\sigma+4)}{\sigma}>0.$$

Главный итог анализа уравнения (16) состоит в следующем: при любых $\beta>\sigma+1$ его фазовый портрет содержит предельный цикл, охватывающий точку (0, 0). Этот вывод в силу (15) означает, что все решения исходной задачи (12), (13) являются бесконечно осциллирующими в окрестности $\xi=+\infty$. Особенно просто картина фазовых траекторий уравнения (16) выглядит в случае $a_*\geqslant 0$ (см. фиг. 1, где $N=1$, $\sigma=1$, $\beta=3$). Она получена в процессе численного решения различных задач Коши для уравнения (12) с одновременной обработкой в соответствии с преобразо-



Фиг. 1

ванием (15). На фиг. 1 приведено изображение внутренности предельного цикла S.

Буквами Q, $\mathcal{R}$, S обозначены траектории, которые в результате обратного к (15) преобразования порождают семейства решений Q_a, $\mathcal{R}_\nu$, S_λ. Траектории Q и S единственны, поэтому они порождают однопараметрические семейства решений. При этом траектория S (предельный цикл) определяет решения $z(\xi)$ из S_λ, бесконечно осциллирующие как в окрестности $\xi=+\infty$, так и в окрестности точки $\xi=0$. Траектории $\mathcal{R}$ образуют пучок, и, следовательно, преобразование, обратное к (15), определяет двухпараметрическое семейство решений $\mathcal{R}_\nu$, $\nu=(\nu_1, \nu_2)$. Траектория $\mathcal{P}$, определяющая семейство $\mathcal{P}_\mu$, «наматывается» на предельный цикл S снаружи и на фиг. 1 не показана.

Приведем теперь асимптотики решений $z(\xi)$ из $\mathcal{P}_\mu$, Q_a, $\mathcal{R}_\nu$, которые определяют «локальную» зависимость функции $z(\xi)$ от соответствующих параметров:

$$(\mathcal{P}) \qquad z(\xi)=\mu\left(1-\frac{(\sigma+1)}{(\sigma+2)}\left(\frac{\beta-1}{N}\right)^{1/(\sigma+1)}\xi^{(\sigma+2)/(\sigma+1)}|\mu|^{-\sigma/(\sigma+1)}\right)+$$
$$+o(\xi^{(\sigma+2)/(\sigma+1)}), \qquad \xi\to 0,$$

$$(Q) \qquad z(\xi)=m^{1/\sigma}\left(\frac{\sigma+1}{\sigma}\right)^{-(\sigma+1)/\sigma}a^{1/\sigma}(\xi-a)^{(\sigma+1)/\sigma}+o((\xi-a)^{(\sigma+1)/\sigma}), \quad \xi\to a^+.$$

Что касается решений из $\mathcal{R}_\nu$, то при $a^*>0$ (см. [13])

$$(\mathcal{R}) \qquad z(\xi)=\xi^{(\sigma+2)/\sigma}\left\{[\nu_1\xi^{a_*/m}+\ldots]+\left[\nu_2\xi^{\alpha}\exp\left(-\frac{\alpha_1^2}{\sigma}|\nu_1|^{-\sigma}\xi^{-\alpha}\right)+\ldots\right]\right\},$$

где $\alpha_1^2=m^2\{a_*(\sigma+1)[(\sigma+2)/\sigma+a_*/m]^\sigma\}^{-1}$, $\alpha=a_*\sigma/m$. Здесь естественным образом выделяется рациональная часть асимптотики (первые квадратные скобки) и существенно неаналитическая часть (вторые квадратные скобки). Асимптотику решений из S_λ выписать нельзя, каждое из них является, можно сказать, «существенно нелинейным» решением (напомним, что все они порождены одной траекторией уравнения (16), образующей предельный цикл). Однако они действительно образуют однопарамет-

рическое семейство, поскольку задача (12), (13) инвариантна относительно преобразования

$$\xi \to \alpha\xi, \qquad z \to \pm\alpha^{(\sigma+2)/\sigma}\bar{z}(\xi), \qquad \alpha = \text{const} > 0$$

(собственно, этот факт определяет вид преобразования (15), понижающего порядок уравнения (12)).

3. Итак, установлены два принципиальных факта:

1) семейства решений $\mathcal{P}_\mu$, Q_a, $\mathcal{R}_\nu$ и S_λ «линеаризованной» задачи непрерывны по соответствующим параметрам;

2) все решения бесконечно осциллируют в окрестности $\xi = +\infty$.

Тогда представления, развитые в [2], [5], [9], [10], позволяют сделать следующие выводы. Каждое из однопараметрических семейств $\mathcal{P}_\mu$, Q_a, S_λ должно, в принципе, порождать дискретное (счетное) множество решений исходной задачи (11) с таким же характером немонотонности в окрестности $\theta \equiv 1$. Эти множества решений удобно обозначить, соответственно, через $\mathcal{P} = \{\mathcal{P}_i\}$, $Q = \{Q_i\}$ и $S = \{S_i\}$. Что касается семейства $\mathcal{R}_\nu$, то здесь за счет появления нового параметра ($\mathcal{R}_\nu$, в отличие от предыдущих, двухпараметрическое) множество соответствующих решений $\theta(\xi)$ должно быть не дискретным, а континуальным. В дальнейшем оно обозначается через $\mathcal{R} = \{\mathcal{R}_i^\nu\}$. Здесь индекс $\nu = \{\nu_1\}$ подчеркивает континуальность спектра таких решений. Необходимость дискретного нижнего индекса i разъясняется в § 3. Степень достоверности этих качественных выводов проверяется численно в § 3.

§ 3. Нелинейные собственные функции (численные результаты)

Для уравнения (11а) можно получить формальным разложением следующее представление решений в окрестности $\xi = +\infty$:

$$\theta(\xi) = C\xi^{-(\sigma+2)/[\beta-(\sigma+1)]} + o\left(\xi^{-(\sigma+2)/[\beta-(\sigma+1)]}\right), \quad \xi \to \infty, \tag{17}$$

где $C > 0$ — произвольная константа. При этом в случае $\beta > \sigma + 1$ имеем $\theta(\xi) \to 0$ при $\xi \to \infty$, так что условие (11б) выполнено.

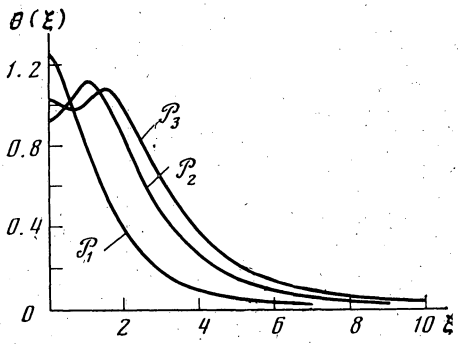
Ниже проводится численное построение решений задачи (11) с асимптотическим поведением (17) в одномерном случае ($N = 1$) при $\sigma = 1$, $\beta = 3$.

Качественные выводы § 2 в основном оправдываются. Действительно существуют четыре семейства решений задачи (11), имеющих топологически различное локальное поведение в окрестности гомотермического решения $\theta \equiv 1$. Каждому решению из этих семейств соответствует своя константа C из (17), и в дальнейшем эти решения называются собственными функциями (с.ф.). Параметр C из (17) (он позволяет упорядочить все многообразие решений), отвечающий функциям из семейств $\{\mathcal{P}_i\}$, $\{Q_i\}$ и $\{\mathcal{R}_i^\nu\}$, будем обозначать, соответственно, через $C_{\mathcal{P}}{}^i$, $C_Q{}^i$ и $C_{\mathcal{R}}^{i,\nu}$. О семействе S речь пойдет ниже.

1. Собственные функции из семейства $\mathcal{P}$. С.ф. $\{\mathcal{P}_i\}$ имеют значения $\theta(0) = \theta_0{}^{\mathcal{P}_i} \neq 1$. В общем случае у этих решений немонотонный профиль. Индекс i здесь и в дальнейшем равен количеству экстремумов с.ф. Численно удается построить несколько первых с.ф. из $\mathcal{P}$ (см. фиг. 2). Параметр $C_{\mathcal{P}}{}^i$ возрастает с ростом $i: C_{\mathcal{P}}^{i+1} > C_{\mathcal{P}}{}^i, C_{\mathcal{P}}{}^1$ — конечная,

отличная от нуля величина. Видно, что у с.ф., имеющих несколько экстремумов, происходит «раскачка» колебаний возле гомотермического решения $\theta\equiv1$, как и в линеаризованной задаче, и справедливо неравенство $|\theta_0^{\mathscr{P}_{i+1}}-1|<|\theta_0^{\mathscr{P}_i}-1|$. У старших с.ф. (при больших значениях i) происходит сгущение колебаний при $\xi\to0$.

2. Собственные функции из семейства Q. Решения $\{Q_i\}$ этого семейства удовлетворяют условию $\theta(\xi)\equiv1$ при $\xi\in[0, \xi_i]$ и $\theta(\xi)\not\equiv1$ при $\xi>\xi_i$. Параметры ξ_i и $\theta_0^{\mathscr{P}_i}$ из множеств Q и $\mathscr{P}$ соответственно можно назвать собственными значениями задачи (11). Пары (ξ_i, C_Q^i) упорядочены следующим образом: $\xi_{i+1}<\xi_i$, $C_Q^{i+1}<C_Q^i$ (ξ_1 и C_Q^1 — конечные величины). Характер немонотонности поведения с.ф. Q_i такой же, как у $\mathscr{P}_i$.



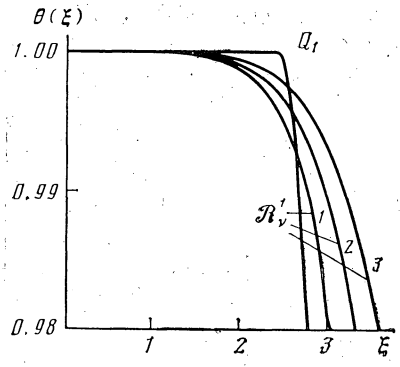
Фиг. 2. $C_{\mathscr{P}}^1=5.77$, $C_{\mathscr{P}}^2=18.82$, $C_{\mathscr{P}}^3=28.65$

3. Собственные функции из семейства $\mathscr{R}$. Решения из $\mathscr{R}=\{\mathscr{R}_i^\nu\}$ удовлетворяют условию $\theta(0)=1$ и в достаточно малой окрестности $\xi=0$ решения $\theta(\xi)$ монотонны. Немонотонное поведение решений такое же, как у с.ф. $\mathscr{P}_i$, Q_i.

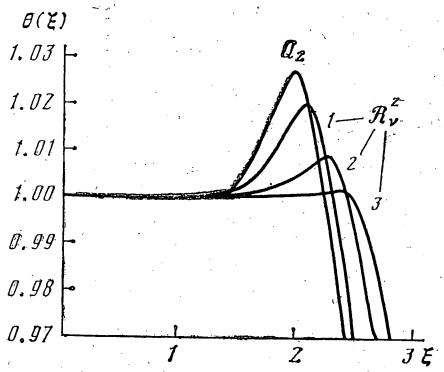
Однако в отличие от первых двух семейств спектр с.ф. $\{\mathscr{R}_i^\nu\}$ имеет континуальный характер. Если выражаться более точно, то $\mathscr{R}=\{\mathscr{R}_i^\nu\}$ состоит из счетного (бесконечного) набора континуальных множеств различных решений $\theta(\xi)$. Причем, как показывают расчеты, при $i\geqslant0$ любое $C\in(C_Q^{i+1}, C_Q^i)$ порождает собственную функцию из $\mathscr{R}_{i+1}^\nu$ (здесь формально полагаем $C_Q^0=\infty$, так что множество $\mathscr{R}_0^\nu$ состоит из одного пространственно-однородного решения $\theta\equiv1$). Поведение таких с.ф. в области монотонного стремления к гомотермическому решению при $\xi\to0$ характеризуется константой ν_1 из разложения ($\mathscr{R}$) (см. § 2). Любой с.ф. из $\mathscr{R}_i^\nu$ соответствует пара констант $(\nu_1^i, C_{\mathscr{R}}^{i,\nu})$. График зависимости ν_1^{i+1} от $C_{\mathscr{R}}^{i+1,\nu}\in(C_Q^{i+1}, C_Q^i)$ имеет нулевые значения ν_1^{i+1} на границе области изменения $C_{\mathscr{R}}^{i+1,\nu}$ и один конечный экстремум. Отсюда ясно, что с.ф. Q_i являются в определенном смысле «предельными» из континуального семейства $\mathscr{R}_i^\nu$, т. е. им отвечают константы $\nu_1^i=0$.

На фиг. 3, 4 изображено сравнительное поведение, соответственно, с.ф. Q_i, $\mathscr{R}_i^\nu$ при $i=1, 2$ в области значений, «близких» к гомотермическому решению. При больших ξ все эти решения монотонно стремятся к нулю при $\xi\to+\infty$ (так же, как на фиг. 2).

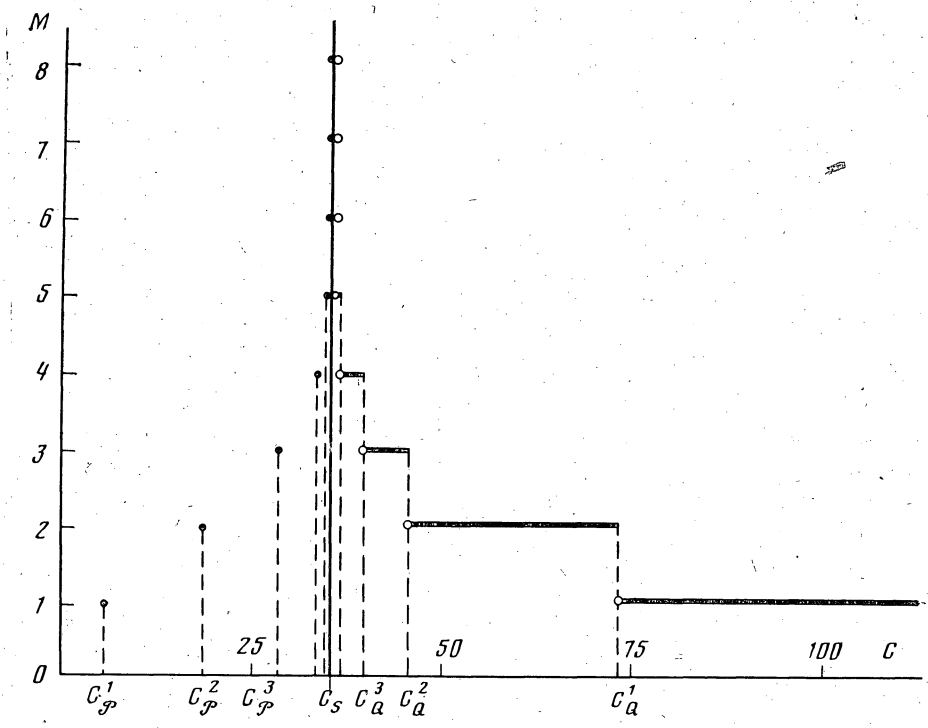
4. Картина ветвления решений; собственная функция — из семейства S. На фиг. 5 изображена зависимость количества экстремумов M с.ф. от значений константы C из (17). Видно, что при $i\to\infty$ константы $C_{\mathscr{P}}^i$ сходятся снизу, а $C_Q^i, C_{\mathscr{R}}^{i,\nu}$ — сверху к некоторому значению C_S. Учитывая, что $\theta_0^{\mathscr{P}_i}\to1$, $\xi_i\to0$, $i\to\infty$, а также результаты § 2, можно сделать вывод о том, что C_S отвечает некоторой с.ф. семейства S. Эта с.ф. удовлетворяет условию $\theta(0)=1$ и бесконечно осциллирует в любой малой окрестности $\xi=0$, т. е. ей отвечает $M=+\infty$. По всей видимости, решение типа S единственно.



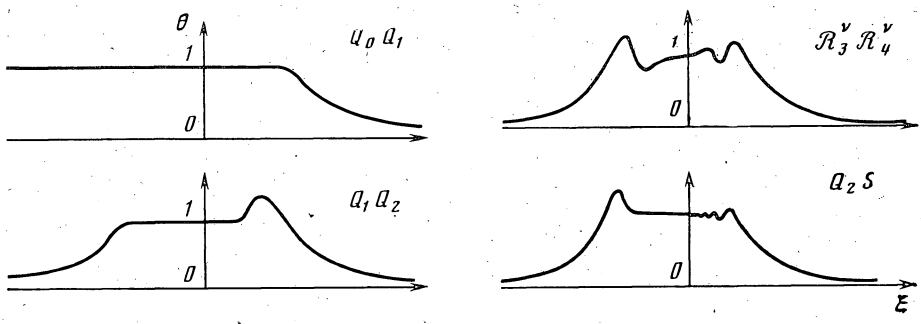
Фиг 3. $C_Q^1=73.56$, $C_1=100$, $C_2=150$, $C_3=200$



Фиг. 4. $C_Q^2=45.8$, $C_1=50$, $C_2=60$, $C_3=70$



Фиг. 5. $C_S=35.6$, • — решения $\mathcal{P}_i$, ∘ — решения Q_i, —— — решения $\mathcal{R}_i^\nu$, $i=1, 2, \ldots$



Фиг. 6

5. Несимметричные с.ф. Очевидно, что при $N=1$ с.ф. Q_i, $\mathcal{R}_i^\nu$, S можно гладко соединить друг с другом при $\xi=0$ и получить при этом несимметричные с.ф., определенные на всей оси $\xi\in(-\infty, +\infty)$. Примеры таких решений даны на фиг. 6. Все они являются обобщенными решениями уравнения (11а) в R^1. Из вида асимптотики $\theta(\xi)$ при $\xi\to 0$ нетрудно

вывести условия, при которых $\theta(\xi)$ на фиг. 6 — классические решения, $\theta \in C^2(R^1)$.

Литература

1. *Галактионов В. А., Курдюмов С. П., Самарский А. А.* Об одной параболической системе квазилинейных уравнений. I.– Дифференц. ур-ния, 1983, т. 19, № 12, с. 2123–2140.
2. *Курдюмов С. П.* Собственные функции горения нелинейной среды и конструктивные законы построения ее организации.– В кн.: Соврем. пробл. матем. физ. и вычисл. матем. М.: Наука, 1982, с. 217–243.
3. *Галактионов В. А.* Об условиях несуществования в целом и локализации решений задачи Коши для одного класса нелинейных параболических уравнений.– Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1983, т. 23, № 6, с. 1341–1354.
4. *Галактионов В. А.* Доказательство локализации неограниченных решений нелинейного параболического уравнения $u_t=(u^\sigma u_x)_x+u^\beta$.– Дифференц. ур-ния, 1985, т. 21, № 1, с. 15–23.
5. *Курдюмов С. П. и др.* Архитектура многомерных тепловых структур.– Докл. АН СССР, 1984, т. 274, № 5, с. 1071–1075.
6. *Похожаев С. И.* Об одном подходе к нелинейным уравнениям.– Докл. АН СССР, 1979, т. 247, № 6, с. 1327–1331.
7. *Lions P. L.* On the existence of positive solutions of semilinear elliptic equations.– SIAM Rev., 1982, v. 24, № 4, p. 441–467.
8. *Berestycki H., Lions P.-L.* Nonlinear scalar field equations.– Arch. Ration. Mech. and Analys., 1983, v. 82, № 4, p. 313–375.
9. *Самарский А. А. и др.* Горение нелинейной среды в виде сложных структур.– Докл. АН СССР, 1977, т. 237, № 6, с. 1330–1333.
10. *Адъютов М. М., Клоков Ю. А., Михайлов А. П.* Автомодельные тепловые структуры с сокращающейся полушириной.– Дифференц. ур-ния, 1983, т. 19, № 7, с. 1107–1114.
11. *Kamin S., Peletier L. A.* Large time behaviour of solutions of the heat equation with absorption.– Preprint Math. Inst. Univ. Leiden, 1983, № 25.
12. *Галактионов В. А., Курдюмов С. П., Самарский А. А.* Об асимптотических «собственных функциях» задачи Коши для одного нелинейного параболического уравнения.– Матем. сб., 1985, т. 126, № 4, с. 435–472.
13. *Галактионов В. А., Посашков С. А.* Об одной «линеаризованной» нелинейной эллиптической задаче, возникающей в теории режимов с обострением.– Препринт ИПМатем. АН СССР. М., 1985, № 10.

Поступила в редакцию 18.I.1985